10 de noviembre de 2025

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO INGENIERIA DE TRANSPORTE Y LOGISTICA
ICT3103 ECONOMIA DE TRANSPORTE - 2º SEMESTRE 2025
INTERROGACION 2

Dispone de *una hora y cuarenta minutos* para responder la interrogación. En paréntesis figura el puntaje de cada pregunta. i) Sus respuestas tienen que ser autocontenidas, nada se dará por sobrentendido al corregir; ii) cuando dice explicar, debe proveer un argumento que justifique de manera adecuada su respuesta haciendo uso de los contenidos aprendidos en el curso; iii) en los desarrollos matemáticos, debe explicarse la notación utilizada; ídem con los gráficos. iv) Todas las preguntas deben ser respondidas de puño y letra.

1) Tarificación e inversión en infraestructura vial.

Considere este modelo: $BS(\{q_t\};k) = \int_0^q p(x)dx - qC(q;k) - \rho(k)$, donde q es demanda, p(q) es la función de demanda inversa, C(q, k) es la función de costo medio del usuario y ρ(k) es la función de costo de la inversión en infraestructura. Demuestre matemáticamente el teorema de Mohring-Harwitz (teorema de autofinanciamiento). Para ello obtenga las condiciones de primer orden, trabaje sobre ellas y aplique las condiciones del teorema. (14 % de la nota)

Respuesta:

Al derivar con respecto a q: $\frac{\partial BS}{\partial q} = p(q) - C(q;k) - q\frac{\partial C}{\partial q} = 0$ (I)

Al derivar con respecto a k: $\frac{\partial BS}{\partial k} = \frac{\partial BS}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial k} + -q\frac{\partial C}{\partial k} - \frac{\partial \rho}{\partial k} = 0$ (II)

En (I), dado que el costo del usuario es C, la tarifa vial es $T = q\frac{\partial C}{\partial q}$. En (II), $\frac{\partial BS}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial k} = 0$, dado que q es una variable de optimización. Por lo tanto, en (II) $-q\frac{\partial C}{\partial k} = \frac{\partial \rho}{\partial k}$. La recaudación total es $Tq = q\frac{\partial C}{\partial q}q = -kq\frac{\partial C}{\partial K}$, por homogeneidad de grado cero de la función de costo medio ($\frac{\partial C}{\partial q}q + \frac{\partial C}{\partial K}k = 0$) . Haciendo uso de (II) $Tq = -kq\frac{\partial C}{\partial K} = k\frac{\partial \rho}{\partial k}$. Si existen economías de escala constantes en la construcción de vialidad, el costo marginal es igual al costo medio y, por lo tanto, la recaudación total es $Tq = kc_k$, donde c_k es el costo medio o unitario por unidad de infraestructura vial y k c_k es el costo total de la infraestructura vial. Así el teorema queda demostrado.

2) Tarificación en infraestructura vial - modelo congestión estática. Considere las funciones de demanda inversa de viajes para hora punta y hora fuera de punta $P_p(Q_p) = A_p - B_p Q_p$ y $P_f(Q_f) = A_f - B_f Q_f$, respectivamente (Q: demanda; p: punta; fp: fuera de punta). La función de costo medio de viaje en ambos períodos está dada por C = b Qi, (i: punta, fuera de punta). Suponga los siguientes valores $A_p = 800$, $B_p = 20$, $A_f = 400$, $B_f = 20$ y b = 10.

i) Determine numéricamente la demanda y la tarifa óptimas sociales para cada período del día. Para ello debe resolver el problema de maximización del bienestar social. (0,4)
ii) Calcule la demanda en cada período del día, suponiendo ausencia de tarificación vial y la implementación de un impuesto al combustible que hace que el costo de viaje (costo medio del usuario) pase a ser C = a + b Qi, donde a = 150, en ambos períodos. (El valor de *b* no cambia). (0,4)
iii) Explique si el impuesto a los combustibles funciona como un sustituto perfecto o imperfecto de la tarifa vial al comparar la solución en i) y ii). (0,2)

Sugerencia: en i) plantee las CPO, despeje el valor de Qi, obtenga su valor numérico y finalmente calcule la tarifa vial. En ii) resuelva a partir de la condición de equilibrio de usuario. (14 % de la nota)

Respuesta:

i) Para determinar el óptimo social, se debe maximizar la siguiente función:

$$Max_{Q_p,Q_f} BS = \int_0^{Q_p} (A_p - B_p\rho_p)d\rho_p - (bQ_p)Q_p + \int_0^{Q_f} (A_f - B_f\rho_f)d\rho_f - (bQ_f)Q_f$$

Obtenemos las condiciones de primer orden y resolvemos los valores de Qi.

$$\frac{\partial BS}{\partial Q_p} = (A_p - BQ_p) - (bQ_p) - bQ_p = 0 \Leftrightarrow Q_p = \frac{A_p}{B+2b} = 20$$
$$\frac{\partial BS}{\partial Q_f} = (A_f - BQ_f) - (bQ_f) - bQ_f = 0 \Leftrightarrow Q_f = \frac{A_f}{B+2b} = 10$$

Las demandas son independientes. Por lo tanto, cada condición de primer orden se resuelve por separado. Las tarifas respectivas están dadas por Ti = b Qi, (i: punta, fuera de punta). Así, en hora punta Tp = 20 * 10 = 200 y en fuera de punta Tf = 10 * 10 = 100.

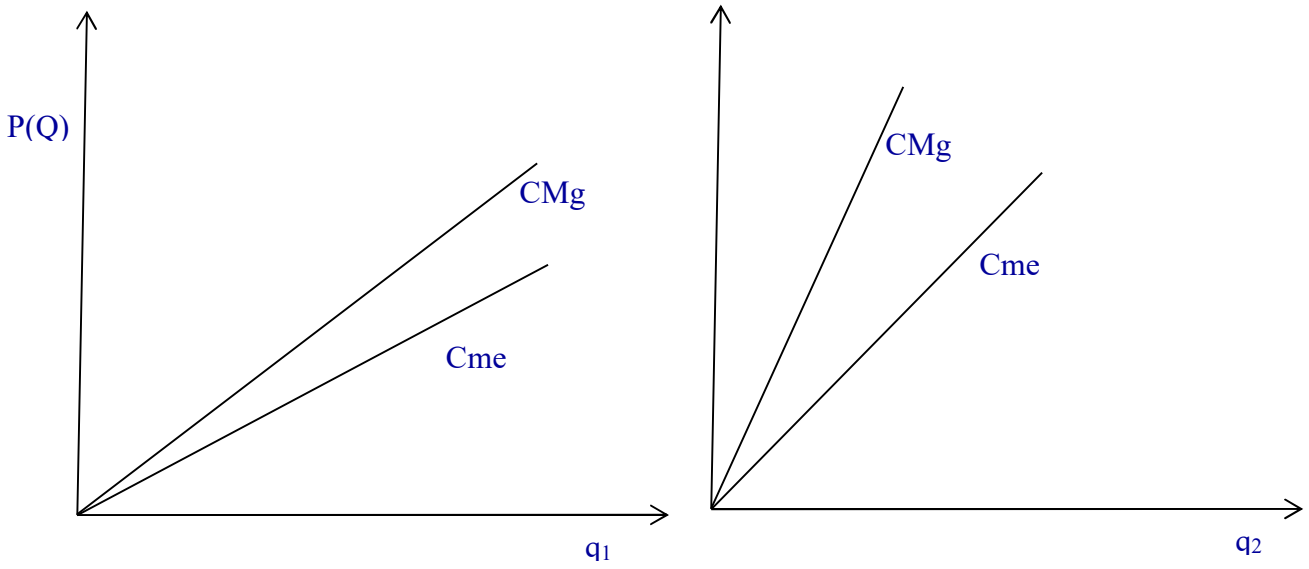
ii) $A_p - BQ_p = a + bQ_p \Leftrightarrow Q_p = \frac{A_p - a}{B+b} = \frac{650}{30} = 21{,}67$

$$A_f - BQ_f = a + bQ_f \Leftrightarrow Q_f = \frac{A_f - a}{B+b} = \frac{250}{30} = 8{,}33$$

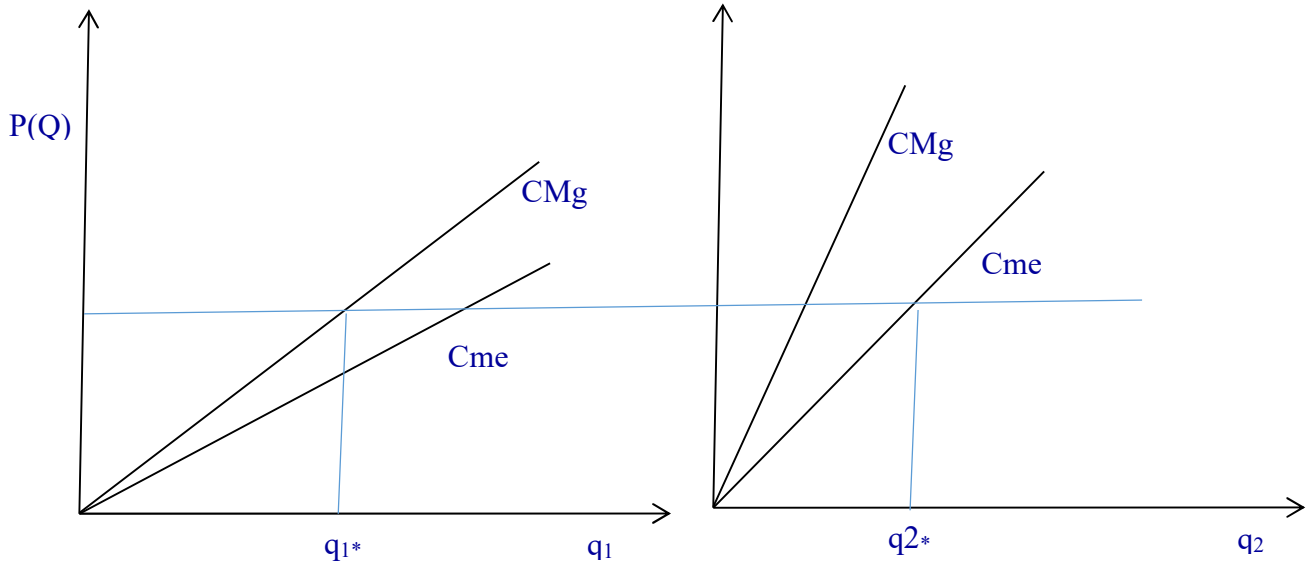
iii) Dado que el impuesto al combustible no puede diferenciar por hora del día, es un sustituto imperfecto de las tarifas viales por congestión variables según hora del día. En hora punta, el impuesto al combustible no alcanzar a cubrir el costo marginal externo de la congestión; por lo que se tiene exceso de demanda con relación al óptimo. En la hora punta, donde el impuesto

a los combustibles castiga en exceso a los usuarios, se tiene una disminución con respecto a la demanda óptima.

3) Tarificación e inversión en infraestructura vial. Suponga i) un par origen destino, ii) dos rutas para viajar, iii) demanda perfectamente elástica, tal que q1 + q2 = Q y iv) la ruta 1 es tarificada y la ruta 2 es de circulación gratuita. En el gráfico siguiente, dibuje el equilibrio de usuario y explíquelo con un texto. El ejercicio estará bien resuelto solo si los dos gráficos son consistentes entre sí y si estos están bien explicados. (8% de la nota)



Respuesta:



Como la demanda es perfectamente elástica, la curva de demanda inversa tiene pendiente igual a cero. En el primer gráfico, la demanda es q1* donde la curva de demanda intercepta la curva de costo marginal. En el segundo gráfico, la demanda es q2*, donde la curva de demanda intersecta la curva de costo medio. Para que la respuesta este bien, la curva de demanda debe tener la misma altura en ambos gráficos, lo que significa que el costo por circular en ambas rutas es el mismo, a fin de cumplir el equilibrio de usuario.

4) Tarificación en infraestructura vial - modelo cuello de botella. En el modelo de cuello de botella, suponga que alfa = 3.000 $/h (valor del tiempo de viaje); beta = 500$/h (costo por de arribo temprano) y gamma = 3.500$/h (costo por arribo tardío). Suponga también que N/ ω = 2h (h: hora). Considere ausencia de tarificación vial. i) Obtenga la hora de inicio y la hora de fin del período punta. (0.17) ii) Determine la hora en que inicia su viaje quien llega justo a la hora deseada t*. (0.17) iii) Grafique la solución de equilibrio que muestre cómo se arma la cola de vehículos, los tiempos de espera en cola y el tiempo en que se disipa la cola, en función del tiempo. Este gráfico debe incluir en el eje de las abscisas el instante en que se inicia la cola, el instante en que parte quien arriba a la hora, la hora deseada de llegada y el instante en que se disipa la cola. Cada uno de estos cuatro instantes tiene que estar con su expresión algebraica respectiva. (0.49) iv) Suponga que existe tarificación vial, determine cuál es la máxima tarifa que se cobrará durante la hora peak de congestión. (0.17) (12% de la nota)

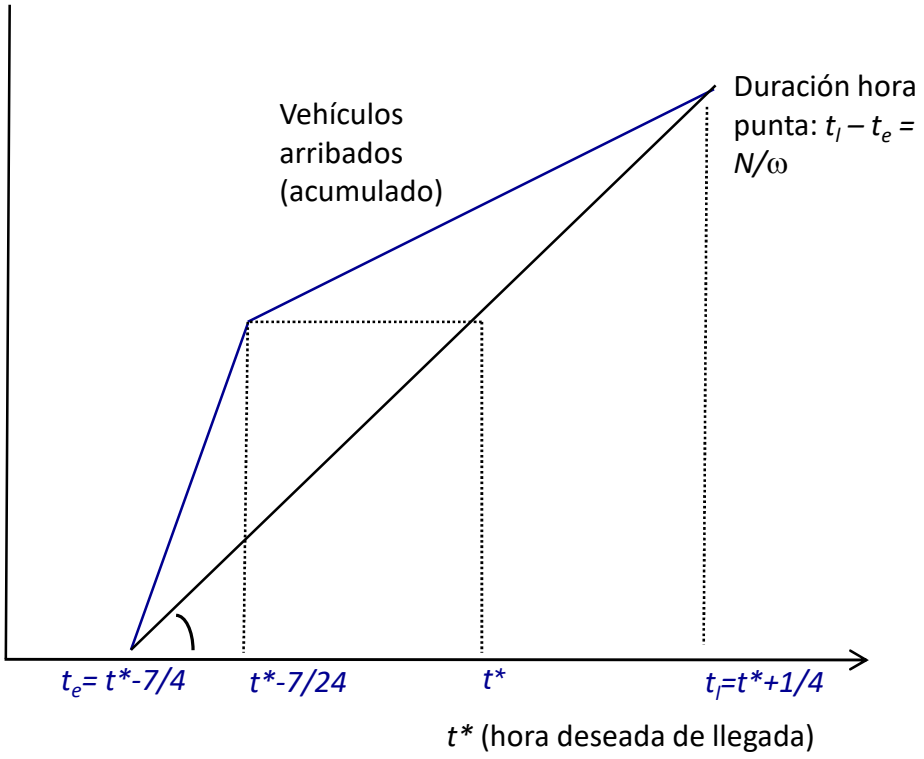
Fórmulas claves:
$t_e = t^* - \gamma/(\beta + \gamma)$ N/ ω, hora de inicio de la cola
$t_l = t^* + \beta/(\beta + \gamma)$ N/ ω , hora en que se disipa la cola
$T^v = \beta / \alpha\ (t^{arribo} - t_e)$, tiempo de viaje para quien llega temprano
$T^v = \gamma / \alpha\ (t_l - t^{arribo})$, tiempo de viaje para quien llega tarde
$\tau(t_{arribo}) = \beta\ (t_{arribo} - t_e)$, tarifa para quienes arriban temprano
$\tau(t_{arribo}) = \gamma\ (t_l - t_{arribo})$, tarifa para quienes arriban tarde

Respuesta:
i) La cola se comienza a armar en el instante:
$t_e = t^* - \gamma/(\beta + \gamma)$ N/ ω = $t^* - 3.500 / (3.500 + 500)\ 2 = t^* - 7/4$.

La cola se disipa en $t_l = t^* + \beta/(\beta + \gamma)$ N/ ω = t* + 500 / (3.500 + 500) 2 = $t^* + 1/4$.

ii) $T^v = 1/6\ (t^* - t^* + 7/4) = 7/24$ h. Con la ecuación que corresponde a quienes llegan tarde, se obtiene el mismo resultado: $T^v = 7/6$ (t* + 1/4 - t*) = 7/24 h. (Basta con hacerlo con una de las dos fórmulas.)

iii) Gráfico:



iv) Este valor está dado por la tarifa que pagan quienes arriba a la hora. Aplicando la fórmula para arribos tempranos $\tau(t_{arribo}) = \beta\ (t_{arribo} - t_e) = 500 * 7/4 = \$875$. Aplicando la fórmula para arribos tardías la tarifa es $\tau(t_{arribo}) = \gamma\ (t_l - t_{arribo}) = 3.500 * 1/4 = \$875$. De las dos maneras se tiene que llegar al mismo resultado. Para considerar bien la respuesta basta que lo hagan de una u otra manera.

5) Transporte público y subsidios. i) Ud. está preparando su oferta para la licitación del servicio, que consiste en expresar el subsidio por pasajero transportado. Estos son los parámetros con los que debe preparar su oferta. La demanda es de 960 pasajeros a la hora, uniformemente distribuida a lo largo del recorrido y cada pasajero recorre la mitad del recorrido –mismo modelo que el visto en clase. El intervalo exigido es un servicio de bus cada 5 minutos y el tiempo de ciclo es de 3 horas (los tiempos de ascenso y descenso son despreciables). Su función de costo por hora de un bus es ($C_0 + C_1$ K), donde K es capacidad del bus, C_0 = \$10.000 y C_1 = \$400. El precio del pasaje en bus a cobrar es igual a \$600. (Los valores de C0 y C1 incluyen el costo de oportunidad del capital más su costo del tiempo por gerenciar la operación, por lo que con estos dos valores tiene toda la información de costos necesaria para hacer su oferta). Con esta información, suponiendo que los buses viajan a capacidad y haciendo uso de las fórmulas para calcular la demanda y oferta de frecuencia, calcule la capacidad óptima y el subsidio requerido para cumplir con los parámetros solicitados y minimizar costos. (10% de la nota)

Respuesta:
Se exige una frecuencia de 12 servicios a la hora (un servicio cada cinco minutos). Para cumplir con la frecuencia, se requiere una capacidad de los buses igual a
K = ½ Y / f = 960 / (2 * 12) = 40 pax/bus.

Dado que los buses viajan a capacidad, se requieren (frecuencia * tiempo de ciclo = buses) **12 * 3 = 36 buses.**

Con ello el costo por hora por bus es **10.000 + 400 * 40 = \$26.000**.

El costo total por hora es **26.000 * 36 = \$936.000**.

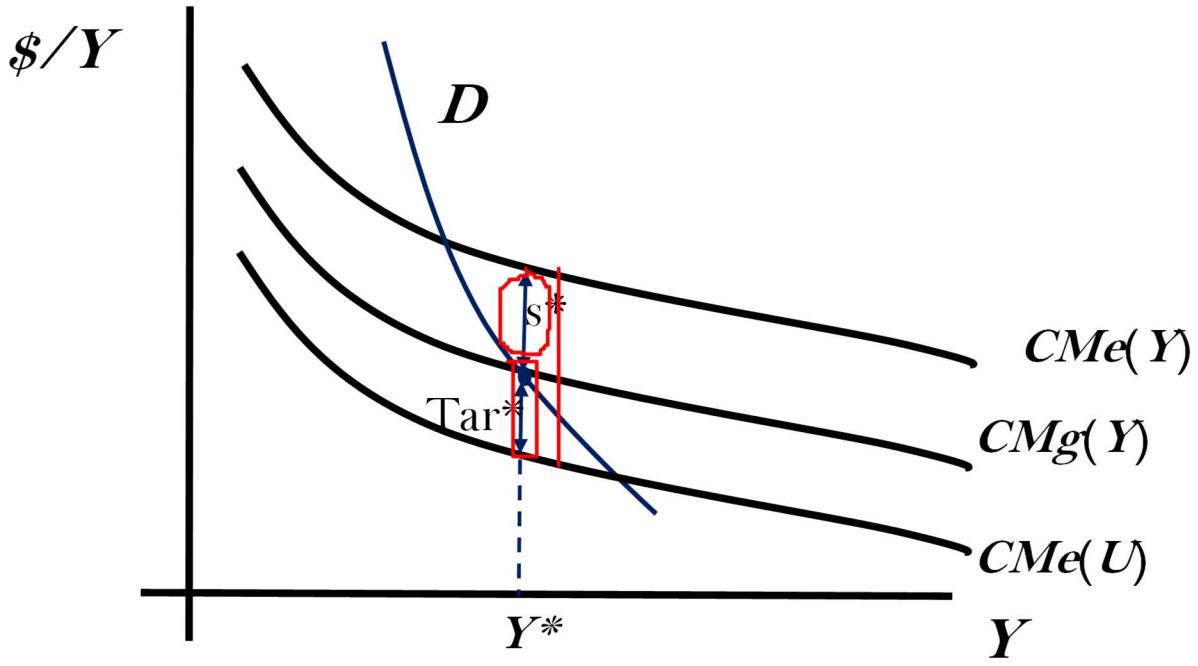
Por hora se recaudan **Y * tarifa = 960 * 600 = 576.000**.

Para cubrir el costo la tarifa técnica debe **\$975 (= 936.000 / 960)**.

Por lo tanto, el subsidio requerido es de **\$375 (= 975 – 600)** por pasajero.

6) Transporte público y subsidios. Considere el modelo básico visto en clase. i) Grafique la curva de costo medio por pasajero, la curva de costo marginal por pasajero y la curva de costo medio del usuario. Grafique también la curva de demanda. ii) En base a las tres curvas de costo y a la curva de demanda, explique cómo se determinan el subsidio óptimo y la tarifa óptima. Dibújelos en el gráfico, señalando el segmento que entrega el valor de la tarifa y el segmento que entrega el valor del subsidio por pasajero. Sea muy claro con su gráfico para tener el ejercicio bien. (12% de la nota)

Respuesta:



Cme(Y): costo medio por pasajero. Cmg(Y): costo marginal por pasajero. Cme(U): costo medio del usuario. La demanda óptima social es donde la curva de demanda corta la curva de costo marginal; es decir, Y*..

El segmento Tar = Cmg(Y) – Cme(U), para la demanda Y* entrega el valor de la tarifa y el subsidio (S) está dado por la diferencia vertical S = Cme(y) – Cmg(y) para el valor de Y*.

7) Transporte público y desregulación. i) Explique por qué un conductor de micro tiene poder de mercado, en un mercado de buses desregulado. ii) Explique en qué condiciones este poder de mercado lleva a tarifas de monopolio. iii) Explique por qué a pesar de la existencia de tarifas de monopolio, los ingresos extraordinarios se reducen a cero. (12% de la nota)

Respuesta: i) Si el servicio de bus se desregula y los micreros tiene libertad para fijar la tarifa, podrán ejercer poder de mercado. Al arribar a un paradero, el conductor puede subir el precio y aquellos pasajeros que tengan un alto valor de su tiempo de espera, preferirán abordar la micro antes que permanecer en el paradero esperando a una próxima micro de menor costo. ii) Si este comportamiento es adoptado por todos los micreros, no habrá una próxima micro de menor costo, la tarifa que cobrarán los micreros serán altas y los precios subirán hasta alcanzar el máximo precio posible, dado por el precio de monopolio, es decir el precio que maximiza la ganancia empresarial. iii) Ello genera ganancias extraordinarias e induce a otros agentes a entrar a la actividad. Así, la tasa de ocupación por micro disminuye, los costos por pasajero transportado aumentan, los márgenes de ganancia caen a cero y se acabará el incentivo a que nuevos operadores entren al mercado. Además, ello generará mayores externalidades negativas (contaminación, ruido, riesgo de accidentes).

8) Transporte público y desregulación. i) Plantee un modelo que permita determinar la probabilidad de que un pasajero deje pasar una micro de alto costo para esperar una próxima micro de bajo costo. Considere estas variables:
te: tiempo de espera promedio. Los intervalos entre micros distribuyen de manera exponencial.
P_w: valor subjetivo del tiempo de espera; $P_w > 0$
p_a: tarifa alta; p_b: tarifa baja
Pr_b: probabilidad de que arribe un bus de tarifa baja después de que haya arribado un bus de tarifa alta. (0.7)
ii) Suponga que i) la diferencia de precios entre p_a y p_b es \$500, ii) el tiempo de espera promedio es 5 minutos y iii) la probabilidad de que la próxima micro sea de precio bajo es 0,25. Determine el rango del valor del tiempo (en \$/min) de las personas que preferirán esperar la próxima micro antes que abordar la micro de precio alto. (0.3) (10% de la nota)

Respuesta:
i) Si llega al paradero una micro de tarifa alta, conviene dejarla pasar si se da esta relación entre las siguientes variables $p_a \geq P_w\ te + p_b\ Pr_b + p_a\ (1 - Pr_b) \Leftrightarrow P_w \leq (p_a - p_b)\ Pr_b / te$.
ii) $P_w \leq (p_a - p_b)\ Pr_b / te = 500 * 0{,}25 / 5 = 25$ \$ / min. Aquellas personas cuyo valor del tiempo de espera es inferior a 25 \$/min, dejarán pasar la micro.

9) Provisión de infraestructura vial y su financiamiento en Chile

i) a) Explique cuáles son las dos agencias gubernamentales más relevantes a nivel nacional en la provisión y mantenimiento de la infraestructura vial. Debe quedar claro el ámbito de acción de cada una de ellas. b) Explique además si estas agencias se financian a partir de cobros a usuarios o no y cómo ello afecta sus decisiones de inversión.

ii) Explique la diferencia entre el impuesto al combustible, el impuesto al NOX a los vehículos y el permiso de circulación. Explique también cómo afectan estos tres pagos el uso del vehículo. (8% de la nota)

Respuesta: i) El Ministerio de Vivienda y Urbanismo (MINVU) se encarga de la infraestructura vial a nivel urbano. La dirección de Vialidad, perteneciente al Ministerio de Obras Públicas (MOP), se encarga de la infraestructura vial a nivel interurbano. Tanto el MINVU como el MOP tienen un presupuesto asignado por Ley Nacional. En otras palabras, estas agencias no generan sus ingresos a partir de cobros a usuarios. Por lo tanto, sus criterios para invertir y mantener la infraestructura vial no están determinados en función de ingresos por ventas de servicios a usuarios, sino que por criterios administrativos o de evaluación social de proyectos. De esta manera, al no haber un vínculo directo entre el origen de los fondos y el destino de los mismos, se dice que no existe disciplina de mercado.

ii) El impuesto a los combustibles se paga en función directa del uso del auto, a más km circulados, mayor consumo de combustible, por lo tanto, mayor pago de impuesto al combustible. (Por otro lado, a mayor congestión, mayor consumo de combustible. Así, el impuesto al combustible se asemeja a una tarifa vial. Si esto en paréntesis no lo dicen, no importa). El impuesto al NOX se paga al comprar un vehículo, por lo tanto, no afecta el uso del vehículo sino la decisión de compra. El permiso de circulación se paga todos los años. Una vez más, este cobro es independiente del uso de vehículo. Si no se lo paga, no se puede conducir el vehículo.