Quinta Lista de Ejercicios – ICT 3103
Tarificación Vial y Tarifa de Ramsey

Ejercicio 1 Tarifa Ramsey

Deduzca la tarifa Ramsey a cobrar a los automovilistas cuando existen economías de escala crecientes en la construcción de vialidad. Deduzca también la regla de inversión óptima en vialidad.

Respuesta 1: Ver diapositiva clase 2_1_1

Ejercicio 2 Tarifa Ramsey

Explique conceptualmente que se entiende por Tarifa Ramsey.

Respuesta 2:

La Tarifa de Ramsey es una tarifa de segundo mejor, calculada para minimizar la pérdida de bienestar social cuando restringe a que la recaudación percibida se igual al costo de inversión den infraestructura. A demandas inelásticas, la cantidad de usuarios que viajan con la tarifa de Ramsey será inferior a la cantidad de usuarios que viajan en el óptimo social (sin restricción de igualdad de la recaudación con el costo de inversión en infraestructura), pero la tarifa será mayor, permitiendo que se cumpla el autofinanciamiento.

Ejercicio 3

Considere una empresa de transporte aéreo de bandera nacional que ofrece un conjunto de servicios x (x es un vector; se supone que la demanda de cada servicio solo depende de su propio precio). Suponga que el Ministerio de Hacienda le exige a esta empresa generar un superávit de recaudación igual a S. La función de Bienestar Social está dada por BS(x) = B(x) – C(x), donde B(x) es el beneficio al consumidor y C(x) el costo total de producción. La recaudación (R = px x) neta de costos debe ser igual a S. Suponga que todas las elasticidades cruzadas son iguales a cero.

i) Demuestre que la desviación proporcional del precio de cada servicio con respecto a su costo marginal está dada por esta ecuación:

$$\left(\frac{p_{x_i} - Cmg(x_i)}{p_{x_i}}\right) = -\frac{\lambda}{1+\lambda}\left(\frac{1}{\varepsilon_{x_i}^{p_i}}\right)$$

ii) Demuestre que si el valor del multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de superávit tiende hacia infinito, entonces, el precio a cobrar corresponde a la regla de precio de monopolio.

Respuesta 3:

i) La función de bienestar estará restringida al superávit, o sea que la recaudación debe superar los costos de producción. En ese caso, se puede escribir el Lagrangeano del problema de maximización del bienestar social en,

$$\mathcal{L} = B(x) - C(x) + \lambda(p_x x - C(x) - S)$$

Por la condición de primer orden con la demanda del servicio i, x_i

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = p_{x_i} - Cmg(x_i) + \lambda\left(p_{x_i}\left(\frac{1}{\varepsilon_{x_i}^{p_i}} + 1\right) - Cmg(x_i)\right) = 0$$

Ordenando los términos y solucionando algébricamente, se obtiene el resultado de la expresión,

$$\left(\frac{p_{x_i} - Cmg(x_i)}{p_{x_i}}\right) = -\frac{\lambda}{1+\lambda}\left(\frac{1}{\varepsilon_{x_i}^{p_i}}\right)$$

En otras palabas, la divergencia entre el precio y el costo marginal es mayor cuanto menor es la elasticidad precio de cada bien (o más inelástica es la demanda del bien). El valor λ representa el costo marginal social por cada peso

adicional de recaudación que se le exige a la empresa. Si λ tiende a cero, el precio de cada servicio será apenas superior a su costo marginal. Si λ tiende a infinito, se llega a los precios de monopolio).

Esta fórmula aplica también en el caso en que la producción de los servicios esté sujeta a economías de escala creciente y la empresa de transporte deba autofinanciarse (en este caso S = 0). Si se tarifica a costo marginal, se genera un déficit de recaudación. Por lo tanto, los precios deben desviarse de su costo marginal según la ecuación descrita a los efectos de lograr una recaudación que cubra los costos de operación y capital de la empresa tal que el bienestar social disminuya lo menos posible.

Esta regla para determinar precios óptimos que divergen de los costos marginales recibe el nombre de precios Ramsey o precios segundo mejor.

iii) Algébricamente se puede obtener que si λ tiende a infinito, se obtiene la tarifa de monopolio

$$\left(\frac{p_{x_i} - Cmg(x_i)}{p_{x_i}}\right) = -\left(\frac{1}{\varepsilon_{x_i}^{p_i}}\right)$$

Ejercicio 4

Deduzca una expresión para determinar el beneficio marginal de expandir la infraestructura vial en caso de que no exista tarificación vial. Una vez deducida esta expresión, determine el beneficio marginal de expandir la vialidad si la elasticidad de la demanda con respecto a la provisión de infraestructura vial es 1 (uno). En otras palabras, la demanda inducida es tal que la relación demanda-capacidad se mantiene constante ante un aumento de la capacidad.

Respuesta 4: Ver diapositiva clase 2_1_1 (39 a 42)

Ejercicio 5

Considere la función de demanda inversa p(q) para un viaje entre un par OD. Suponga la existencia de dos rutas que permiten realizar el viaje, cada una de ellas con costo medio percibido ci(qi, ki) (i = 1, 2) (q = q1 + q2; q: demanda total, qi: demanda ruta i; ki: capacidad vial ruta i). El costo de la infraestructura para cada ruta está dado por la función ρ(ki) (i = 1, 2).

Plantee el problema de máximo bienestar social.

a) Derive la condición de primer orden con respecto a qi (i = 1, 2).

b) Deduzca la ecuación que establece la tarifa vial igual al costo marginal social de congestión.

c) Derive la condición de primer orden con respecto a ki (i = 1, 2) y determine la regla de inversión óptima.

Suponga que solo se puede tarificar la Ruta 1. Ello implica colocar la siguiente restricción en el problema de maximización de bienestar social , cuyo significado es que el costo de viajar ha de ser igual al costo medio percibido de viaje en la Ruta 2.

a) Determine la tarifa óptima segunda mejor a cobrar en la Ruta 1. Para ello derive la función de bienestar social con restricción con respecto a q1 y q2, despeje el valor del multiplicador de Lagrange en la condición de primer orden correspondiente a q2 y reemplace en la condición de primer orden correspondiente a q1.

b) Demuestre que si la demanda es infinitamente elástica, la tarifa a cobrar en la Ruta 1 es la que corresponde a la solución primera mejor.

c) Demuestre que si la demanda es infinitamente inelástica, la tarifa a cobrar en la Ruta 1 es igual a la diferencia de la externalidad de congestión entre la Ruta 1 y la Ruta 2. Explique en qué caso esta tarifa sería un subsidio.

d) por último deduzca la regla de inversión óptima para cada ruta.

Respuesta 5:

El problema de bienestar social está dado por:

$$BS = \int_o^q p(x)dx \; - \; q_1 C_1(q_1, k_1) - q_2 C_2(q_2, k_2) - \rho(k_1) - \rho(k_2)$$

a) Las condiciones de primer orden son, siendo el último término de cada ecuación la tarifa cobrada en cada ruta que está asociada al óptimo del bienestar social

$$\frac{\partial BS}{\partial q_1} = \; p(q) - \; C_1(q_1, k_1) - q_1 \frac{\partial C_1(q_1, k_1)}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial BS}{\partial q_2} = p(q) - C_2(q_2, k_2) - q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2} = 0$$

b) Deduzca la ecuación que establece la tarifa vial igual al costo marginal social de congestión.

$$T_1 = q_1 \frac{\partial C_1(q_1, k_1)}{\partial q_1}$$
$$T_2 = q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2}$$

c) Obteniendo la condición de primer orden en relación a k_1 y k_2, se obtiene las reglas de inversión óptima. Se invierte en capacidad en la vía 1, hasta el que costo marginal por invertir en capacidad se iguale al beneficio marginal por descongestión en la vía 1. Análogamente para la vía 2.

$$\frac{\partial BS}{\partial k_1} = -q_1 \frac{\partial C_1(q_1, k_1)}{\partial k_1} - \frac{\partial \rho}{\partial k_1} = 0$$
$$\frac{\partial BS}{\partial k_2} = -q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial k_2} - \frac{\partial \rho}{\partial k_2} = 0$$

Para el segundo caso, cuando solo se puede tarificar la vía 1, a la función de beneficio social agregamos la restricción de que el costo debe ser igual al costo medio de la vía 2 (ya que esta no recibirá tarificación).

$$BS = \int_o^q p(x)dx - q_1 C_1(q_1, k_1) - q_2 C_2(q_2, k_2) - \rho(k_1) - \rho(k_2) + \lambda(p(q) - C_2(q_2, k_2))$$

Obteniendo las condiciones de primer orden, tenemos que:

$$\frac{\partial BS}{\partial q_1} = p(q) - C_1(q_1, k_1) - q_1 \frac{\partial C_1(q_1, k_1)}{\partial q_1} + \lambda \frac{\partial p}{\partial q_1} = 0$$
$$\frac{\partial BS}{\partial q_2} = p(q) - C_2(q_2, k_2) - q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2} + \lambda \left(\frac{\partial p}{\partial q_2} - \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2} \right) = 0$$

Recordando que la tarifa cobrada en 1, $T_1 = p(q) - C_1(q_1, k_1)$ que es son los primeros términos de la primera condición.

$$T_1 = p(q) - C_1(q_1, k_1) = q_1 \frac{\partial C_1(q_1, k_1)}{\partial q_1} - \lambda \frac{\partial p}{\partial q_1}$$

Desde la segunda condición de primer orden, y sabiendo que la ruta 2 no tiene tarificación por lo que $p(q) - C_2(q_2, k_2) = 0$, obtenemos que:

$$\lambda \left(\frac{\partial p}{\partial q_2} - \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2} \right) = q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2}$$

$$\lambda = \frac{q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2}}{\left(\frac{\partial p}{\partial q_2} - \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2} \right)}$$

Entonces,

$$T_1 = q_1 \frac{\partial C_1(q_1, k_1)}{\partial q_1} + \frac{q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2} \frac{\partial p}{\partial q_1}}{\left(\frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2} - \frac{\partial p}{\partial q_2} \right)}$$

Podemos escribir que:

$$T_1 = q_1 \frac{\partial C_1(q_1, k_1)}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2} \frac{1}{\left(\frac{\frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial q_2}}{\frac{\partial p}{\partial q}} - 1 \right)}$$

La tarifa cuando solo una ruta es tarificada será la tarifa del óptimo social para esta ruta más un descuento que depende de la tarifa de primer mejor para la ruta 2, por un factor asociado a cuánto la ruta 2 está congestionada y la elasticidad de la demanda.

b) Si la tarifa es infinitamente elástica, entonces $\frac{\partial p}{\partial q} \to 0$, luego el segundo término tiende a 0 y la tarifa cobrada es la de primer mejor
c) Si la tarifa es infinitamente inelástica, entonces $\frac{\partial p}{\partial q} \to \infty$, luego el segundo término tiende a -1 y la tarifa cobrada es la diferencia de las tarifas de primer mejor de la ruta 1 y la ruta 2.
d) Para deducir la regla de inversión, obtenemos las condiciones de primer orden en relación a la capacidad,

$$\frac{\partial BS}{\partial k_1} = -q_1 \frac{\partial C_1(q_1, k_1)}{\partial k_1} - \frac{\partial \rho}{\partial k_1} = 0$$

$$\frac{\partial BS}{\partial k_2} = -q_2 \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial k_2} - \frac{\partial \rho}{\partial k_2} - \lambda \frac{\partial C_2(q_2, k_2)}{\partial k_2} = 0$$

Ejercicio 6 Viajes par OD

Suponga que se está considerando construir un trayecto de más de 1.000km de largo. Dado que el Estado no cuenta con recursos para financiar la construcción, el asesor del Ministro de Transporte le recomienda a este dividir la ruta en tres bloques y que cada uno de ellos sea construido y operado por una empresa maximizadora de beneficios. Suponga además que no hay forma legal factible que permita regular los precios. ¿Es esta recomendación del asesor una buena idea?

Respuesta 6:

No es una buena idea, si no hay una forma que permita regular los precios, los operadores establecerán una tarifa que maximiza su beneficio (recaudación menos costos) que será superior a la tarifa en base al óptimo social.

Ejercicio 7 Ecuación Monopolista

Determine la ecuación con la que el monopolista establece la tarifa vial. Explique el resultado.

Respuesta 7: ver apuntes de clase 2_1_1

Ejercicio 8 Monopolio

Considere el transporte entre un par OD. i) Explique qué ocurre cuando existe una sola ruta operada por una empresa maximizadora de beneficios. ii) Explique el beneficio de incorporar nuevos operadores que puedan gestionar nuevas rutas.

Respuesta 8:

En i) existe un monopolio, el operador tiene total poder de mercado, y la tarifa será aquella que maximiza los beneficios del operador será mayor a la tarifa óptima social. Al agregar nuevos operadores y rutas, se reduce el poder de mercado de cada uno de ellos y en competencia las tarifas se acercarán a la tarifa óptima social a medida que crece la cantidad de operadores.

Ejercicio 9 Tarificación por Infraestructura Vial

Considere la función de demanda inversa lineal de viajes entre un par OD: p(q) =A - B q. Se puede viajar por dos rutas, tal que q = q1 + q2. Las funciones de costo medio percibido para la Ruta 1 y la Ruta 2 son respectivamente CMe1 = a1 + b1 q1^2 y CMe2 = a2 + b2 q2^2. Solo se puede tarificar la Ruta 1; la Ruta 2 no cobra tarifa.

i) Obtenga la tarifa segunda mejor para la Ruta 1, bajo las condiciones del enunciado. Para ello plantee un problema matemático de maximización, obtenga las condiciones de primer orden y resuelva algebraicamente.
ii) Obtenga la tarifa que maximiza el ingreso del operador de la Ruta 1, bajo las condiciones del enunciado. Para ello plantee un problema matemático de maximización, obtenga las condiciones de primer orden y resuelva algebraicamente.
i) Explique las diferencias entre ambas tarifas.

Respuesta 9:

i) El beneficio social se escribe como,

$$BS = \int_0^{q_1+q_2}(A - Bx)dx - q_1(a_1 + b_1 {q_1}^2) - q_2(a_2 + b_2 {q_2}^2) + \\ + \lambda((A - B(q_1 + q_2) - (a_2 + b_2 {q_2}^2))$$

Obteniendo las condiciones de primer orden,

$$\frac{\partial BS}{\partial q_1} = T_1 - 2b_1 {q_1}^2 - \lambda B = 0$$

$$T_1 = 2b_1 {q_1}^2 + \lambda B$$

y,

$$\frac{\partial BS}{\partial q_2} = -2b_2 {q_2}^2 - \lambda(B + 2b_2 q_2) = 0$$

$$\lambda = \frac{-2b_2 {q_2}^2}{B + 2b_2 q_2}$$

Luego,

$$T_1 = 2b_1 {q_1}^2 + \lambda B = 2b_1 {q_1}^2 - \frac{2Bb_2 {q_2}^2}{B + 2b_2 q_2}$$

ii) Ahora se maximiza el beneficio del operador,

$$Be = \left[(A - Bx)dx - (a_1 + b_1 {q_1}^2)\right]q_1 + \lambda((A - B(q_1 + q_2) - (a_2 + b_2 {q_2}^2))$$

Las condiciones de primer orden son,

$$\frac{\partial Be}{\partial q_1} = T_1 - Bq_1 - 2b_1 {q_1}^2 - \lambda B = 0$$
$$\frac{\partial Be}{\partial q_2} = -Bq_1 - \lambda(B + 2b_2 q_2) = 0$$

La tarifa en 1 será entonces igual a,

$$T_1 = 2b_1 {q_1}^2 + \frac{2Bq_1 q_2}{B + 2b_2 q_2}$$

iii) Ambas tarifa parten de la tarifa de primer mejor en 1 si ambas rutas estuvieran tarifadas. La tarifa óptima social en i) considera un descuento, luego la tarifa será menor a la tarifa de primer mejor. Ya la tarifa monopolista en ii) considera un adicional, alejando la tarifa al óptimo social.

Ejercicio 10 Tarificación por Infraestructura Vial

Considere la función de demanda inversa lineal de viajes entre un par OD: p(q) =A - B q. La función de costo medio percibido es = a + b q. Suponga que B = b y que A>>a.

i) Obtenga la tarifa que maximiza el bienestar social. Para ello plantee un problema matemático de maximización, obtenga las condiciones de primer orden y resuelva algebraicamente. (Así encontrará el valor q óptimo. Reemplace este valor en la función de demanda inversa para obtener la máxima disposición al pago de los usuarios. A continuación, reemplace el valor de q en la función de costo medio y por último reste el costo medio a la máxima disposición al pago para obtener la tarifa.)

ii) Obtenga la tarifa de monopolio que maximiza el ingreso del operador de la Ruta. Para ello plantee un problema matemático de maximización, obtenga las condiciones de primer orden y resuelva algebraicamente, tal como se le indicó en el punto i.

iii) Obtenga el valor de q que corresponde a la tarificación Ramsey si la recaudación (tarifa_ramsey * demanda, o t*q) ha de ser mayor igual a un valor C. En este caso, Ud. debe maximizar la función de bienestar social con la respectiva restricción, obtener el valor de q óptimo y demostrar que si lambda tiende a 0 se obtiene el valor de la demanda en i) y que si lambda tiende a infinito, se obtiene el valor de la demanda en ii).

Respuesta 10:

$$Bs = \int_0^q (A - Bx)dx - (a + bq)q$$

La condición de primer orden será,

$$\frac{\partial Bs}{\partial q} = (A - Bq) - (a + bq) - bq = 0$$

Luego la cantidad de usuarios que maximiza el bienestar social será,

$$q = \frac{A - a}{B + 2b}$$

Remplazando en la curva de demanda,

$$p(q) = A - B\frac{A-a}{B+2b}$$

La tarifa será la diferencia entre el precio en equilibrio menos el costo en equilibrio,

$$T = A - B\frac{A-a}{B+2b} - a - b\frac{A-a}{B+2b}$$

$$T = A - a - (b+B)\frac{A-a}{B+2b}$$

Entonces si B=b,

$$T = \frac{A-a}{3}$$

ii) Ahora se maximiza el beneficio del operador,

$$Be = [(A - Bq) - (a + bq)]q$$

$$\frac{\partial Be}{\partial q} = (A - Bq) - (a + bq) - (B + b)q = 0$$

$$q = \frac{A-a}{2(B+b)}$$

$$p(q) = A - B\frac{A-a}{2(B+b)}$$

$$T = A - B\frac{A-a}{2(B+b)} - a - b\frac{A-a}{2(B+b)}$$

$$T = \frac{A-a}{2}$$

iii) Ahora a la función de bienestar social será,

$$Bs = \int_0^q (A - Bx)dx - (a + bq)q + \lambda([(A - Bq) - (a + bq)]q - C)$$

$$\frac{\partial Bs}{\partial q} = (A - Bq) - (a + bq) - bq - \lambda[(A - Bq) - (a + bq) - Bq - bq] = 0$$

Luego, la cantidad de usuarios en equilibrio con tarifa Ramsey será,

$$q = \frac{A - a - \lambda(A - a)}{B + 2b - \lambda(2B + 2b)}$$

En la curva de demanda el precio será,

$$p(q) = A - B\frac{A - a - \lambda(A - a)}{B + 2b - \lambda(2B + 2b)}$$

Y la tarifa será,

$$T = A - B\frac{A - a - \lambda(A - a)}{B + 2b - \lambda(2B + 2b)} - a - b\frac{A - a - \lambda(A - a)}{B + 2b - \lambda(2B + 2b)}$$

$$T = A - a - (B + b)\frac{A - a - \lambda(A - a)}{B + 2b - \lambda(2B + 2b)}$$

Si $\lambda = 0$, entonces, tenemos el caso del óptimo social sin restricción de Ramsey,

$$T = \frac{A - a}{3}$$

Si λ tiende a infinito, entonces tenemos el caso del óptimo social sin restricción de Ramsey,

$$T = A - a - (B + b)\frac{A - a}{B + 2b - \lambda(2B + 2b)} + (B + b)\frac{(A - a)}{\frac{B + 2b}{\lambda} - (2B + 2b)}$$

$$T = \frac{A - a}{2}$$