3 de diciembre de 2025

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO INGENIERIA DE TRANSPORTE Y LOGISTICA
ICT3103 ECONOMIA DE TRANSPORTE - 2º SEMESTRE 2025
EXAMEN

Si usted no va a reemplazar la nota de ninguna de las dos interrogaciones, debe responder la Sección I. Si usted quiere reemplazar la nota de la I1, debe responder la Sección I y la Sección II; si quiere reemplazar la nota de la I2, debe responder la Sección I y la Sección III.

Si usted decide reemplazar alguna de las interrogaciones, la nota del examen pondera la nota de la Sección I por 0,80 y la nota de la otra sección, por 0,20. Si decide reemplazar la nota y obtiene una nota inferior a la de la interrogación reemplazada, esta retiene su nota previa.

Para responder la sección I del examen, dispone de *una hora cincuenta minutos*.

Para responder la sección II o la sección III del examen, dispone de *cincuenta minutos*.

Indicaciones: i) Sus respuestas tienen que ser autocontenidas, nada se dará por sobrentendido al corregir; sea conciso y preciso; ii) cuando dice explicar, debe proveer un argumento que justifique de manera adecuada su respuesta haciendo uso de los contenidos aprendidos en el curso; iii) en los desarrollos matemáticos, debe explicarse la notación utilizada. Ídem si hace gráficos. iv) Todas las preguntas deben ser respondidas de puño y letra. v) En paréntesis figura el puntaje de cada pregunta.

Sección I

1) Modelo de Asignación de tiempo a actividades y valor del tiempo de viaje. i) Según el modelo de asignación de tiempo a actividades visto en clase, explique la diferencia entre una actividad de ocio y una actividad necesaria o derivada. ii) Explique las dos componentes de beneficio por reducir tiempo dedicado a actividades consideradas necesarias, como ser viajar. (10% de la nota)

Respuesta: i) En estos modelos se tiene una restricción de tiempo mínimo a dedicar a actividades. Cuando se le dedica a una actividad el tiempo mínimo, ello activa la restricción correspondiente. Esto significa que el consumidor preferiría dedicar menos tiempo a la actividad de ser posible. Estas son actividades derivadas o necesarias. Caso contrario, la respectiva restricción no se activa; por lo tanto, en el margen el consumidor obtiene la mayor utilidad posible en cuanto a asignación de tiempo a actividades. Estas actividades son de ocio. ii) Al reducir el tiempo a dedicar a viajar, existe un doble beneficio. Por un lado, se reduce el tiempo dedicado a viajar que entrega desutilidad (o al menos menor utilidad que el ocio); por otro lado, se libera tiempo para dedicar a actividades que entregan mayor utilidad en el margen.

2) Beneficios por mejoras en el sistema de transporte. En evaluación social de proyectos de transporte, considere esta función de utilidad social $BS = \sum_i a_i V_i(p, q_i, I - c_i)$
donde V: función de utilidad indirecta individual y a_i: ponderador social de la utilidad del individuo i. BS es una suma ponderada de funciones de utilidad individuales.
Explique qué diferentes resultados se obtienen al evaluar proyectos de transporte que ahorran tiempo de viaje si i) el ponderador social individual está relacionado con la utilidad marginal del ingreso según está fórmula: $\mathbf{a_i \lambda_i = 1} \ \forall \ i$; ii) el ponderador social es idéntico para todas las personas, tal que $\mathbf{a_i = 1} \ \forall \ i$. (8% de la nota)

Respuesta: i) Considerar un ponderador inversamente proporcional a la utilidad marginal del ingreso implica entregar mayor peso a los individuos con menor utilidad marginal, que son aquellos que perciben mayores ingresos. Por lo tanto, evaluar proyectos con ese ponderador entregará mayor beneficio a los proyectos que reduzcan los tiempos de viajes de la población de mayores ingresos, en detrimento de quienes tienen menores ingreso.

ii) Considerar que el ponderador social es idéntico para todos, implica un enfoque igualitario y todos los individuos tienen mismo peso en la función de utilidad social. Evaluar proyectos bajo este enfoque no es en función de la capacidad de pago de las personas beneficiadas, sino que en función de la ganancia de utilidad que estas reducciones en tiempo generan.

3) Comercio Interregional I. Explique qué supuesto debe hacerse para que los beneficios medidos bajo la curva de demanda agregada de transporte de carga entre regiones sean exactamente iguales a los beneficios que experimentan los consumidores y productores de bienes finales en los mercados de exportación e importación. (5% de la nota)

Respuesta: El supuesto que debe hacerse para que se cumpla la igualdad mencionada en el enunciado es que los productores-vendedores de los bienes transados aguas abajo no tengan poder de mercado.

4) **Comercio Interregional II.** Considere el típico modelo visto en clase, donde la Región 2 produce un bien de consumo a menor precio que la Región 1. Ello genera una oportunidad de exportación para los productores en la Región 2. Ud. sabe el efecto que ello tiene sobre los niveles de producción y los precios de equilibrio en ambas regiones. Explique qué diferencia genera que la región exportadora coloque un impuesto a la exportación o que la región importadora coloque un impuesto a las importaciones, ambos de igual magnitud. En su explicación debe quedar bien claro que efecto esto tiene sobre el bienestar de los productores en ambas regiones, el bienestar de los consumidores en ambas regiones y la recaudación de los gobiernos en ambas regiones. Si Ud. tiene los conceptos claros no es necesario hacer ningún gráfico para responder. (5% de la nota)

Respuesta: Desde el punto de vista de productores y consumidores, las dos situaciones llevan al mismo estado de situación. En otras palabras, se observarían los mismos niveles de producción, los mismos niveles de consumo e idénticos precios, en ambos mercados. Desde el punto de vista impositivo, lo que cambia es que gobierno obtiene los ingresos. En el primer caso, quien cobrar el impuesto es la región exportadora; en el segundo caso, la región importadora.

5) **Transporte privado I.** Suponga que se cumplen los supuestos del teorema de Mohring – Harvitz (teorema de autofinanciamiento) en la provisión de infraestructura vial. Con relación a la provisión de infraestructura vial, explique que significa que una empresa que cobre la tarifa óptima social obtenga beneficios extraordinarios (beneficios que superan los beneficios normales), beneficios normales (recupera la inversión más el costo de oportunidad del capital) o pérdidas (no alcanza a recupera la inversión más el costo de oportunidad del capital). (7% de la nota)

Respuesta:
En el primer caso, tarifa óptima social es el reflejo de un alto costo marginal externo de la congestión; por lo tanto, debe construirse mayor infraestructura vial. En el segundo caso, el nivel de inversión en infraestructura vial está en el óptimo social. En el tercer caso, la tarifa no alcanza a cubrir los costos; por lo tanto, hay un exceso de inversión en infraestructura vial. Debería disminuir la provisión de vialidad.

6) **Transporte privado II.** En el modelo de cuello de botella, explique qué se lograr al introducir una tarifa dinámica a costo marginal social, con relación a los (costos por) tiempos de viaje y (los costos por) llegada temprana o tardía. (7% de la nota)

Respuesta:
En el modelo de cogestión de cuello de botella, al introducir tarificación dinámica se logra reducir a cero los tiempos de espera en el cuello de botella, reduciendo a cero los costos sociales por tiempo de viaje en congestión. Lo que no se puede afectar en absoluto son los tiempos de llegada, por lo que los costos por arribos tempranos y arribos tardíos no se alteran en absoluto.

7) Transporte público. Explique estos dos motivos para subsidiar el transporte público: efecto Mohring y ausencia de tarificación via. (8 % de la nota)

Respuesta:

i) El efecto Mohring se refiere al fenómeno que, al crecer la demanda de transporte público, ha de proveerse una mayor frecuencia de servicio y, por lo tanto, disminuyen los tiempos de espera y de viaje. En otras palabras, un pasajero adicional hace que disminuya el tiempo de espera y de viaje de todos los demás pasajeros. Esto genera una externalidad positiva que no le permite al operador recuperar sus costos. Por ello es necesario, el subsidio.

ii) La ausencia de tarificación vial: en este caso, los automovilistas incurren en un costo igual a su costo medio percibido e ignoran los costos externos que generan al resto de los automovilistas. En este caso, el subsidio al transporte público hace bajar su precio, volviéndolo más atractivo. Con ello, el transporte público se vuelve más competitivo frente al uso del automóvil y menos gente haría uso del auto, reduciendo la externalidad de congestión.

8) Teoría de la firma multiproducto. Considere esta función de costo de producción para los productos Y_1 e Y_2, para una empresa multiproducto y para dos empresas que producen solo uno de los dos bienes:

$$CT(Y_1;Y_2) = C_0 Y_1^{0,5} Y_2^{0,5} + C_1 Y_1 + C_2 Y_2 - C_3 Y_1 Y_2$$
$$CT(Y_1) = C_1 Y_1$$
$$CT(Y_2) = C_2 Y_2$$

i) Calcule las economías de escala radiales para la función de producción multiproducto.
ii) Calcule las economías de diversidad para producción conjunta de ambos bienes. Explique qué valores deben conocerse para determinar si existen o no economías de diversidad. (10% de la nota)

Respuesta: i)

$$s^{radial} = \frac{C(\lambda y)}{\lambda \frac{\partial C(\lambda y)}{\partial \lambda}} = \frac{C_0(\lambda Y)_1^{0,5}(\lambda Y)_2^{0,5} + C_1 \lambda Y_1 + C_2 \lambda Y_2 - C_3 \lambda Y_1 \lambda Y_2}{\lambda\left(C_0 Y_1^{0,5} Y_2^{0,5} + C_1 Y_1 - C_2 Y_2 + 2C_3 \lambda Y_1 Y_2\right)}$$

$$s^{radial} = \frac{C(\lambda y)}{\lambda \frac{\partial C(\lambda y)}{\partial \lambda}} = \frac{C_0 Y_1^{0,5} Y_2^{0,5} + C_1 Y_1 + C_2 Y_2 - C_3 \lambda Y_1 Y_2}{C_0 Y_1^{0,5} Y_2^{0,5} + C_1 Y_1 + C_2 Y_2 - 2C_3 \lambda Y_1 Y_2} > 1$$

$S^{radial} > 1$; por lo tanto, existen economías de escala radiales crecientes.

ii) $$Div = \frac{C_1 Y_1 + C_2 Y_2 - C_0 Y_1^{0,5} Y_2^{0,5} - C_1 Y_1 - C_2 Y_2 + C_3 Y_1 Y_2}{C_0 Y_1^{0,5} Y_2^{0,5} + C_1 Y_1 + C_2 Y_2 - C_3 Y_1 Y} = \frac{-C_0 Y_1^{0,5} Y_2^{0,5} + C_3 Y_1 Y_2}{C_0 Y_1^{0,5} Y_2^{0,5} + C_1 Y_1 + C_2 Y_2 - C_3 Y_1 Y}$$

Las economías de diversidad dependerán del valor de esta expresión: $-C_0 Y_1^{0,5} Y_2^{0,5} + C_3 Y_1 Y_2$. En otras palabras, depende de los valores de los parámetros C_0, C_3 y de los niveles de producción Y_1 e Y_2. Si la expresión es positiva conviene producir de manera conjunta; de lo contrario, no.

9) Circuito cíclico simple. Considere está fórmula de costos para el circuito cíclico simple:

$$C(y_{12}; y_{21}) = C_0 + y_{12}(d_{12} + d_{21})\Lambda + (y_{12} + y_{21})Z$$

y se refiere a cantidades transportadas y *d* a distancias viajadas. Los términos Λ y Z no dependen ni de *y* ni de *d*. Suponga mayor traslado de carga en la dirección de ida, la dirección 1→2; la dirección contraria es la dirección de retorno. i) Explique el significado de cada uno de los sumandos de la fórmula de costos. ii) Calcule el costo marginal del transporte de carga en la dirección de ida y en la dirección de retorno. iii) Explique por qué estos costos marginales son diferentes. iv) Explique qué costo es no atribuible. v) Determine el costo medio incremental de transportar y_{21} y compárelo con su costo marginal. (12% de la nota).

Respuesta:
i) C_0 representa los costos fijos. El segundo sumando representa los costos de transporte y depende la cantidad de viajes determinados según la dirección de mayor carga. El tercer sumando entrega los costos de carga y descarga de toda la carga transportada en ambas direcciones.
ii) En la dirección de ida el costo marginal es $(d_{12} + d_{21})\ \Lambda + Z$ y en la dirección de vuelta es simplemente Z.
iii) La frecuencia de viaje depende de la dirección en la que haya mayor transporte. Por lo tanto, en la dirección de retorno el costo marginal es solo el costo de la carga y la descarga, dado que el costo marginal de mover el camión ya está cubierto por el viaje en la dirección de ida.
iv) Los costos fijos son atribuibles a ambos bienes de manera conjunta, pero no pueden dividirse de manera exacta entre la producción de un bien u otro en función de causa - efecto. Por lo tanto, es un costo no atribuible.
v) $C_0 + y_{12}(d_{12} + d_{21})\Lambda + (y_{12} + y_{21})Z - C_0 + y_{12}(d_{12} + d_{21})\Lambda + y_{12}Z = y_{21}Z$ = Costo Incremental. Por lo tanto, el costo medio incremental es igual a Z, igual al costo marginal de mover carga en la dirección 21.

10) Circuito cíclico simple. Un operador posee una flota operativa de 20 vehículos, con una capacidad de transporte de 25 toneladas cada uno. Este operador debe cubrir demandas entre dos puntos separados por 400 kilómetros. La capacidad de transferencia de los sitios de carga / descarga es 20 ton/h-sitio. La velocidad máxima permitida de circulación en ruta es 80 km/h. Los tiempos de viaje y de carga / descarga son determinísticos y las frecuencias de los despachos, equiespaciadas. (12% de la nota)

i) Determine numéricamente la máxima carga que puede viajar de forma simultánea en ambas direcciones. (0,34)

ii) Determine numéricamente la cantidad de sitios de transferencia de carga que se necesita en cada terminal. (Redondee al entero superior.) (0,66)

Tenga presente que

$$y_{21} = \frac{F \cdot \mu}{2} - y_{12}\left(1 + \frac{\mu(d_{12} + d_{21})}{2Kv}\right), \text{ si } y_{12} > y_{12}$$

y_{12} y y_{21}: carga transportada en ambas direcciones respectivamente. F: tamaño de la flota de camiones; μ: tasa de atención de cada sitio de transferencia. d_{12} y d_{21}: distancia viajada en ambas direcciones respectivamente. K: capacidad de carga del camión en tn. *v*: velocidad de circulación.

Sugerencia: resuelva las expresiones $\frac{F \cdot \mu}{2}$ y $1 + \frac{\mu(d_{12}+d_{21})}{2Kv}$ al comienzo y lleve cada una de ellas como un simple número para resolver el ejercicio.

Respuesta: $\frac{F \cdot \mu}{2} = \frac{20 \cdot 20}{2} = 200$ y $1 + \frac{\mu(d_{12}+d_{21})}{2Kv} = 1 + \frac{20.800}{2.25.80} = 5$. i) Así, $y = 200 - 5y$. Al resolver se obtiene 6 $y = 200 \Leftrightarrow y = 200/6 = 33{,}33$. Se puede transportar en ambas direcciones simultáneamente 33,33tn por hora.

ii) Con los parámetros del problema, el tiempo de ciclo es 800/80 + 2 * 25 /20 + 2 * 25 / 20 = 10 + 4 * 25 / 20 = 10 + 5 = 15. El tiempo de ciclo son 15 horas. Si los camiones llegan equiespaciados, arriban por hora 20 / 15 = 1,33 camiones a cada nodo. Cada camión, en un sitio de transferencia, requiere estar el tiempo de descarga y carga, ello es 25/20 + 25/20 = 2,5 horas. Según la ecuación de Little, multiplicando este tiempo por la tasa de arribos por hora (1,33 * 2,5) obtenemos el número de sitios de transferencia que se requieren en cada nodo. Este valor redondeado al entero superior es igual a 4. En total, el circuito cíclico simple requiere 8 sitios de transferencia.

11) **Inversión y tarificación de Terminales - Teorema de Autofinanciamiento.** Explique cada una de las condiciones necesarias para que se cumpla el teorema de Mohring-Harwitz de autofinanciamiento en la operación de un terminal de transporte. Debe enumerar y explicar cada una de las condiciones (las tres ya conocidas y la cuarta condición que se suma al considerar este tópico en particular). (8% de la nota)

Respuesta:
Deben cumplirse las condiciones de i) infraestructura perfectamente divisible (es decir, el tamaño del terminal puede ser cualquier número entero positivo), ii) economías de escala constantes en la construcción del terminal (es decir, si se construye en terminal que duplica en tamaño a otro, los costos totales de construcción se duplican) y iii) homogeneidad de grado cero en la función de demoras en los atributos flujo y capacidad (es decir, si aumentan en la misma proporción el flujo de aviones o buses a atender y la capacidad del terminal, las demoras se mantienen constantes). Además, debe cumplirse que en el mercado aguas abajo de provisión de servicios de transporte, la estructura de mercado sea de competencia perfecta, es decir, que ninguna empresa pueda ejercer poder de mercado.

12) **Inversión y tarificación de Terminales.** Suponga un operador aeroportuario que maximiza el bienestar social y un mercado de aerolíneas competitivo aguas abajo. Explique que tarifa cobran las empresas aéreas aguas abajo. En función de ello, explique qué elementos debe incorporar la tarifa aeroportuaria a fin de maximizar el bienestar social. (8% de la nota)

Respuesta:
La tarifa que maximiza el bienestar social debe incorporar el costo por movimiento de avión más el costo de congestión que genera cada aeronave, que no está incorporado en el costo del billete aéreo puesto que aguas abajo las aerolíneas cobran solo su costo de operación más el traslado del costo de la tarifa aeroportuaria. Dicho de otra manera, como las aerolíneas operan en un mercado competitivo, no tienen capacidad de internalizar el costo de la congestión aeroportuaria.

Sección II

13) Modelo de Train y McFadden. Considere un modelo en el que el tiempo de viaje y el tiempo dedicado a trabajar no forman parte de la función de utilidad. En este modelo, el consumidor elige cuánto tiempo dedicar al ocio y al trabajo, siendo el tiempo de viaje fijo. (34% de la nota)

$Max_{\{t_w\}}: U_i = U(X, T_o)$
$s.a$
$X = I + wt_w - c$
$T_o = T - t_w - tv$

X: gasto en consumo; T_o: tiempo de ocio; I: ingreso fijo exógeno; w: tasa salarial; t_w: horas de trabajo; T: tiempo total; c: costo de viaje; tv: tiempo de viaje.

i) Determine el valor del tiempo de ocio. Explique el resultado obtenido. ii) Determine el valor subjetivo del ahorro de tiempo de viaje. Explique el resultado obtenido.

Respuesta: i) Reemplazando las dos restricciones (X y T_o) en la función de utilidad directa se obtiene

U(I + w * tw – c; T x– tw – Tv)

Procediendo a derivar con respecto al tiempo de trabajo tw e igualando a cero, se obtiene la condición de primer orden. Operando sobre la condición de primer orden se obtiene el siguiente resultado:

$\frac{\partial U}{\partial X} w = \frac{\partial U}{\partial T_o} \Leftrightarrow \frac{\frac{\partial U}{\partial T_o}}{\frac{\partial U}{\partial I}} = w$; tener presente que $\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial I}$

El valor del tiempo de ocio es igual a la tasa salarial *w*. Dado que la utilidad no depende del tiempo de trabajo, el costo de oportunidad de una hora más de ocio es una hora menos de trabajo y, por lo tanto, una hora menos de ingreso monetario. (Compare con el modelo visto en clase.)

ii) Se diferencia totalmente la función de utilidad con respecto al ingreso y al tiempo de viaje y se iguala a cero:

$\frac{\partial U}{\partial I} dI + \frac{\partial U}{\partial tv} dtv = 0$. Manipulando algebraicamente se obtiene: $\frac{dI}{dtv} = w$.

El valor subjetivo del ahorro de tiempo de viaje es igual a la tasa salarial w: el tiempo de viaje ahorrado se dedica a ocio o a trabajar, cuyos beneficios son iguales. Este resultado es consecuencia de que la función de utilidad no incorpora como argumentos el tiempo de viaje ni el tiempo dedicado al trabajo.

14) Determinación del valor de ahorro de tiempo de viaje. Considere este modelo:

$\text{Max}_{x,To,Ttr}\ U(X,\ T_{tr}, T_v, T_o)$

sujeto a $pX = T_{tr}\, s + I - c_v$

$T_{tr} + T_v + T_o = 24$

X: bienes generalizados, p: precios (=1), I: Ingreso fijo; c_v: costo de viaje

s: ingreso salarial

T_{tr} : tiempo de trabajo

T_v : tiempo de viaje

T_o : tiempo de ocio

i) Obtenga la condición de primer orden para las variables horas de trabajo, tiempo de ocio y consumo. ii) Explique en palabras cada una de las condiciones. iii) Obtenga una expresión matemática para el valor del ahorro de tiempo de viaje e interprete. iv) Suponga que el tiempo de trabajo es fijo. Obtenga una expresión matemática para el valor del ahorro de tiempo de viaje. Interprete y explique qué diferencia existe con el punto iii). (33% de la nota)

Respuesta:

$U(X,\ T_{tr}, T_v, T_o) + \lambda\ (T_{tr}\, s + I - pX - c_v) + \mu\ (24 - T_{tr} - T_v - T_o)$

Condiciones de primer orden:

X: $\dfrac{\partial U}{\partial X} - \lambda p = 0$

T_o: $\dfrac{\partial U}{\partial T_o} - \mu = 0$

T_{tr}: $\dfrac{\partial U}{\partial T_{tr}} + \lambda s - \mu = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial U}{\partial T_{tr}} + \lambda s = \mu \Leftrightarrow \dfrac{\partial U}{\partial T_{tr}} = \dfrac{\partial U}{\partial T_o} - \lambda s$

La primera condición de primer orden es la típica vista en los cursos de microeconomía. La segunda condición de primer orden dice que μ es la utilidad de disponer de una unidad adicional de tiempo (utilidad marginal del tiempo de ocio). La tercera condición explica la relación entre horas de trabajo extra y tiempo de ocio: trabajar una hora más debe brindar una utilidad igual al ocio neto de la utilidad del salario. De lo contrario, es preferible dedicarse al ocio.

Diferenciando totalmente el Lagrangeano con respecto a T_v y a I, igualando a cero y haciendo uso de las condiciones de primer orden del problema de maximización de la utilidad, obtenemos la disposición a pagar por reducir el tiempo de viaje en una unidad:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T_v} - \mu\right) dT_v + \lambda dI = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dI}{dT_v} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial U}{\partial T_v} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial U}{\partial T_o} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial U}{\partial T_v} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial U}{\partial T_{nf}} + s$$

iv) $\frac{dI}{dT_v} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial U}{\partial T_v} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial U}{\partial T_o}$ Esta expresión entrega el valor del tiempo de viaje. La segunda parte de la igualdad no se cumple, puesto que el consumidor no tiene la opción de elegir cuántas horas trabajar.

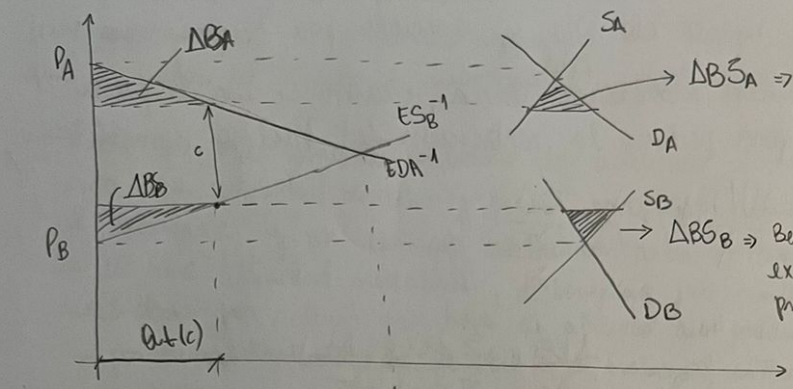
15) Modelo de Comercio Interregional. Considere que en las regiones A y B se produce y consume un mismo bien q de manera competitiva y que el transporte entre ellas es realizado por empresas en competencia perfecta cuyo costo marginal es constante e igual a *c*. Debido a una reforma ecológica se decidió introducir el impuesto al combustible, cuyo efecto aumenta el costo marginal de los transportistas. Muestre gráficamente el cambio en los beneficios de productores y consumidores. Este análisis gráfico debe hacerlo considerando el mercado de transporte y el mercado del bien q en ambas localidades. Su análisis debe mostrar lo siguiente:

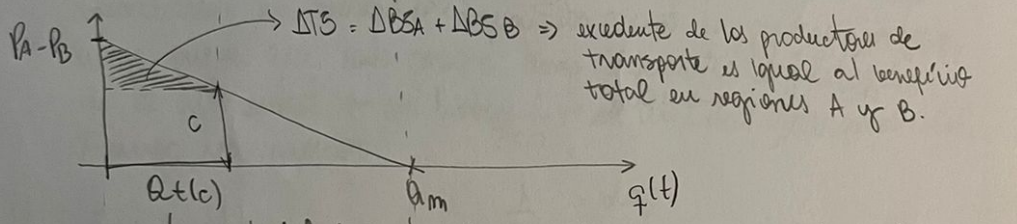
a) El consumo y la producción del bien q en las regiones A y B y el equilibrio en el mercado de transporte en la situación previa, sin impuesto al combustible.
b) El consumo y la producción del bien q en las regiones A y B y el equilibrio en el mercado de transporte en la situación con impuesto al combustible.
c) El cambio en los excedentes del consumidor y el excedente del productor en ambos mercados producto de la introducción del impuesto al combustible. (40%)

IMPORTANTE: i) todos los elementos de su gráfico deben tener su respectiva notación y esta estar aclarada; ii) provea de manera textual las explicaciones necesarias para que su análisis gráfico se entienda; iii) sea prolijo con sus gráficos. (33% de la nota)

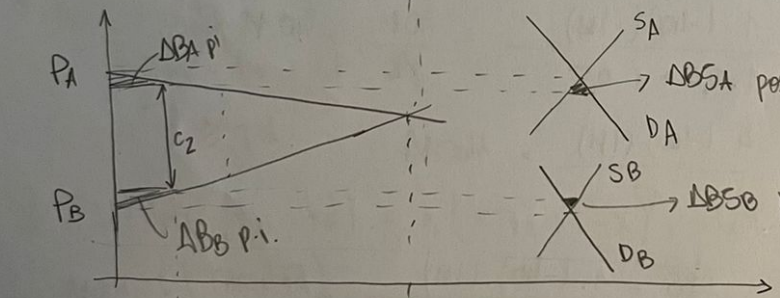
3 de diciembre de 2025

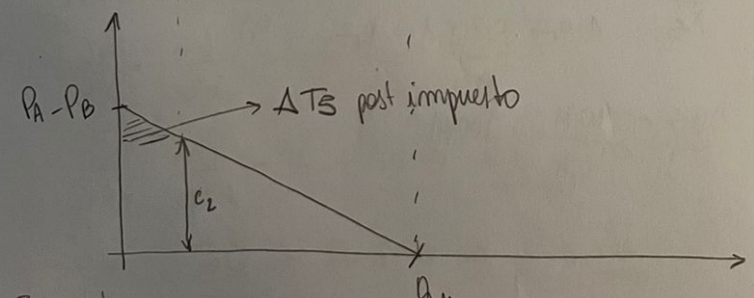
6) Sea $P_A > P_B$





↳ cantidad transportada cuando precio es c, antes del impuesto





Si post impuesto el precio de transporte es mayor que $P_A - P_B$ no habrá intercambio y el beneficio queda en 0.

Sección III

16) Tarificación en infraestructura vial - Modelo de Cuello de Botella. Considere el modelo de cuello de botella, con tarificación vial. Suponga i) la existencia de una función de demanda inversa P(N), ii) el costo medio del usuario es $\frac{1}{2}\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\frac{N}{\omega}$ y iii) el costo por unidad de infraestructura es c_ω, constante. (β: costo de llegar temprano, γ: costo de llegar tarde, ω: inversión en infraestructura vial, medido en unidades).

Demuestre que se cumple el teorema de autofinanciamiento. Para ello proceda así: i) plantee el problema de maximización del bienestar social que permita obtener la demanda óptima y la inversión óptima. (0.25) ii) Obtenga las condiciones de primer orden con respecto a la demanda y a la inversión en infraestructura vial. (0.25) iii) Obtenga la ecuación que establece el valor de la tarifa óptima social. (0.15) iv) A partir de las dos condiciones de primer orden, demuestre que la tarifa óptima social multiplicada por el valor de la demanda es exactamente igual al costo total invertido en infraestructura vial. (0.35) (34% de la nota)

Respuesta:

i) La función que maximiza el bienestar social es

$$BS(N;\omega) = \int_0^N p(x)dx - N\left(\frac{1}{2}\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\frac{N}{\omega}\right) - c_\varpi\omega$$

ii) Las condiciones de primer orden son estas:

$$\frac{\partial BS}{\partial N}: p(N) - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\frac{N}{\omega}}_{Costo_medio_usuario} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\frac{N}{\omega}}_{Tarifa} = 0$$

$$\frac{\partial BS}{\partial \omega}: \frac{1}{2}\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\left(\frac{N}{\omega}\right)^2 - c_\omega = 0$$

iii) En el óptimo social, la diferencia entre la disposición a pagar y el costo medio del usuario es igual a la tarifa a cobrar, que corresponde al tercer sumando del lado derecho de la primera CPO.

iv) Al multiplicar por el valor de la demanda obtenemos:

$$\text{Recaudación} = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\frac{N}{\omega}}_{Tarifa} \bullet N = \frac{1}{2}\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\frac{N^2}{\omega}.$$ Yendo a la segunda CPO, deducimos que el costo total de la infraestructura es igual a $\frac{1}{2}\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\frac{N^2}{\omega} = c_\omega\omega$. Por lo tanto, la recaudación es igual al costo de la inversión.

17) Transporte público y subsidios. i) Ud. está preparando su oferta para la licitación del servicio, que consiste en expresar el subsidio por pasajero transportado. Estos son los parámetros con los que debe preparar su oferta. La demanda es de 960 pasajeros a la hora, uniformemente distribuida a lo largo del recorrido y cada pasajero recorre la mitad del recorrido –mismo modelo que el visto en clase. El intervalo exigido es un servicio de bus cada 5 minutos y el tiempo de ciclo es de 3 horas (los tiempos de ascenso y descenso son despreciables). Su función de costo por hora de un bus es ($C_0 + C_1$ K), donde K es capacidad del bus, C_0 = \$10.000 y C_1 = \$400. El precio del pasaje en bus a cobrar es igual a \$600. (Los valores de C0 y C1 incluyen el costo de oportunidad del capital más su costo del tiempo por gerenciar la operación, por lo que con estos dos valores tiene toda la información de costos necesaria para hacer su oferta). Con esta información, suponiendo que los buses viajan a capacidad y haciendo uso de las fórmulas para calcular la demanda y oferta de frecuencia, calcule la capacidad óptima y el subsidio requerido para cumplir con los parámetros solicitados y minimizar costos. (33% de la nota)

Respuesta:
Se exige una frecuencia de 12 servicios a la hora (un servicio cada cinco minutos). Para cumplir con la frecuencia, se requiere una capacidad de los buses igual a
K = ½ Y / f = 960 / (2 * 12) = 40 pax/bus.

Dado que los buses viajan a capacidad, se requieren (frecuencia * tiempo de ciclo = buses) **12 * 3 = 36 buses.**

Con ello el costo por hora por bus es **10.000 + 400 * 40 = \$26.000**.

El costo total por hora es **26.000 * 36 = \$936.000**.

Por hora se recaudan **Y * tarifa = 960 * 600 = 576.000**.

Para cubrir el costo la tarifa técnica debe **\$975 (= 936.000 / 960)**.

Por lo tanto, el subsidio requerido es de **\$375 (= 975 – 600)** por pasajero.

18) Transporte público y subsidios. Considere la situación en que transporte privado y transporte público son substitutos perfectos para realizar un viaje; es decir, $Q = q_{bus} + q_{auto}$. suponga además que el transporte privado no está tarificado. La función de bienestar social es la siguiente:

$$BS = \int_0^{q_{auto}+q_{bus}} p(x_1)dx_1 - q_{auto}C_{auto}(q_{auto}) - q_{bus}\left(CMe_{operador}(q_{bus}) + CMe_{usuario}(q_{bus})\right)$$

El costo medio por pasajero de bus es igual a la suma del costo medio del operador más el costo medio del usuario ($Cme_{bus} = Cme_{operador} + Cme_{usuario}$). Suponga que el primero es constante y el segundo decreciente; es decir, $\frac{\partial CMe_{operador}(q_{bus})}{\partial q_{bus}} = 0 \wedge \frac{\partial CMe_{usuario}(q_{bus})}{\partial q_{bus}} < 0$.

i) Plantee el problema matemático de optimización que permita calcular la tarifa del bus óptima social, considerando que no existe tarifa vial. (0.20) ii) Obtenga las condiciones de primer orden. (0.25) iii) A partir de las condiciones de primer orden, determine la tarifa óptima social del bus. (0.40) iv) Explique si es necesario otorgar un subsidio a la operación del transporte público y sus razones. (0.15) (33% de la nota)

Respuesta:

i)
$$BS = \int_0^{q_{auto}+q_{bus}} p(x_1)dx_1 - q_{auto}C_{auto}(q_{auto}) - q_{bus}\left(CMe_{operador}(q_{bus}) + CMe_{usuario}(q_{bus})\right) + \\ + \lambda\left(p(q_{auto}+q_{bus}) - C_{auto}(q_{auto})\right)$$

ii) Condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial BS}{\partial q_{auto}} = p(q_{auto}+q_{bus}) - C_{auto}(q_{auto}) - \frac{\partial C_{auto}(q_{auto})}{\partial q_{auto}}q_{auto} + \lambda\left(\frac{\partial p(q_{auto}+q_{bus})}{\partial q_{auto}} - \frac{\partial C_{auto}(q_{auto})}{\partial q_{auto}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial BS}{\partial q_{bus}} = p(Q) - \left(CMe_{operador} + CMe_{usuario}\right) - \left(\frac{\partial CMe_{operador}}{\partial(q_{bus})} + \frac{\partial CMe_{usuario}}{\partial(q_{bus})}\right)q_{bus} + \lambda\frac{\partial p(Q)}{\partial q_{bus}} = 0$$

iii) En la primera CPO, obtenemos el valor de lambda, sabiendo que los dos primeros sumandos se anulan entre ellos. Así $\lambda = \frac{\frac{\partial C_{auto}(q_{auto})}{\partial q_{auto}}q_{auto}}{\left(\frac{\partial p(Q)}{\partial q_{auto}} - \frac{\partial C_{auto}(q_{auto})}{\partial q_{auto}}\right)}$. Reemplazando en la segunda CPO y sabiendo que $\frac{\partial CMe_{operador}(q_{bus})}{\partial q_{bus}} = 0$, se obtiene

$$\frac{\partial BS}{\partial q_{bus}} = p(Q) - \left(CMe_{operador} + CMe_{usuario}\right) - \frac{\partial CMe_{usuario}}{\partial (q_{bus})} q_{bus} + \frac{\frac{\partial C_{auto}(q_{auto})}{\partial q_{auto}} q_{auto}}{\left(\frac{\partial p(Q)}{\partial q_{auto}} - \frac{\partial C_{auto}(q_{auto})}{\partial q_{auto}}\right)} \frac{\partial p(Q)}{\partial q_{bus}} = 0$$

La tarifa a cobrar es la disposición a pagar menos el costo medio del usuario:

$$T = p(Q) - CMe_{usuario} = CMe_{operador} + \frac{\partial CMe_{usuario}}{\partial (q_{bus})} q_{bus} - \frac{\frac{\partial C_{auto}(q_{auto})}{\partial q_{auto}} q_{auto}}{\left(\frac{\partial p(Q)}{\partial q_{auto}} - \frac{\partial C_{auto}(q_{auto})}{\partial q_{auto}}\right)} \frac{\partial p(Q)}{\partial q_{bus}}$$

El tercer sumando es negativo ($-\frac{(+)}{((-)-(+))}(-) = -\frac{(+)}{(-)}(-) = (-)$). El segundo sumando es negativo según se nos dice en el enunciado.

iv) Al costo medio del operador por pasajero se le debe restar el segundo sumando (efecto Mohring) y el tercer sumando que refleja la ausencia de tarificación vial. Por lo tanto, es necesario subsidiar la tarifa por los dos motivos descritos.