PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DPTO. DE INGENIERÍA DE TRANSPORTE Y LOGÍSTICA

Curso: ICT2233
Semestre: 2025-01
Profesor: Mathias Klapp

INTERROGACIÓN 1
FLUJO EN REDES - ICT2233

TIEMPO: 100 MINUTOS

- *La prueba tiene 60 puntos distribuidos entre todas sus preguntas.*
- *¡Coloque nombre en el cuadernillo y no lo separe!*
- *La prueba es sin apuntes y/o equipos electrónicos. Se permite resumen de una hoja escrito a mano.*

Pregunta 1 (21 puntos): Verdadero o falso

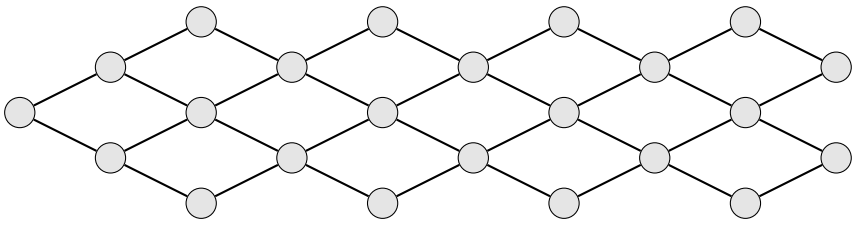
Para cada una de la siguientes frases: ¿Es verdadera o falsa? Justifique cada una.

Respuesta: Nota de corrección: 1 p por decir si es verdadera o falsa, 2 por justificarla bien.

(a) (3p) Es posible formar un grafo conexo y no dirigido de 21 nodos tal que posea: seis nodos de grado 2, cinco nodos de grado 3, cuatro nodos de grado 4, tres de grado 5, dos de grado 6 y uno de grado 7.

Respuesta: No. La suma total de grados da impar y debe ser par. Otra forma de verlo es que hay un número impar de nodos de grado impar y eso es imposible.

(b) (3p) Este grafo posee una caminata Euleriana:



Respuesta: Verdadero, solo hay dos nodos de grado impar, por lo que se puede construir una.

(c) (3p) Todo subgrafo de un grafo bipartito es bipartito.

Respuesta: Verdadero. Si el grafo no tiene ciclos con un número impar de arcos, entonces ninguno de sus subgrafos los tendrá.

(d) (3p) Si en un grafo dirigido $G = (N, A)$ existe una ruta dirigida desde el nodo $1 \in N$ hacia cada nodo $i \in N \setminus \{1\}$ y, además, existe una ruta dirigida desde cada nodo $i \in N \setminus \{1\}$ hacia el nodo 1, entonces el grafo es fuertemente conexo.

Respuesta: Verdadero. Esto implica que existen rutas dirigidas de cualquier nodo $i \in N$ hacia cualquier nodo $j \in N$ pasando por 1.

(e) (3p) Suponga un grafo no dirigido de n nodos en donde cada nodo posee grado impar igual a $k \geq 1$. En este caso el número de arcos del grafo es múltiplo entero de k.

Respuesta: Verdadero. Este grafo debe cumplir que n es par (pues todo nodo posee grado impar).

Además, el grado total del grafo es $n \cdot k$ y, por lo tanto posee $n \cdot k/2$ arcos. Luego, $(n \cdot k/2)/k = n/2$ que debe ser un número entero, pues n es par.

(f) (3p) Considere el problema de identificar un Árbol de Mínimo costo y Envergadura Máxima (AMEM) sobre un grafo no dirigido y conexo de n nodos y $m = |A|$ arcos con costos c_a en cada arco $a \in A$. Además se cumple que $m \geq n \geq 3$. En este problema el arco e de mayor costo (es decir, $e \in \text{argmax}_{a \in A} c_a$) nunca será parte de un AMEM.

Respuesta: Falso, basta con ver un contra-ejemplo valído de pregunta 2 (u otro que use el arco más caro).

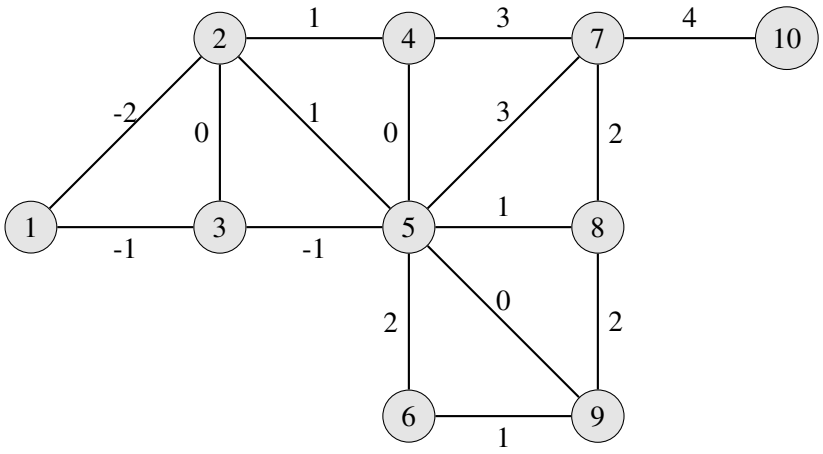
(g) (3p) Para todo árbol (N, T) siempre existe un corte $X \subset N$ tal que un solo arco lo atraviesa (es decir, $|\delta_X| = 1$).

Respuesta: Verdadero, Tome $X = \{i\}$ donde i es una hoja del árbol (existen al menos 2)

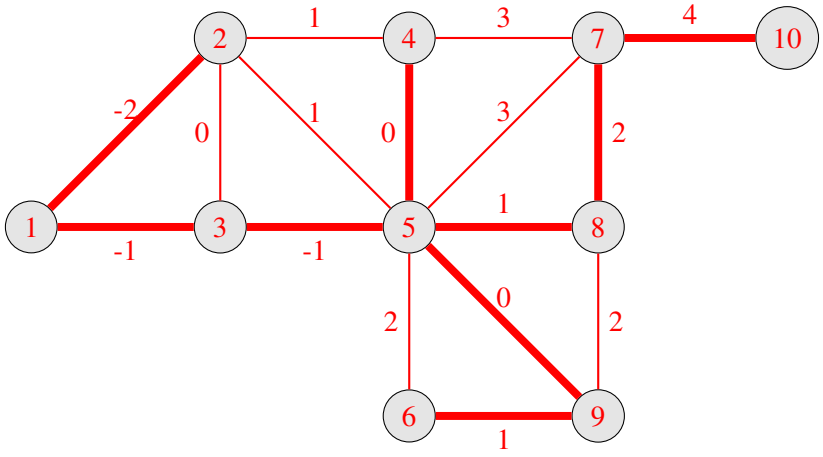
Pregunta 2 (20 puntos)

Parte 1 (13p)

Considere el grafo G no dirigido ilustrado en la siguiente figura. Cada arco tiene etiquetado su costo.



(a) (8p) Identifique un AMEM ejecutando el algoritmo de Prim iniciado desde el nodo 1. Identifique en qué orden se insertó cada arco en el algoritmo. ¿Qué costo posee el AMEM? **Respuesta:** Este es el AMEM:



El orden de ingreso es: $(1,2),(1,3),(3,5),(4,5) o (5,9),(5,8) o (6,9),(7,8),(7,10)$ y su costo es 4

(b) (1p) ¿Cuénto sería el costo del AMEM si inicia el Algoritmo de Prim desde el nodo 10? **Respuesta:** El mismo.

(c) (2p) Ahora suponga que el costo del arco $(4,5)$ baja de 0 a -2. En este nuevo escenario: ¿Cuál es el costo de un AMEM?

Respuesta: 2 (baja en 2 directamente y queda en 2, pues está en el AMEM)

(d) (2p) Retome el costo original del arco $(4,5)$ y suponga que el costo del arco $(2,5)$ baja de 1 a -2. En este nuevo escenario: ¿Cuál es el costo de un AMEM? **Respuesta:** 2 (Como no está en el AMEM, baja solo en una unidad y comienza a ser atractivo cuando cae debajo de -1. El nuevo costo es 3.

Parte 2 (7p)

Considere una red no dirigida $G = (N, A)$ y datos de costo c_a para cada arco $a \in A$. También considere un árbol de envergadura máxima con arcos $T \subset A$.

Se dice que este árbol cumple la condición de **optimalidad por rutas** si para cada arco $\{i, j\}$ que no está en el árbol (es decir, $\{i, j\} \notin T$) se cumple que $c_{\{i,j\}} \geq c_e$ donde e es un arco del árbol ($e \in T$) contenido en la ruta entre i y j.

Muestre formalmente que si T es un AMEM, entonces cumple la condición de optimalidad por rutas.

Respuesta: Probémoslo por contradicción. Si T no cumple optimalidad de rutas, entonces existe $u = \{i, j\} \notin T$ tal que $c_u < c_a$ para algún arco $a \in T$ en la ruta entre i y j sobre T. Esto implica que $T \cup \{u\} \setminus \{a\}$ es un árbol más barato que T (lo que es imposible si T es un AMEM).

Pregunta 3 (12 puntos)

Le han pedido ayudar al jefe de operaciones de una empresa que opera una flota de F camiones y que regularmente ejecuta servicios de transporte de carga entre localidades y en horarios solicitados por sus clientes. La región que esta empresa atiende está modelada por un grafo completo dirigido $G = (N, A)$, donde el conjunto de nodos $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ representa a las localidades del área y el conjunto de arcos dirigidos A representa viajes entre cada par de localidades. Además, dispone de información del tiempo de viaje t_a y el costo $\$c_a$ por ejecutar un viaje de camión (cargado o no) sobre el arco $a \in A$.

Para mañana, el jefe de operaciones recibió una lista R de requerimientos que podría o no atender. Cada requerimiento $r \in R$ consiste en la solicitud de un servicio de transporte de parte de un cliente y detalla: (1) el ingreso $\$g_r$ que genera si se escoge atenderlo, (2) el nodo $n_r^1 \in N$ en donde debe iniciar el servicio, la hora h_r de inicio del servicio en el lugar de inicio y (3) el lugar $n_r^2 \in N$ en donde debe terminar el servicio. Además del tiempo que consume en viaje, se estima que cada servicio de transporte tarda dos horas más en la carga en origen y descarga en destino. Suponga que cada camión inicia el día a las 8am en el nodo $1 \in N$ y que debe terminar a más tardar a las 22 horas en el mismo nodo. También, asuma que cada camión podría operar sin parar entre 8 y 22 y que puede ejecutar varios requerimientos al día, pero solo uno al mismo tiempo.

◇ (10p) Formule un PFCM que ayude a planificar la operación de los camiones y que maximice la ganancia neta de la empresa escogiendo qué subconjunto de requerimientos atender. Nota: La ganancia neta es entendida como ingresos menos costos. Para ello: (1) Defina el grafo del PFCM a modelar con sus nodos y arcos. (2) Luego, establezca las ofertas en nodos. (3) Finalmente establezca costos, requerimientos mínimos y capacidades en arcos.

Respuesta:

Nodos y ofertas: Comenzaremos definiendo los nodos del problema.

- nodo fuente f que representa el inicio de la operación. Ofrece $b_s = F$ camiones.
- nodo terminal s que representa el inicio de la operación. Ofrece $b_s = -F$ camiones (consume F).
- nodos de inicio de servicios $r \in I$, donde $I := \{r : r \in R\}$. Son todos de trasbordo.
- nodos de término de servicios $r \in T$, donde $T := \{r : r \in R\}$. Son todos de trasbordo.

Luego, el conjunto de nodos es $V := \{f, t\} \cup I \cup T$.

Arcos, costos y capacidades:

- Arcos de inicio desde el nodo fuente $E^1 = \{(f, r) : r \in I, h_r \geq 8 + t_{\{}(1, n_r^1)\}\}$ para cada servicio que es capaz de ser ejecutado comenzando el viaje del camión a las 8am en el nodo 1. Cada arco posee costo $c_{(1,n_r^1)}$, requerimientos mínimo 0 y es no capacitado.
- Arcos de término hacia el nodo fuente $E^2 = \{(r, s) : r \in T, h_r + 2 + t_{n_r^1, n_r^2} + t_{n_r^2, 1} \leq 22\}\}$ para cada servicio que es capaz de ser ejecutado moviendo al final el camión al nodo 1 antes de las 22. Cada arco posee costo $c_{(n_r^1,1)}$, requerimientos mínimo 0 y es no capacitado.
- Arcos de compatibilidad entre servicios $E^3 = \{(r, r') : r \in I, r' \in T, h_r + 2 + t_{n_r^1, n_r^2} + t_{n_r^2, n_{r'}^1} \leq h'_r\}\}$. Cada arco posee costo $c_{(n_r^2, n_{r'}^1)}$, requerimientos mínimo 0 y es no capacitado.
- Arcos de servicios $E^4 = \{(r, r) : r \in I, r \in T\}\}$. Cada arco posee costo $c_{(n_r^1, n_r^1)} - g_r$, requerimientos mínimo 0 y capacidad máxima 1 (no se puede atender dos veces el mismo servicio).

Luego, el conjunto de arcos es $E = E^1 \cup E^2 \cup E^3 \cup E^4$

Nota de corrección: Alternativamente, se podría dibujar esto y estaría correcto si se añade todo el detalle.

Nota de corrección 2: En la modelación:

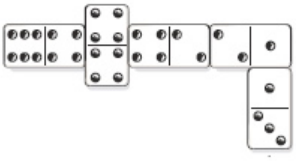
- Todo 100% correcto: 12 puntos
- Un error menor: 9-11 puntos
- Más de dos errores menores o uno grave: 5-8 puntos
- Otra cosa: 0 puntos

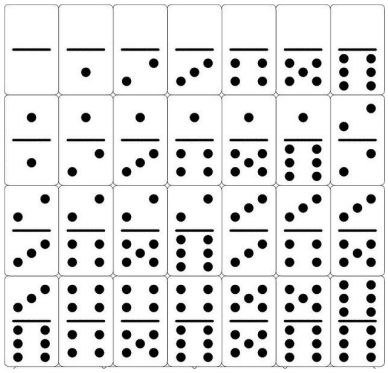
◇ (2p) ¿Cómo obtendría el itinerario de cada camión desde la solución de su modelo?

Respuesta: El itinerario de cada camión sería una ruta dirijida con flujo desde f hasta s

Pregunta 4 (7 puntos)

El dominó es un juego de mesa en donde se forma una cadena de fichas rectangulares con número enteros en ambos extremos del 0 al 6 (figura izquierda). Se va colocando una ficha por turno cuidando que la unión de dos fichas tengan números coincidentes. En total, el juego posee 28 fichas (figura derecha).¿Es posible completar una partida de dominó usando todas las fichas y cerrando el juego con el mismo valor en ambas puntas de la cadena? Justifique.





Respuesta: Si. Considere un grafo completo de 7 nodos donde cada nodo representa uno de los posibles valores $N = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Cada arco $\{i,j\} \in A$ representa una ficha. El problema consiste en encontrar un ciclo euleriano en un grafo completo de 7 nodos. Cada nodo tiene grado par ($g_i = 6$, $\forall i \in N$), por lo que esto es factible.