PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DPTO. DE INGENIERÍA DE TRANSPORTE Y LOGÍSTICA

Curso: ICT2233
Semestre: 2025-01
Profesor: Mathias Klapp

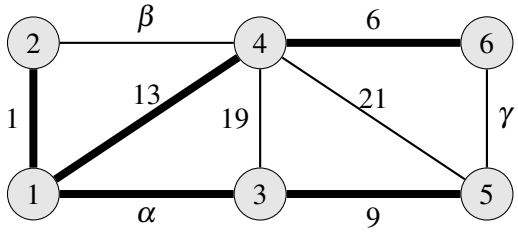
EXAMEN
FLUJO EN REDES - ICT2233

TIEMPO: 150 MINUTOS

- *La prueba tiene 66 puntos, pero la nota máxima es calculada con 60: Nota* $= \min(\textit{puntos obtenidos}, 60)/10 + 1$.
- *La prueba es sin apuntes y/o equipos electrónicos. Se permite los resúmenes escritos a mano.*

Pregunta 1 (7 puntos)

Considere el siguiente grafo no dirigido $G = (N, A)$ con valores de costo asociados a la utilización de cada arco $a \in A$. Sobre G hay destacado un árbol de envergadura máxima $T := \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{3,5\},\{4,6\}\}$. Se desconoce los valores de α, β y γ.



- (2p) Muestre que T no es un Árbol Mínimo de Envergadura Máxima (AMEM) de G cuando $\alpha = 16, \beta = 14$ y $\gamma = 15$.

  Respuesta: No es un AMEM pues el árbol $T' := \{\{1,2\},\{5,6\},\{1,4\},\{3,5\},\{4,6\}\}$ es una unidad más barato.

- (5p) ¿Determine el conjunto de todos los valores posibles de (α, β, γ) para los cuales T es un AMEM de G? Justifique.

  Respuesta: Se puede deducir desde optimalidad por cortes:

  - $1 \leq \beta$ (para conectar a 1 con el resto a mínimo costo via $\{1,2\}$).
  - $\alpha \leq 19$,$\alpha \leq 21$ y $\alpha \leq \gamma$ (para conectar a $\{3,5\}$ con el resto a mínimo costo via $\{1,3\}$).
  - $13 \leq \beta$ y $13 \leq \gamma$ (para conectar a $\{4,6\}$ con el resto a mínimo costo via $\{1,4\}$).

  Luego, lo pedido es: $13 \leq \beta$, $13 \leq \gamma$, $\alpha \leq 19$, $\alpha \leq \gamma$.

Respuesta:

Pregunta 2 (10 puntos)

Una aerolínea comercial de pasajeros opera una flota n aviones idénticos sobre un conjunto $A := \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ de m aeropuertos chilenos. Cada día, la compañía debe ejecutar un conjunto $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de $p > n$ vuelos nacionales, donde cada vuelo $v_i := (a_i^+, a_i^-, t_i^+, t_i^-)$ debe despegar a la hora $t_i^+ \in [0,24]$ desde el aeropuerto $a_i^+ \in A$ y aterrizar a la hora $t_i^- \in [0,24]$ en el aeropuerto $a_i^- \in A$. Cada avión puede ejecutar más de un vuelo al día (o ninguno) siempre y cuando haya compatibilidad entre cada par de vuelos consecutivos v_1 y v_2 que ejecute, es decir, v_1 debe aterrizar una hora antes en el mismo aeropuerto en donde v_2 despega. Además, asuma que la lista de vuelos del día se repite en cada día de la semana, por lo que la aerolínea debe iniciar y finalizar con la misma cantidad de aviones en cada aeropuerto para darle continuidad a la operación entre días.

¿Es posible operar los vuelos con los n aviones sin re-localizarlos vacíos entre aeropuertos? Formule un Problema de Flujo a en redes a Costo Mínimo (PFCM) que le permita responder a esta pregunta. Defina el grafo del problema con sus nodos y arcos. Luego determine costos y capacidades en arcos y ofertas en nodos. Suponga que usted decide donde comienza el día cada avión. Explique cómo obtendría su respuesta.

Respuesta: Es uno problema de circulación (es decir, un PFCM con ofertas igual a 0 en cada nodo) en donde el conjunto de nodos N contiene:

- ◇ Un nodo i^+ que representa el comienzo de cada vuelo $v_i \in V$, $i \in \{1, \ldots, p\}$
- ◇ Un nodo i^- que representa el termino de cada vuelo $v_i \in V$, $i \in \{1, \ldots, p\}$
- ◇ Un nodo j^+ que representa el inicio de cada día en el aeropuerto $a_j \in A$, $j \in \{1, \ldots, m\}$
- ◇ Un nodo j^- que representa el termino de cada día en el aeropuerto $a_j \in A$, $j \in \{1, \ldots, m\}$

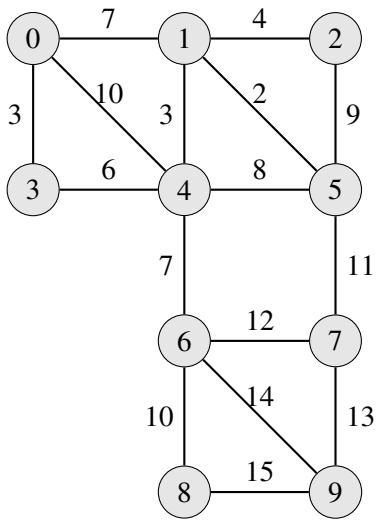
El conjunto de arcos contiene:

- ◇ Un arco (i^-, j^+): representa que un avión termina el vuelo v_i y posteriormente ejecutar el vuelo v_j con el mismo avión. Se añade para cada par de vuelos solo si $a_i^- = a_j^+$ y $t_j^+ - t_i^- \geq 1$. Tiene capacidad máxima 1. Su costo es 0.
- ◇ Un arco (i^-, i^+): representa la ejecución del vuelo v_i. Tiene capacidad mínima y máxima igual a 1. Su costo es 0.
- ◇ Un arco (j^+, i^+): representa que un avión inicia el día en el aeropuerto a_j ejecutando el vuelo v_i. Se añade solo si $a_j = a_i^+$. Tiene capacidad máxima igual a 1. Su costo es 0.
- ◇ Un arco (i^-, j^-): representa que un avión termina el día en el aeropuerto a_j ejecutando el vuelo v_i. Se añade solo si $a_j = a_i^-$. Tiene capacidad máxima igual a 1. Su costo es 0.
- ◇ Un arco (j^-, j^+): representa la cantidad de aviones que comienzan y terminan el día en el aeropuerto a_j. Su costo es 1.

Si el valor óptimo es menor o igual a n, entonces es posible hacer lo solicitado.

Pregunta 3 (8 puntos)

Considere el siguiente grafo no dirigido cuyos costos están detallados sobre cada arco. LA suma de todos los costos en el grafo es igual a 134.



(a) (2p) ¿Posee un tour Euleriano? ¿Y una caminata Euleriana? Justifique.

Respuesta: No posee tour euleriano ni caminata euleriana, pues los nodos 0, 4, 7 y 9 poseen grado impar.

(b) (6p) Obtenga el menor costo posible de una caminata (no necesariamente cerrada) que pasa al menos una vez por todos los arcos. Justifique su respuesta.

Respuesta: Se debe conectar a mínimo costo una pareja entres los cuatro nodos de grado impar. Escogeremos la conexión más barata. Revisemos las conexiones a ruta mínima:

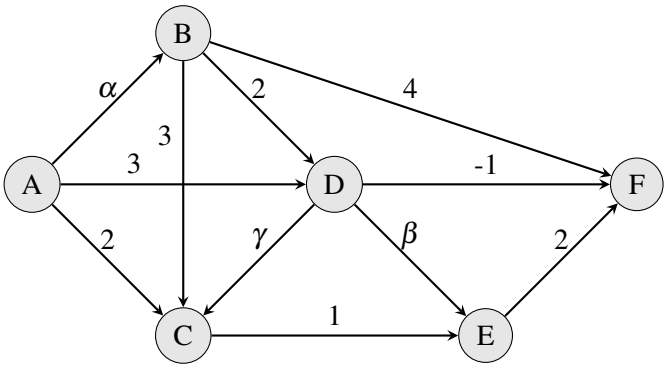
- $0-4$: Ruta mínima es a costo 9 (0-3-4)
- $0-7$: Ruta mínima es a costo 20 (0-1-5-7)
- $0-9$: Ruta mínima es a costo 31 (0-3-4-6-9)
- $4-7$: Ruta mínima es a costo 19 (4-5-7 o 4-6-7)
- $4-9$: Ruta mínima es a costo 21 (4-6-9)
- $7-9$: Ruta mínima es a costo 13 (7-9)

La opción más barata es duplicar los arcos $\{0,3\}$ y $\{3,4\}$ agregar costo 9 a los 134 iniciales y obtener una caminata que visita al menos todos los arcos a costo 143.

Respuesta:

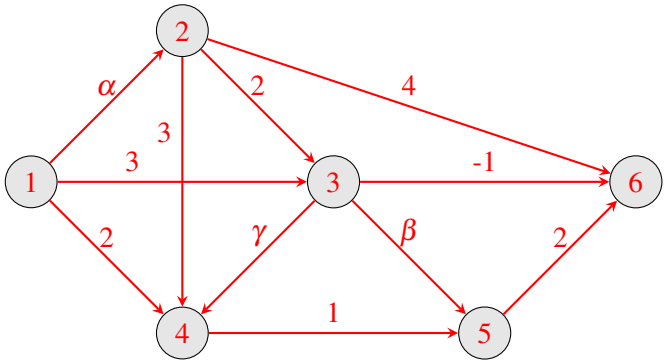
Pregunta 4 (10 puntos)

Considere el siguiente grafo dirigido cuyos costos están detallados sobre cada arco:



Suponga que (A,D,E,F) es una ruta de mínimo costo desde el nodo A hacia el nodo F. Determine el conjunto de todos los posibles valores de (α,β,γ). Explique su razonamiento (no basta con enunciar el conjunto).

Respuesta: El grafo es acíclio. Para ayudarnos, re-nombremos los nodos en orden topológico. En este caso la ruta en cuestión es $(1,3,5,6)$



Por calculo de ruta mínima y optimalidad de sub-ruta, se debe cumplir lo siguiente:

- $d_1^* = 0$
- $d_2^* = c_{12} = \alpha$
- $d_3^* = \min\{c_{12}, d_2^* + c_{23}\} = \min\{3, \alpha+2\} = 3$ (ruta mínima a 3 debe ser 1-3 por optimalidad de sub-ruta). Luego: $\alpha \geq 1$
- $d_4^* = \min\{c_{14}, d_2^* + c_{24}, d_3^* + c_{34}\} = \min\{2, \alpha+3, 3+\gamma\} = \min\{2, 3+\gamma\}$ (pues $\alpha \geq 1$)
- $d_5^* = \min\{d_3^* + c_{35}, d_4^* + c_{45}\} = \min\{3+\beta, \min\{2, 3+\gamma\}+1\} = 3+\beta$ (ruta mínima a 5 debe ser 1-3-5 por optimalidad de sub-ruta). Luego: $\beta \leq 0$; $\beta \leq \gamma+1$.
- $d_6^* = \min\{d_2^* + c_{26}, d_3^* + c_{36}, d_5^* + c_{56}\} = \min\{\alpha+4, 2, \beta+5\} = \min\{2, \beta+5\} = \beta+5$ (ruta mínima a 6 debe ser 1-3-5-6). Luego $\beta \leq -3$

El conjunto solicitado es: $\{(\alpha,\beta,\gamma) : \alpha \geq 1, \beta \leq -3, \beta \leq \gamma+1$.

Pregunta 5 (6 puntos)

Suponga un grafo dirigido (N,A) que modela una red vial. Cada nodo $i \in N$ representa una intersección y cada arco $a \in A$ es un segmento de calle entre dos intersecciones. Suponga que ha identificado una lista $\mathscr{L}$ que contiene pares de arcos consecutivos $((i,j),(j,k)) \in \mathscr{L}$ tal que se vira a la izquierda si se recorre el arco (i,j) inmediatamente antes de (j,k). Diseñe un algoritmo eficiente que genere una ruta con la mínima cantidad de virajes a la izquierda desde un punto $o \in N$ hacia uno $d \in N$. ¿Cómo lo resolvería?

Respuesta: En este problema es necesario crear un grafo con "memoria" en cada nodo. Para ello se puede crea un nuevo conjunto de nodos $N' = \{o,d\} \cup \{(i,j) : i \in N \setminus \{d\}, j \in N \setminus \{i,o\}, (i,j) \in A\}$. Acá, el nodo (i,j) representa estar en j habiendo visitado inmediatamente antes a i.

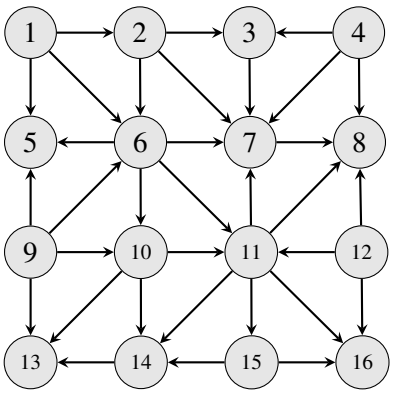
El conjunto de arcos sería: $A := A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde:

- $A_1 := \{(o,(o,j)) : (o,j) \in N'\}$ a costo 0.
- $A_2 := \{((i,j),(j,k)) : (i,j),(j,k) \in N'\}$ a costo 1 si $((i,j),(j,k)) \in \mathscr{L}$ y 0 en otro caso.
- $A_3 := \{((i,d),d) : (i,d) \in N'\}$ a costo 0.

Luego, las rutas desde o hacia el nodo d cuestan exactamente la cantidad de virajes a la izquierda que hacen. Se puede resolver por Dijkstra.

Pregunta 6 (5 puntos)

Considere el grafo dirigido de la figura.



¿Cuál es a máxima cantidad de rutas dirigidas y disjuntas en **arcos** desde el nodo 1 hacia el nodo 16? Verifique su respuesta utilizando conceptos de dualidad.

Respuesta: Hay dos rutas: $1-6-14-16$ y $1-2-6-10-14-15-16$. El corte $Q = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,15$ lo certifica, pues solo lo atraviesan dos arcos: $(15,16)$ y $(14,16)$

Respuesta:

Pregunta 7 (6 puntos)

Considere un problema de flujo máximo desde un nodo s hacia otro nodo t en un grafo $G = (N, A)$, donde N es el conjunto de nodos, A es el conjunto de arcos y $u_a \in A$ es la capacidad de cada arco (entera y no-negativa). Suponga que el problema de flujo máximo desde s hacia t es acotado y que no hay capacidades mínimas de flujo en arcos. Llame **arco crítico hacia arriba** a cualquier arco a que al aumentar unilateralmente su capacidad de flujo u_a en una unidad genera un aumento en el valor de flujo máximo desde s hacia t.

Proponga un algoritmo que permita identificar a **todos** los arcos críticos hacia arriba (debe ser órdenes de magnitud más rápido que resolver el problema de flujo máximo m veces).

Respuesta: Para que un arco $(i, j) \in A$ sea crítico hacia arriba deben suceder tres condiciones:

- ◇ Debe estar a capacidad en cualquier solución ópima, pues de lo contrario, la restricción no estaría activa y no tendría efecto aumentar la capacidad.
- ◇ Debe haber una ruta con capacidad de flujo mayor o igual a 1 en la red residual desde s hacia i (para que el flujo adicional pueda ir desde s hacia i)
- ◇ Debe haber una ruta con capacidad de flujo mayor o igual a 1 en la red residual desde j hacia t (para que el flujo adicional pueda ir desde j hacia t)

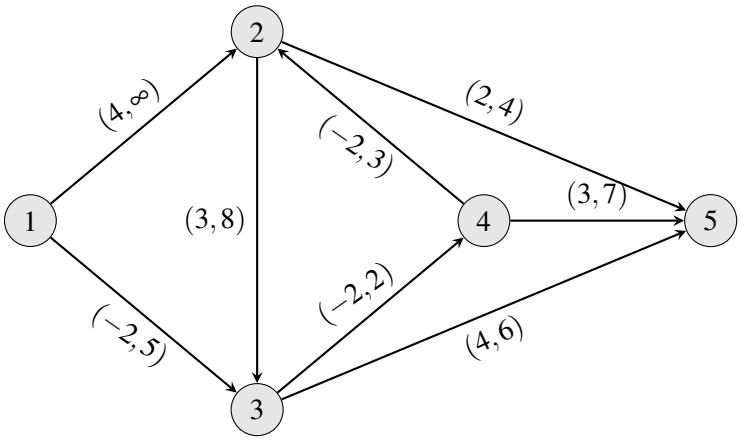
Por lo tanto el algoritmo sería el siguiente:

- ◇ Hacer Ruta aumentable desde s hacia t.
- ◇ Identificar todo arco (i, j) a capacidad en la solución de flujo máximo. Definir el conjunto $A^c \subseteq A$ con estos arcos.
- ◇ Sobre la red residual hacer DFS (o BFS) desde s hacia adelante. Llamar N' al conjunto de nodos accesibles desde s.
- ◇ Sobre la red residual hacer DFS (o BFS) desde t hacia atrás. Llamar N'' al conjunto de que acceden a t.
- ◇ Un arco (i, j) crítico hacia arriba cumple que $(i, j) \in A^c$, $i \in N'$ y $j \in N''$.

Lo anterior ejecuta en $\mathcal{O}(m)$ operaciones adicionales sobre calcular el flujo máximo.

Pregunta 8 (14 puntos)

Considere el siguiente grafo dirigido $G = (N, A)$. Cada arco $a \in A$ detalla (c_a, u_a); su costo por unidad de flujo y su capacidad máxima, respectivamente. Suponga que a usted le interesa transportar la máxima cantidad de flujo desde el nodo 1 hacia el nodo 5 y, además, hacerlo a mínimo costo.

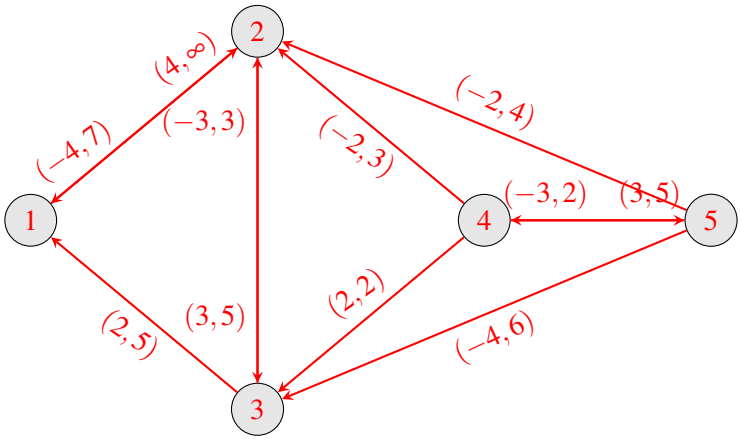


Para resolver este problema, se le pide responder a cada uno de los siguientes pasos:

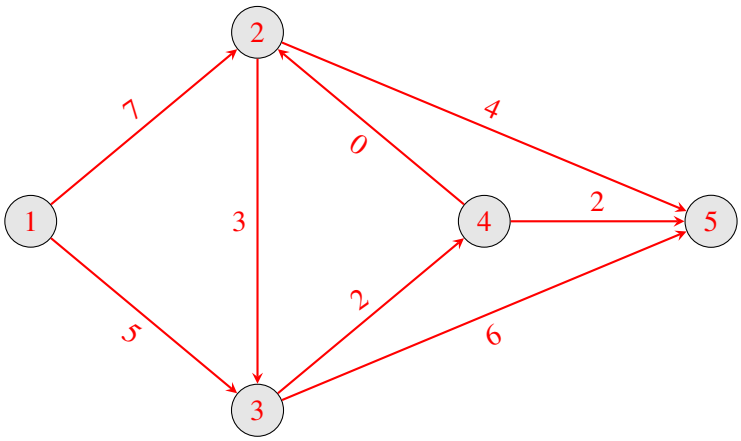
(a) (5p) Obtenga un flujo factible que maximice el valor de flujo transportable desde 1 hacia 5. LLame F a este valor de flujo. Utilice conceptos de dualidad y argumentar que F es efectivamente el valor máximo.

Respuesta: Esta es una red residual de flujo máximo con $F = 12$ luego de aumentar flujo por las siguientes rutas:

- 4 unidades por 1-2-5
- 5 unidades por 1-3-5
- 2 unidades por 1-2-3-4-5
- 1 unidad por 1-2-3-5



El corte de capacidad 12 que certifica lo anterior es $Q =: \{1,2,3\}$ y el flujo asociado es el siguiente:

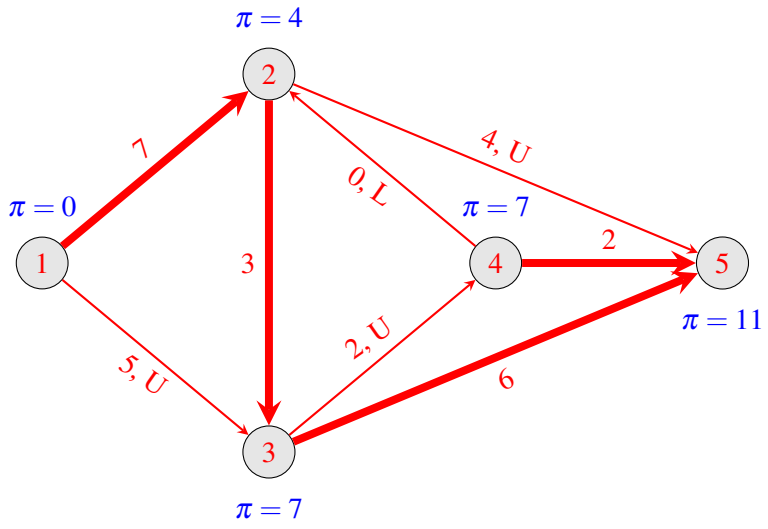


(b) (4p) Luego, ejecute el algoritmo de cancelación de ciclos negativos desde el flujo anterior y obtenga un flujo factible que transporte el valor máximo F desde 1 hacia 5 a mínimo costo. ¿Cuál es el mínimo costo asociado a transportar F unidades de flujo?

Respuesta: Podemos comenzar desde el grafo anterior y ejecutar el algoritmo de cancelación de ciclos negativos. Es fácil notar que no hay ciclos dirigidos negativos en el garfo residual anterior (solo hay un ciclo dirigido $1-2-3-1$ y posee costo positivo), por lo que las 12 unidades de flujo se transportan a costo mínimo.

El costo es $C^* = 4\cdot 7 - 2\cdot 5 + 3\cdot 3 - 2\cdot 0 - 2\cdot 2 + 4\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot 2 = 61$

(c) (5p) Certifique que su forma de transportar F unidades de flujo es óptima mediante conceptos de costo reducido. **Respuesta:** Para certificar lo anterior necesitamos una base cuyos costos reducidos demuestren la optimalidad de la solución. Los arcos $(1,2),(2,3)$ y $(4,5)$ deben estar en la base pues mueven flujo positivo y menor a la capacidad máxima. El cuarto debe ser cuidadosamente escogido, pues hay degenerancia y posee varias opciones pero solo una que demuestra optimalidad. La opción correcta es $(3,5)$. Otra elección implica iteraciones en la misma base.



Los costos reducidos de variables fuera de base con signo correcto son:

- $r_1 3 = -2 - (7-0) = -9$ (ok, pues está en U)
- $r_4 2 = -2 - (4-7) = 1$ (ok, pues está en L)

- $r_3 4 = -2 - (7 - 7) = -2$ (ok, pues está en U)
- $r_2 5 = 2 - (11 - 4) = -5$ (ok, pues está en U)