PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DPTO. DE INGENIERÍA DE TRANSPORTE Y LOGÍSTICA

Curso: ICT2233
Semestre: 2023-01
Profesor: Mathias Klapp

INTERROGACIÓN 1
FLUJO EN REDES - ICT2233

TIEMPO: 120 MINUTOS

- *La prueba tiene 60 puntos distribuidos entre todas sus preguntas.*
- *¡Coloque nombre en el cuadernillo y no lo separe!* ***Se penalizará con 4 puntos a quien no siga esta instrucción****.*
- *La prueba es sin apuntes y/o equipos electrónicos. Se permite resumen de una hoja escrito a mano.*

¡Éxito!

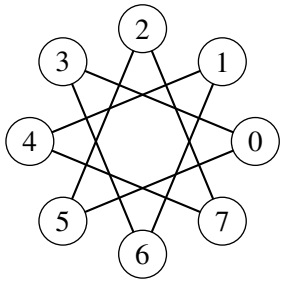
Pregunta 1 (5 puntos)

¿Es bipartito el grafo no dirigido definido por la siguiente matriz de adyacencia nodo-nodo? Justifique.

0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0

Respuesta:

Este es el grafo en cuestión (2p por dibujarlo correctamente):



Es claramente bipartito. Por ejemplo, todos los arcos atraviesan el corte $X = \{1,3,5,7\}$ (3p por decir que es bipartito y justificarlo con un corte o algoritmo de coloreo).

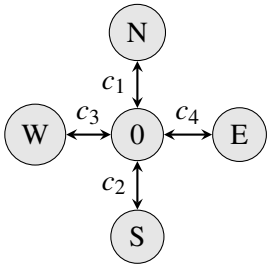
Pregunta 2 (3 puntos)

En clase se presentó una analogía física con estudiantes (nodos) y cuerdas (arcos) del problema de ruta mínima. En una frase: ¿Cómo identificaría visualmente en la analogía física a una ruta mínima desde el origen al destino? ¿y el costo reducido de cada arco?

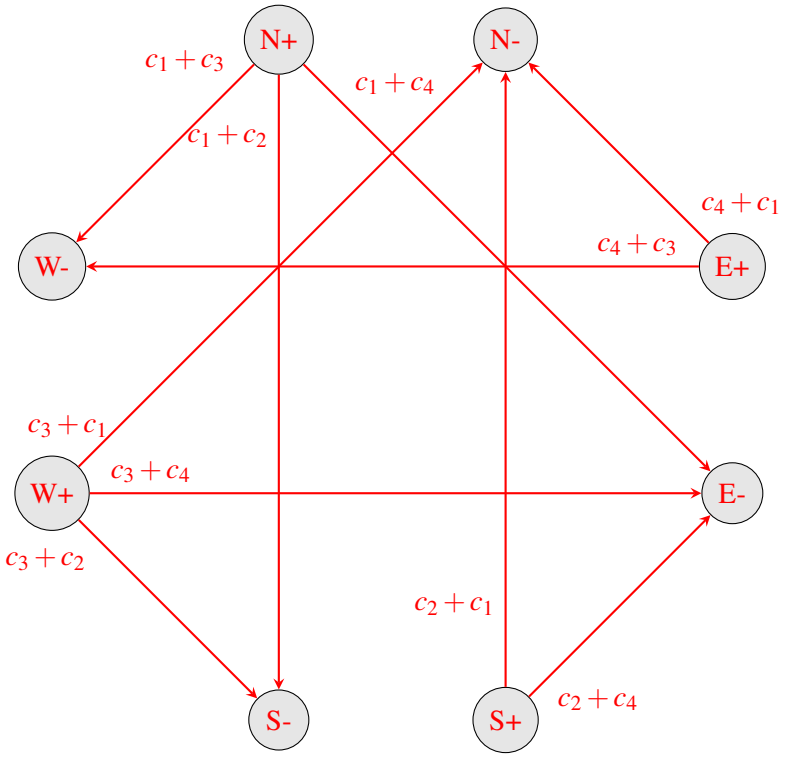
Respuesta: La ruta mínima está capturada en las cuerdas que quedan tirantes al separar al máximo el estudiante-origen del estudiante-destino (2p). El cordel sobrante de arcos que no quedan tirantes es la magnitud del costo reducido positivo (1p).

Pregunta 3 (5 puntos)

Considere una intersección de calles de doble sentido representada por el nodo 0. ¿Cómo transformaría este grafo para modelar que en la intersección no se puede virar en U y, además, no se puede doblar a la izquierda viniendo desde el este o desde el sur? Debe permitir el resto de los movimientos.



Respuesta: Esta es una posible modelación (no es la única, pero se debe revisar que no se permitan vueltas en U. Se otorgan máximo 3 puntos a una modelación que permite cambios de sentido).



Pregunta 4 (22 puntos)

Suponga que usted administra el sistema de distribución de productos utilizado por una empresa de *retail* para abastecer a cuatro tiendas (1, 2, 3 y 4) por vía terrestre desde dos centros de distribución (CD): A y B. Mensualmente, usted debe planificar cómo cubrir la demanda de cada tienda escogiendo en qué cantidad por mes atender a cada tienda desde cada CD. La capacidad mensual de distribución de productos de los centros de distribución A y B son 200 Ton y 400 Ton, respectivamente. Este mes la demanda (en toneladas de productos) de cada tienda se detalla en la siguiente tabla.

Ton/mes	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4
demanda	100	50	150	250

Para ejecutar el transporte de carga, cada mes usted busca las tarifas más convenientes ofrecidas por los operadores que ofrecen transporte terrestre en el mercado. Este mes, las tarifas de transporte (en $/Ton transportada) de los servicios más convenientes entre cada par origen-destino se detallan en la siguiente tabla.

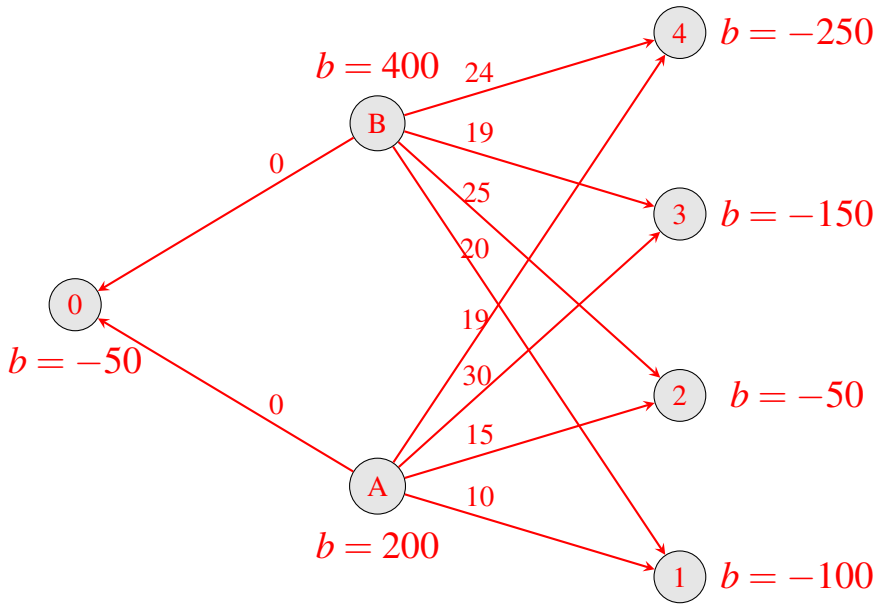
$/Ton	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4
CD A	10	15	30	19
CD B	20	25	19	24

Responda cada una de las siguientes preguntas:

(a) (5p) Formule una instancia del modelo de Flujo en Redes a Costo Mínimo que ayude a planificar la cobertura de demanda mensual de las tiendas a mínimo costo de transporte desde los centros de distribución.

NOTA: No necesita escribir el modelo matemático. Solo dibuje y defina cada elemento del problema incluyendo: nodos, arcos, costos, capacidades y ofertas.

Respuesta: El siguiente grafo detalle la instancia del problema (los arcos no poseen capacidades máximas ni exigencias mínimas de flujo). El nodo 0 representa capacida no utilizada del CD:

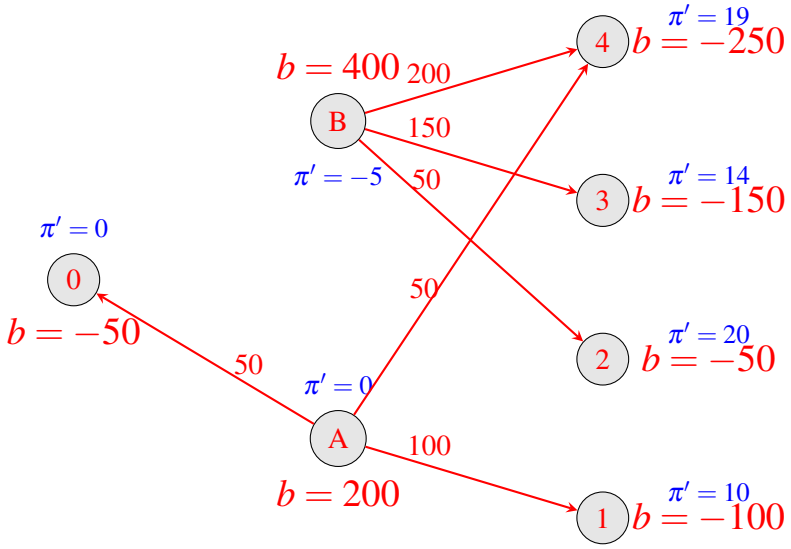


(b) (8p) Considere un plan para este mes en el que la Tienda 1 es abastecida completamente desde el CD A, las tiendas 2 y 3 atendidas completamente desde el CD B y la tienda 4 atendida en un 20% desde el CD A y el 80% restante desde el CD B. ¿Recomendaría este plan? ¿Por qué? Ejecute un algoritmo válido que resuelva esta instancia del problema e identifique un plan de mínimo costo de transporte.

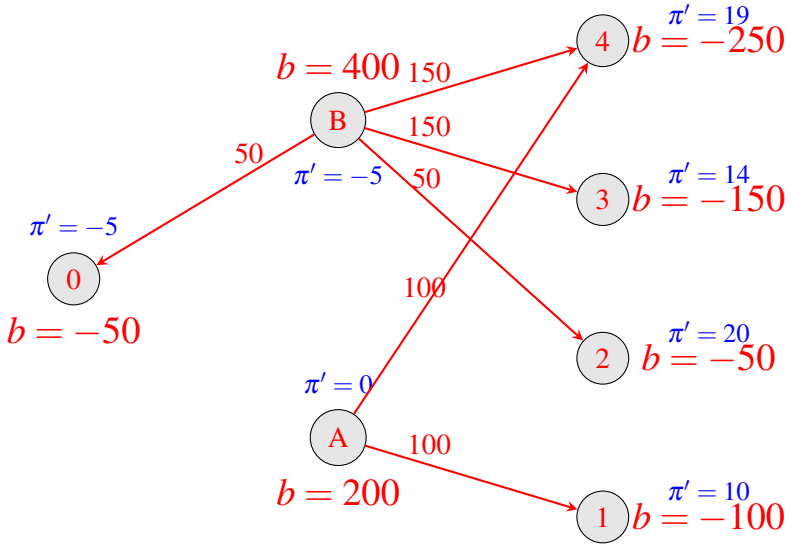
NOTA: No hay puntaje por una solución sin ejecutar el algoritmo y justificar optimalidad.

Respuesta:

El plan señalado es el siguiente y representa una solución básica.

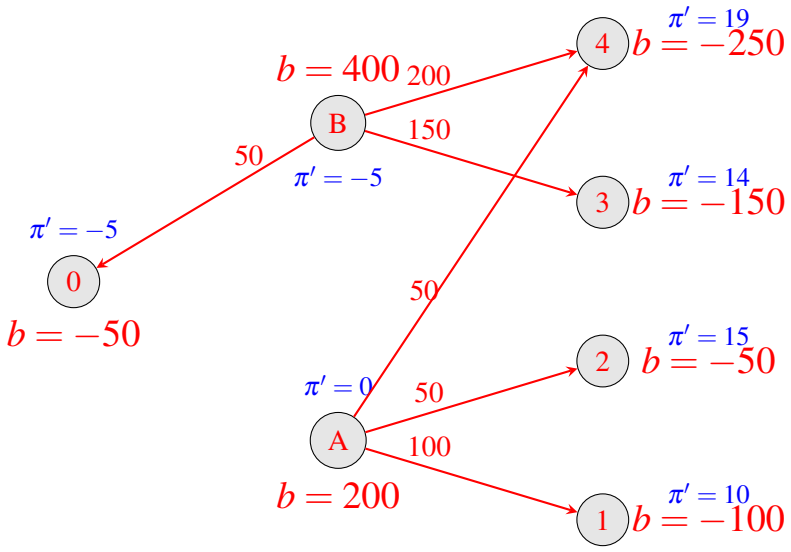


Las variables duales asociadas al plan (con potencial fijo en nodo 0). En este caso el costo reducido de algunas variables de flujo es negativo. Por ejemplo, $r_{B,0} = 0 - (0 - -5) = -5$ (es decir, hay incentivos para subir de valor el flujo por $(B,0)$. Entra $x_{A,2}$ a la base. Sale mín$(x_{A,0} = 50, x_{B,4} = 200) = 5$. Sale $(A,0)$. La siguiente base (y sus valores duales es la siguiente):



En este caso, $r_{A,2} = 15 - (20 - 0) = -5$, por lo que no es óptima. Entra $(A,2)$ y sale mín$(x_{B,2} = 50, x_{A,4} = 100) = 50$. Sale $(B,2)$.

La tercera base es:



En este caso, todos los costos reducidos fuera de base son estrictamente positivos ($r_{A,0} = 5, r_{A,3} = 16$, $r_{B,1} = 5$ y $r_{B,2} = 5$ por lo que es óptima y única.

(c) (2p) Si aumenta en diez toneladas la demanda de la Tienda 2 y en diez más la demanda de la Tienda 4: ¿Qué costo adicional tendría un plan costo-eficiente sobre el mínimo costo calculado para la parte (b)?

Respuesta: Hay que ver el costo de rutas desde el nodo 0 hacia cada caso (desde ahí tendría que salir la carga). Hacia la Tienda 2 sería $\pi'_2 - \pi'_0 = 20$ por ton transportada. Hacia 4 sería $\pi'_4 - \pi'_0 = 24$. El costo adicional sería $20 \cdot 10 + 24 \cdot 10 = 440$.

(d) (2p) Suponga que aparece un nuevo servicio de transporte que permite trasbordar carga entre ambos centros de distribución. ¿Qué valor máximo estaría dispuesto a pagar por Ton transportada? ¿En qué sentido?

Respuesta: Conviene agregar un servicio desde B hacia A pues su diferencia de potencial es positiva (cuesta mover carga desde B hacia A). Específicamente $\pi'_A - \pi'_B = 5$, es decir, estáría dispuesto a pagar cualquier valor entre 0 y $5 - \varepsilon$ por ese servicio y sería rentable.

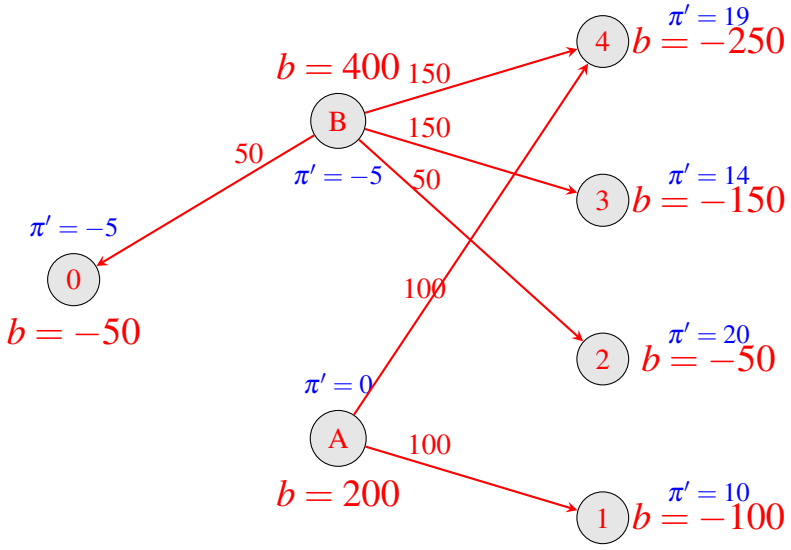
(e) (5p) Considere el contexto de la parte (b), pero suponga adicionalmente que:

- ◇ No es posible transportar más de 150 toneladas al mes entre cada par origen-destino,
- ◇ Por razones de fuerza mayor ya no es posible transportar carga entre el CD A y la Tienda 2.

Identifique un plan de transporte costo-eficiente que cumpla con estas dos nuevas restricciones. Justifique su solución. ¿Cuál es el costo adicional incurrido al cumplir con estas dos restricciones adicionales en comparación con su respuesta en la parte (b)?

NOTA: No necesita ejecutar simplex de redes, sólo identificar una solución y justificar su optimalidad.

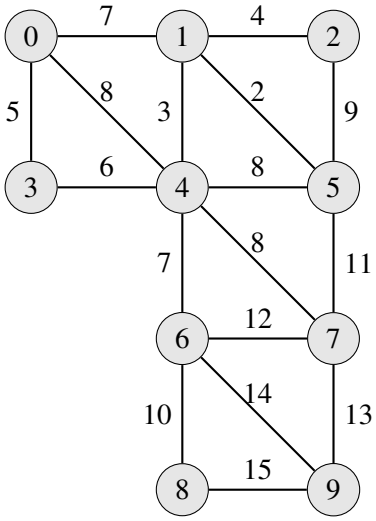
Respuesta: Es un caso de problema acotado con toda cota desde los CD hacia tiendas en $u_{i,j} = 150$ y removiendo la opción del arco $(A,2)$. Lo primero es conseguir una solución básica factible (por ejemplo la determinada en la segundo iteración de la parte b). Tomaremos todas las variables en base y el resto en cota inferior ($L = (A,0),(A,3),(B,1)$, $U = \emptyset$):



En este caso, $r_{A,0} = 5, r_{A,3} = 16, r_{B,1} = 5$, por lo que esta solución (sin el arco $(A,2)$) es óptima en el caso restringido. El costo extra es 250.

Pregunta 5 (15 puntos)

Considere el siguiente grafo no dirigido cuyos costos están detallados sobre cada arco.



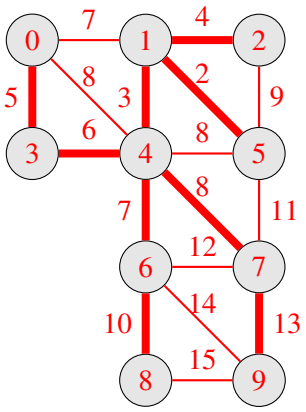
(a) (4p) ¿Posee un tour Euleriano? ¿Y una caminata Euleriana? Justifique.

Respuesta: No posee tour euleriano, pues los nodos 0 y 9 poseen grado impar.

Si hay una caminata Eulearіana, pues hay $n-2 = 8$ nodos de grado par.

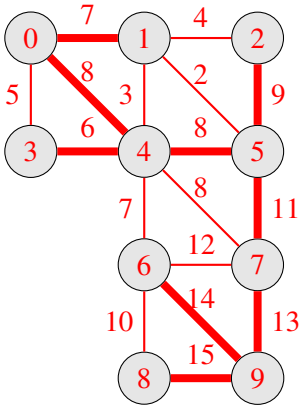
(b) (6p) Ejecute el algoritmo de Prim y obtenga un árbol de envergadura máxima de mínimo costo (AMEM) (basta con dibujar el AMEM e indicar la secuencia de selección de arcos). ¿Cuál es el costo del AMEM?

Respuesta: Este es un AMEM de costo 58. La secuencia de ingreso en el algoritmo comenzando desde el nodo 0 es: $0,3,4,1,5,2,6,7,8,9$



(c) (5p) Un estudiante dice que para este grafo existe un árbol de envergadura máxima cuyos costos suman 91. ¿Es posible? Justifique.

Respuesta: Para ver si es posible, primero veamos el árbol de máximo valor seleccionando al arco de máximo costo en cada corte hacia nodos no visitados. Este es el resultado:



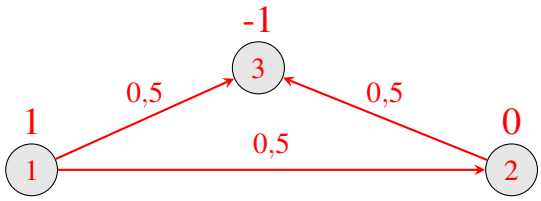
En este caso su valor es exactamente 91, por lo que es posible tener el árbol que señala el alumno.

Pregunta 6 (5 puntos)

Considere una PFCM no capacitado sobre una red dirigida $G = (N, A)$ con $n = |N|$ nodos, datos de costo c_a para cada arco $a \in A$ y datos de oferta b_i para cada nodo $i \in N$ tal que $\sum_{i \in N} b_i = 0$.

Un compañero de ICT2233 le dice que puede construir una instancia de PFCM con datos enteros de costo, de capacidad y de oferta tal que tenga una solución óptima con valores fraccionarios. ¿Qué dice usted? ¿Está esa persona en lo correcto? Argumente.

Respuesta: Su compañero está en lo correcto, el problema tiene vértices enteros, pero perfectamente podría haber una solución no vértice óptima y fraccionaria. Por ejemplo la siguiente solución es óptima si todos los costos son cero y las capacidades mínimas y máximas en cada arco son 0 y 1, respectivamente:



Pregunta 7 (5 puntos)

Defina $g^* = \text{máx}_{i \in N} g_i$, es decir, el máximo grado sobre todos los nodos de un árbol cualquiera. Argumente lógicamente que este árbol debe tener al menos g^* hojas (nodos de grado 1).

Respuesta: Tome ese nodo de grado g^*, elimínelo y borre todos su arcos incidentes. Quedan g^* subgrafos acíclicos y conexos en los nodos asociados al subgrafo (es decir, árboles de env. máxima sobre cada subgrafo). Hay dos posibilidades para cada componente:

- ◇ La componente es un nodo aislado. Esto implica que en el grafo original era una hoja.
- ◇ La componente tiene más de un nodo. Esto implica que tiene al menos 2 hojas y sólo una puede haber sido creada por la desconexión. Al menos una hoja debe pertenecer al árbol original.

Esto suma al menos g^* hojas en el árbol original.