PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Dpto. de Ingeniería de Transporte y Logística

Curso: ICT2233
Semestre: 01'2022
Profesor: Mathias Klapp

INTERROGACIÓN 1
FLUJO EN REDES - ICT2233

TIEMPO: 90 MINUTOS

- *La prueba tiene tres preguntas que suman 60 puntos.*
- *¡Coloque nombre en el cuadernillo y no lo separe!* ***Se penalizará con 4 puntos a quien no siga esta instrucción****.*
- *Sea estratégico, las preguntas tienen diferente puntaje.*
- *La prueba es sin apuntes y/o equipos electrónicos. Se permite formulario de una hoja escrito a mano.*
- *Dos rondas de pregunta al profesor (al inicio y cuando la prueba lleve un 50% de avance). No hacer preguntas en otro momento por favor para no desconcentrar a sus pares.*

¡Éxito!

Pregunta 1 (21 puntos)

Responda independientemente a cada una de las siguientes seis preguntas considerando que se habla de grafo no dirigido $G = (N, A)$, donde $N := \{1, 2, \ldots, n\}$ es su conjunto de nodos y A es su conjunto de arcos.

(a) (2p) ¿Puede ser G completo y bipartito? Brinde un ejemplo o argumente imposibilidad.

Respuesta: Si, un grafo de $n = 2$ nodos y un arco entre ellos.

(b) (3p) "Si G es bipartito, cada uno de sus subgrafos también lo es."

¿Verdadero o falso? Argumente veracidad o brinde un contraejemplo.

Respuesta: Verdadero. Un subgrafo de un grafo sin ciclos pares tampoco tiene ciclos pares.

(c) (3p) "Si G posee un tour euleriano y existe un subconjunto de arcos $C \subset A$ que forma un ciclo en G, entonces el grafo $G' := (N, A \setminus C)$ posee un tour euleriano."

¿Verdadero o falso? Argumente veracidad o brinde un contraejemplo.

Respuesta: Verdadero. Si G posee TE, entonces todos su grados son pares. Por otro lado, un ciclo C toca con dos arcos a cada nodo que lo compone. Luego, $(N, A \setminus C)$ debe posee grado par (un número par menos dos es par).

(d) (4p) ¿Existe un grafo G en donde los nodos poseen todos un grado diferente? Explique su respuesta.

Respuesta: Es imposible. En un grafo de n nodos, su mayor grado es $n-1$. Para que todo nodo posean grado diferente debe haber uno de grado $n-1$, otro de grado $n-2$,..., otro de grado 1 y uno de grado 0. Esto es contradictorio, pues el nodo de grado $n-1$ debe alcanzar a todos (incluido el de grado 0).

(e) (4p) Si G es completo y $n \geq 3$: ¿Cuántas rutas diferentes hay desde el nodo 1 hacia el nodo 2 que visitan al nodo 3 entremedio? Entregue un resultado en función de n y justifíquelo.

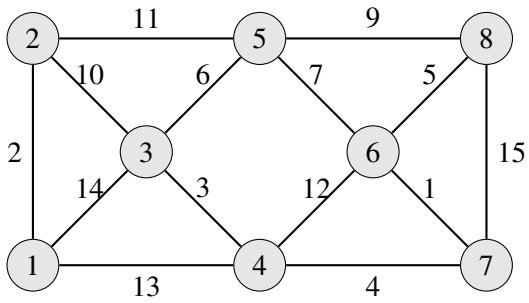
Respuesta: Hay $\sum_{k=3}^{n} \binom{n-3}{k-3} \cdot (k-2)!$ rutas. Se debe sumar sobre todas las posibles rutas de k nodos que cumplan esta propiedad desde $k = 3$ hasta $k = n$. Además, aparte de los nodos $\{1, 2, 3\}$ la ruta de k nodos debe tener otros $k-3$ nodos entre $n-3$ posibles (hay $\binom{n-3}{k-3}$ formas posibles). Luego, los $k-2$ nodos entre 1 y 2 pueden permutarse en cualquier orden.

(f) (5p) Si todo nodo de G posee grado $k \geq 2$, argumente que debe haber al menos una ruta que visita a k nodos.

Respuesta: Probemos por contradicción y supongamos que es falso. Esto implica que existe un grafo G tal que $g_i \geq k, \forall i \in N$ y que la ruta más larga $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ posee $p < k$ nodos. Como i_1 posee grado k es vecino de k nodos y, por lo tanto, es vecino de otro nodo fuera de los $p-1 < k-1$ nodos restantes $\{i_2, \ldots, i_p\}$ en la ruta. Ello implica que la ruta podría extenderse y tener $p+1$ nodos (contradicción).

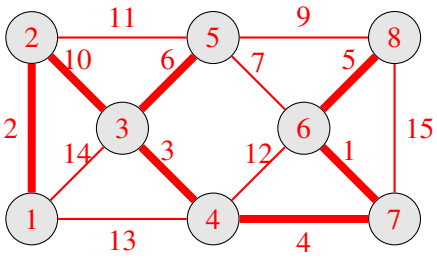
Pregunta 2 (16 puntos)

(a) (5p) Considere el siguiente grafo no dirigido cuyos costos están detallados sobre cada arco.



Obtenga un AMEM aplicando el algoritmo de Prim (basta con dibujar el grafo y explicitar la secuencia de arcos que seleccionó). ¿Cuál es el costo del AMEM?

Respuesta: Esta es la única solución con costo 31.



(b) Ahora considere un "bosque" de un grafo no dirigido cualquiera $G := (N, A)$. Un bosque generaliza el concepto de árbol. Formalmente, un bosque de $k \geq 1$ componentes es un subgrafo expandido acíclico de G (no necesariamente conexo), donde cada una de sus componentes es un árbol sobre un subconjunto de los nodos.

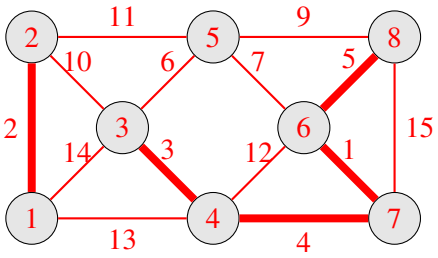
- ◇ (6p) Argumente que un bosque de k componentes posee $n - k$ arcos.

  Respuesta: Supongamos que el bosque posee k componentes. Cada componente forma un árbol sobre los nodos de ese subgrafo y posee $n_i - 1$ arcos, donde n_i es su número de nodos $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$. Si sumamos los arcos queda $\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k$.

- ◇ (5p) Explique como adaptaría el algoritmo de Prim para identificar un bosque de mínimo costo con k componentes en G. Luego, identifíquelo en el grafo de la subpregunta (a) para $k = 3$.

  Respuesta: Después de terminar, remover los $k - 1$ arcos de mayor costo. Otra opción es iniciar con k nodos e ir expandiendo cada uno como Prim, pero escogiendo siempre la expansión más barata hasta llegar a $n - k$ arcos.

  Respuesta: Esta es la única solución con costo 15.



Pregunta 3 (23 puntos)

Suponga que usted administra una cadena de *retail* que importa productos de consumo masivo a Chile desde el extranjero. Cada mes usted debe planificar cómo satisfacer la demanda de sus cuatro centros de distribución (CD) localizados en Quilpué, Santiago, Melipilla y Rancagua. Cada CD demanda mensualmente mercancía que está consolidada en contenedores de 20 pies. El detalle de demanda medida en *Twenty-foot equivalent units* o TEU se entrega en la siguiente tabla.

TEUs/mes	**Quilpué**	**Santiago**	**Melipilla**	**Rancagua**
demanda	3	15	7	5

Para satisfacer la demanda de sus CDs, usted debe importar la mercancía (en TEUs) desde el exterior y escoger en qué puerto ingresará cada TEU a Chile. Si un TEU ingresa por el puerto de Valparaiso, usted pagará una tarifa portuaria de $30 mil por TEU. Por el mismo trabajo, el puerto de San Antonio cobra $15 mil. Suponga que el costo de transporte marítimo internacional por TEU desde su proveedor en el extranjero hacia cualquiera de los dos puertos es igual.

Después de que un contenedor es ingresado por uno de los puertos, este TEU es montado sobre un camión con remolque y transportado a su CD de destino. El costo de transporte caminero por TEU depende del par origen-destino y se detalla en la siguiente tabla:

$/TEU	**Quilpué**	**Santiago**	**Melipilla**	**Rancagua**
Valparaiso	$20 mil	$110 mil	$100 mil	$200 mil
San Antonio	$100 mil	$130 mil	$60 mil	$160 mil

Responda cuidadosamente a cada una de las siguientes preguntas:

(a) (6p) Formule una instancia del modelo de Flujo en Redes a Costo Mínimo que ayude a satisfacer demanda mensual a mínimo costo de importación y transporte de contenedores.

NOTA: No necesita escribir el modelo matemático. Solo dibuje o defina todos los elementos del problema incluyendo: nodos, arcos, costos, cotas y ofertas.

Respuesta: El siguiente grafo detalle la instancia del problema (los arcos no poseen capacidades máximas ni exigencias mínimas de flujo):

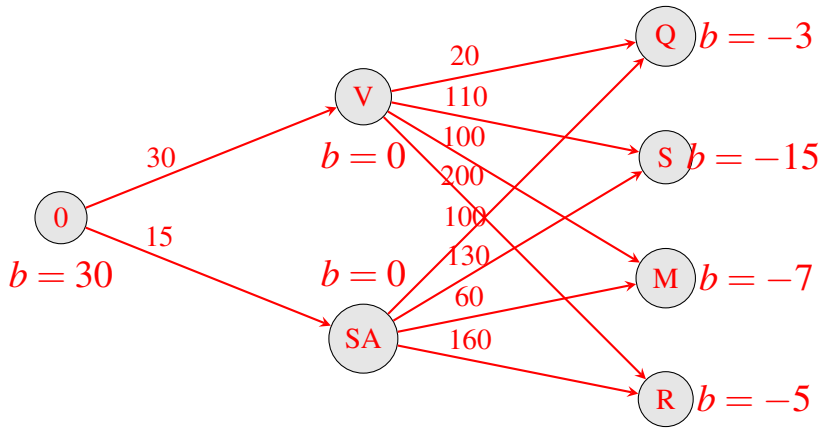


Figura 1: Instancia del problema

(b) (4p) Identifique una solución óptima para la instancia anterior y justifique por qué es costo-eficiente mediante condiciones de optimalidad. ¿Es la solución óptima única?

NOTA: No se da puntaje por soluciones sin justificación de optimalidad.

NOTA 2: No requiere ejecutar simplex, solo justificar optimalidad.

Respuesta: Es fácil ver que la solución óptima es:

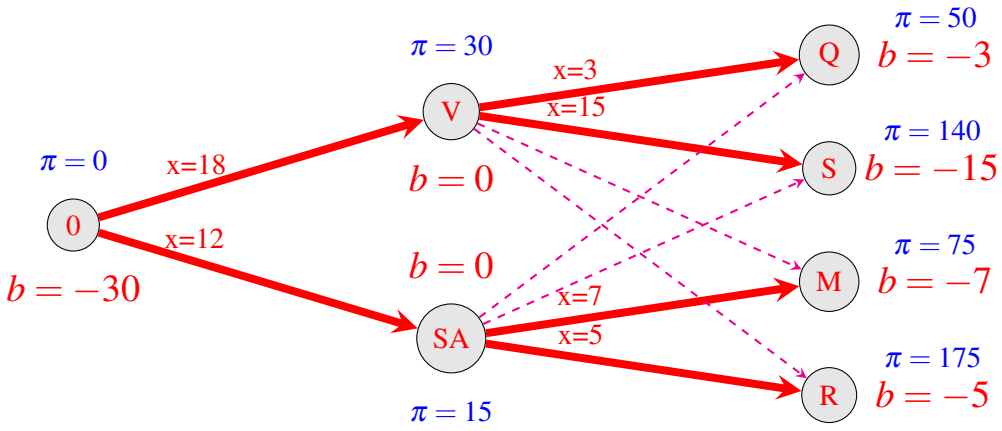


Figura 2: solución

Los costos reducidos no básicos son todos positivos, por lo que la solución es óptima y única:

- $r_{V,M} = 100 - (75 - 30) = 55$
- $r_{V,R} = 200 - (175 - 30) = 55$
- $r_{SA,S} = 130 - (140 - 15) = 5$
- $r_{SA,Q} = 100 - (50 - 15) = 65$

(c) (3p) Si usted es un administrador racional: ¿Qué valor máximo estaría dispuesto a pagar por TEU si aparece un nuevo servicio de transporte entre Melipilla y Santiago?

Respuesta: Hasta la diferencia de potencial, es decir: $140 - 75 = 65$

(d) (4p) Si usted es un administrador racional: ¿Qué rango de valores puede tener la tarifa portuaria por TEU del puerto de San Antonio (ahora en $ 15 mil) para que usted no cambie su plan? Qué haría si la tarifa baja o sube fuera de ese rango?

Respuesta: Tomamos nuestra solución y parametrizamos potenciales en función del costo $c_{0,SA} = c$

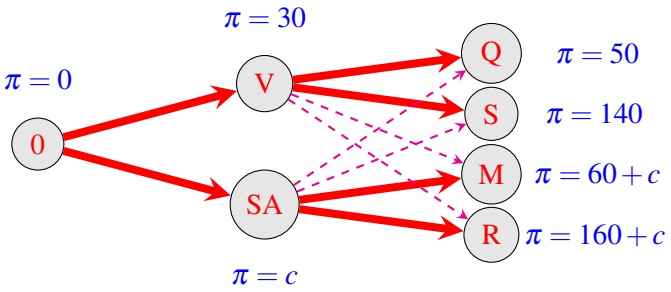


Figura 3: solución

Los costos reducidos no básicos serán todos positivos si:

- $r_{V,M} = 100 - (60 + c - 30) = 70 - c \geq 0$

- $r_{V,R} = 200 - (160 + c - 30) = 130 - c \geq 0$
- $r_{SA,S} = 130 - (140 - c) = c - 10 \geq 0$
- $r_{SA,Q} = 100 - (50 - c) = c + 50 \geq 0$

Por lo tanto, para no cambiar el plan se debe tener $10 \leq c \leq 70$. Si $c < 10$, conviene re-rutear la carga que va a Santiago a través de San Antonio. Si $c > 70$, comienza a ser conveniente mover carga a Melipilla desde Valparaiso.

(e) (6p) Rediseñe su solución óptima si además posee estas restricciones adicionales:

- El puerto de Valparaiso limita el ingreso de contenedores a un máximo de 13 TEUs por mes
- El puerto de San Antonio limita el ingreso de contenedores a un máximo de 20 TEUs por mes
- Por contrato fijo debe transportar al menos 12 TEU/mes entre Valparaiso y Santiago y, además, otros 6 TEU/mes entre San Antonio y Melipilla.

Vuelva a justificar optimalidad. ¿Cuál es el costo añadido por las restricciones adicionales?

Respuesta: El problema se vuelve un PFCM con cotas. Esta es la configuración de base óptima:

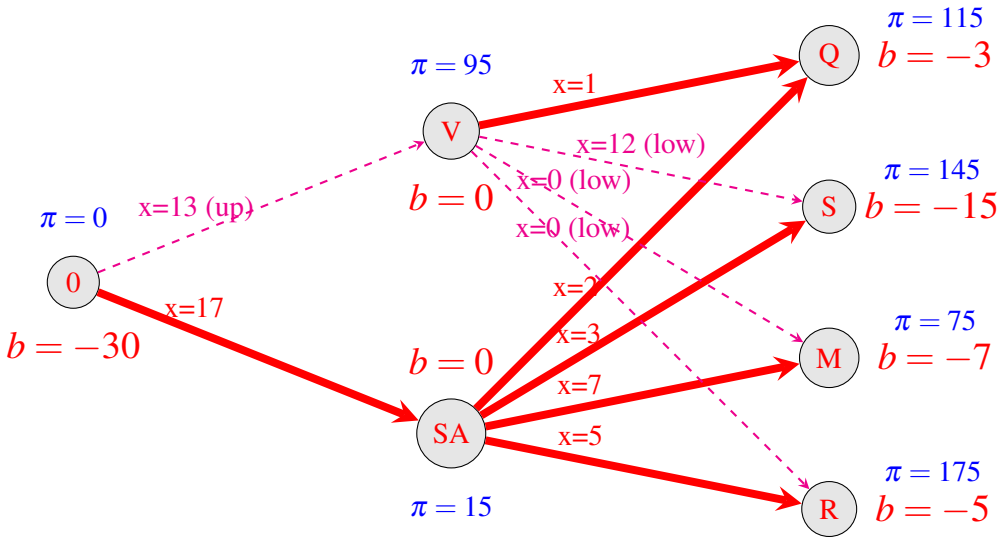


Figura 4: solución

Los costos reducidos no básicos el cota inferior/superior son todos no negativos/no positivos, por lo que la solución es óptima:

- $r_{0,V} = 30 - (95 - 0) = -65 \leq 0$
- $r_{V,S} = 110 - (145 - 95) = 60 \geq 0$
- $r_{V,M} = 100 - (75 - 95) = 120 \geq 0$
- $r_{V,R} = 200 - (175 - 95) = 120 \geq 0$