PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DPTO. DE INGENIERÍA DE TRANSPORTE Y LOGÍSTICA

Curso: ICT2233
Semestre: 2024-01
Profesor: Mathias Klapp

INTERROGACIÓN 1
FLUJO EN REDES - ICT2233

TIEMPO: 120 MINUTOS

- *La prueba tiene 60 puntos distribuidos entre todas sus preguntas.*
- *¡Coloque nombre en el cuadernillo y no lo separe!*
- *La prueba es sin apuntes y/o equipos electrónicos. Se permite resumen de una hoja escrito a mano.*

Pregunta 1 (15 puntos)

i. Representación computacional (7 puntos)

Considere la siguiente matriz de incidencia nodo–arco que representa a un grafo dirigido:

nodo / arco	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	0	1	-1	0	-1	-1	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	0
4	0	-1	0	-1	1	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	-1	0	0	-1	1	0	0	-1	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	-1

Entregue:

(a) (1) El conjunto de arcos entrantes al nodo 4.

(b) (2) El conjunto de arcos salientes del corte $\{1,2,4,5\}$.

(c) (4) Su matriz de adyacencia nodo–nodo.

Respuesta:

(a) $\{b,d\}$ (los -1 en la fila 4)

(b) $\{i,l\}$ (sumar las 4 filas y ver los valores 1)

(c) La matriz sería:

nodo / nodo	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	1	0
2	0	0	0	1	0	1
3	0	1	0	0	1	0
4	0	1	0	0	1	0
5	0	1	0	0	0	1
6	0	0	1	0	0	0

ii. Verdadero o falso (8 puntos)

Para cada una de la siguientes frases: ¿Es verdadera o falsa? Justifique.

(a) (2p) Todo subgrafo de un grafo bipartito es bipartito.

Respuesta: Verdadero, un grafo es bipartito si y solo si no tiene ciclos impares. Un subgrafo de un grafo que no tiene ciclos impares tampoco tiene ciclos impares.

(b) (2p) Todo subgrafo de un grafo con tour euleriano posee un tour euleriano.

Respuesta: Falso, tome un subconjunto de los nodos, pero con solo un arco.

(c) (2p) Si en un grafo dirigido (N,A) existe una ruta dirigida entre $i \in N$ y $j \in N$ con $i \neq j$, entonces existe una caminata dirigida entre i y j.

Respuesta: Verdadero, una ruta es también una caminata.

(d) (2p) Si en un grafo dirigido (N,A) existe una caminata dirigida entre $i \in N$ y $j \in N$ con $i \neq j$, entonces existe una ruta dirigida entre i y j.

Respuesta: Verdadero. Hay dos posibilidades:

- La caminata es una ruta (no repite nodos).
- La caminata repite nodos. Una caminata cualquiera entre $i \in N$ y $j \in N$ está dada por una secuencia de p nodos $(i = i_0, i_1, i_2, \ldots, i_{p-1} = j)$. Al repetir nodos, existen índices $k_1 < k_2$ tal que $i_{k_1} = i_{k_2}$. Por ello, se puede construir una nueva caminata $(i_0, i_1, i_2, \ldots, i_{k_1}, i_{k_2+1}, i_{p-1})$, donde el arco (i_{k_1}, i_{k_2+1}) debe existir. La nueva caminata repite un nodo menos que la anterior. Repetir hasta tener una ruta.

Pregunta 2 (9 puntos)

Un grafo no dirigido completo $K(n)$ contiene los nodos $N = \{1, \ldots, n\}$ y todos los arcos posibles entre cada par de nodos (sin arcos paralelos).

(a) (2p)¿Cuantos arcos posee $K(n)$? Justifique.

Respuesta: Cada nodo i es vecino de $(i-1)$ nodos con índice menor a i. Por ello, hay $\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \sum_{i=0}^{n-1} i = n(n-1)/2$ arcos.

Nota de corrección: Otra forma es decir que cada nodo es vecino de $n-1$ nodos. Por ello, el grado total es $n(n-1)$. Para contar arcos se divide en dos porque cada arco aporta 2 unidades de grado.

(b) (2p) ¿Para qué conjunto de valores de n hay un tour euleriano en el grafo $K(n)$? Justifique.

Respuesta: El valor de n debe ser impar. Esto hace que todos los nodos tengan grado $n-1$ (par), lo que implica la existencia de un ciclo euleriano.

(c) (5p) Considere un trio de nodos diferentes $i, j, k \in N$. En $K(n)$: ¿Cuántas rutas hay entre i y j que pasan por el nodo k? Exprese su respuesta en función de n.

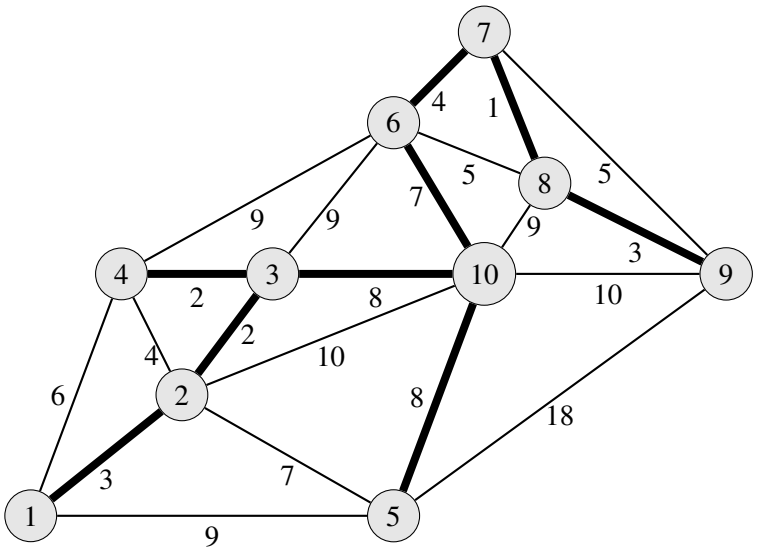
Respuesta: La cantidad de rutas existentes entre i y j que visitan al nodo k es

$$\sum_{\ell=0}^{n-3} \frac{(n-3)!}{(n-3-\ell)!} \cdot (\ell+1) = (n-3)! \cdot \sum_{x=0}^{n-3} \frac{(n-2-x)}{x!}$$

,donde ℓ es la cantidad de nodos diferentes a i, j, k que posee la ruta (puede ir de 0 a $n-3$ nodos). El valor $\frac{(n-3)!}{(n-3-\ell)!}$ es la cantidad de permutaciones posibles de estos nodos diferentes a i, j, k. Finalmente, se multiplica por $(\ell+1)$ por las posibles inserciones de k en la ruta entre i y j.

Pregunta 3 (11 puntos)

Considere el grafo G no dirigido descrito en la figura a continuación. Cada arco tiene etiquetado su costo de construcción. En negrita se destaca un árbol de envergadura máxima.



(a) (3p) ¿Cumple este árbol el principio de optimalidad por cortes? Explique su respuesta.

Respuesta: No cumple. El arco $\{2,5\}$ que atraviesa el corte $\{1,2,3,4\}$ es más barato que el arco $\{3,10\}$ utilizado en el árbol.

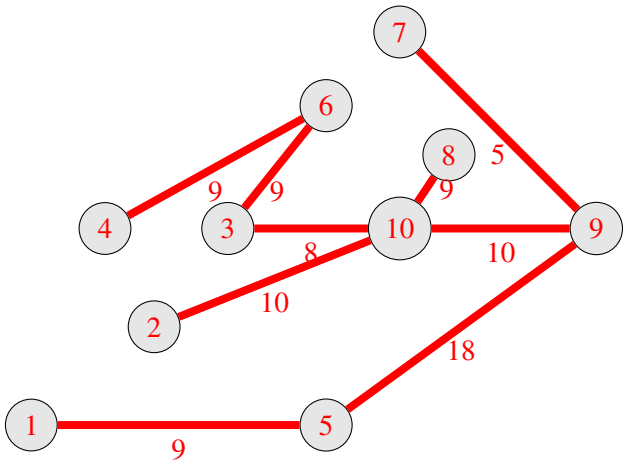
(b) (2p) ¿Es este un árbol de envergadura máxima a mínimo costo? Explique su respuesta.

Respuesta: No, pues no cumple optimalidad por cortes y eso equivale a no ser un AMEM. Otra opción es mostrar que existe un árbol más barato.

(c) (6p) Modifique el algoritmo de Prim para identificar el árbol de envergadura máxima a **máximo** costo. Ejecute el algoritmo de Prim con dicha modificación sobre este grafo y señale claramente el orden de inclusión de nodos al árbol comenzando el algoritmo en el nodo 1. ¿Cuánto cuesta el árbol de máximo costo?

Respuesta: Basta con agregar al árbol parcial el arco de máximo costo del corte en cada iteración. El orden de inserción es 1–5–9–10–2–8–3–6–4–7 y el costo es 87

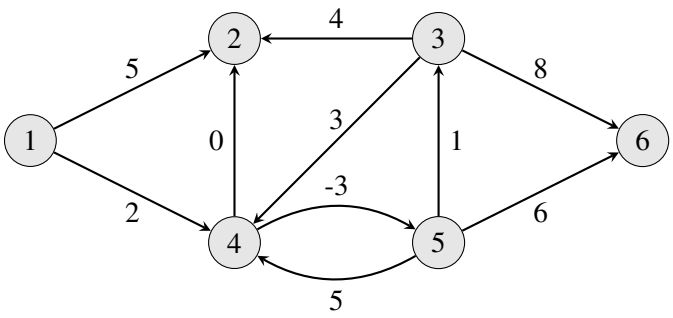
Quedaría el siguiente árbol (**Nota de corrección:** no necesita dibujarlo):



Pregunta 4 (17 puntos)

A continuación se detalla un PFCM sin capacidades en arcos sobre una red (N,A) de 6 nodos. Los costos c_a por unidad de flujo en cada arco $a \in A$ están detallados sobre cada arco. Las ofertas netas b_i en cada nodo $i \in N$ son desconocidas, pero se conocen tres soluciones factibles:

- $x_{12} = 1, x_{14} = 1, x_{54} = 5, x_{42} = 1, x_{56} = 3$ y el resto de los flujos es cero.
- $x_{14} = 2, x_{32} = 2, x_{34} = 3, x_{53} = 5, x_{56} = 3$ y el resto de los flujos es cero.
- $x_{12} = 1, x_{14} = 1, x_{36} = 2, x_{42} = 1, x_{53} = 2, x_{54} = 5, x_{56} = 1$ y el resto de los flujos es cero.



(a) (3p) ¿Cúal(es) de la(s) solucion(es) entregada(s) es un vértice? Justifique.

(b) (3p) Derive el valor de b_i para cada nodo i.

(c) (6p) Encuentre una solución óptima de este PFCM ejecutando simplex de redes desde un vértice identificado en la primera pregunta.

(d) (2p) ¿Hasta qué valor puede bajar el costo $c_{1,2}$ (ahora en 5) para mantener óptima a esta solución?

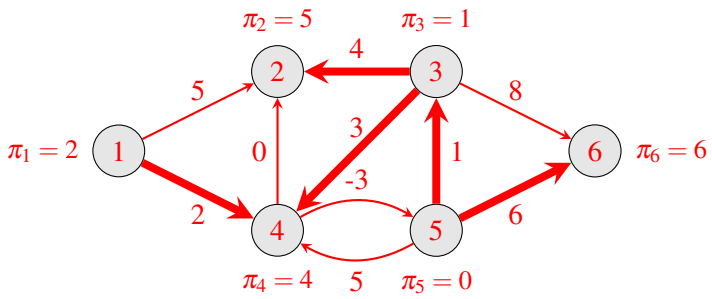
(e) (3p) ¿En qué área pueden estar los valores de los costos $c_{1,4}$ y $c_{4,2}$ (actualmente en 2 y 0) para mantener óptima a esta solución?

Respuesta:

(a) La segunda solución es un vértice (es un árbol), mientras que la primera y la tercera no lo son (poseen ciclos).

(b) Se puede evaluar cualquiera de las tres soluciones y obtener b_i a partir del flujo neto que sale de cada nodo. Se obtiene $b = [2, -2, 0, -5, 8, -3]$.

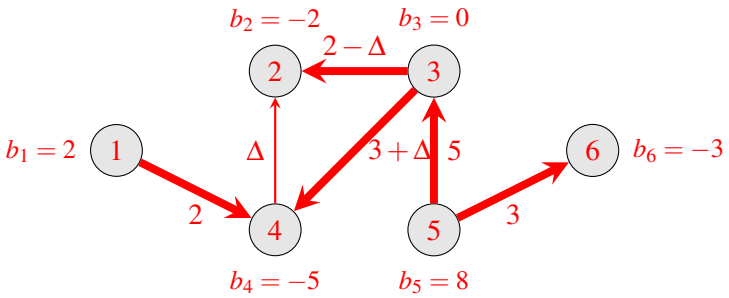
(c) Iniciando en el vértice entregado se obtiene el grafo a continuación que detalla costos y potenciales.



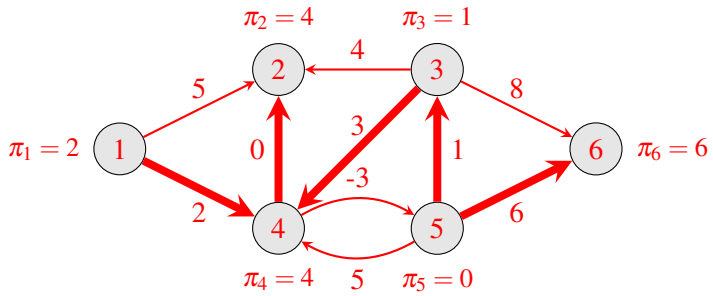
Los costos reducidos fuera de base ($r = c - \Delta\pi$) son

- $r_{12} = 5 - (5 - 2) = 2$
- $r_{36} = 8 - (6 - 1) = 3$
- $r_{42} = 0 - (5 - 4) = -1$
- $r_{45} = -3 - (0 - 4) = 1$
- $r_{54} = 5 - (4 - 0) = 1$

, por lo que entra $(4,2)$ a la base con flujo $\Delta = 2$ y sale $(3,2)$ de la base.



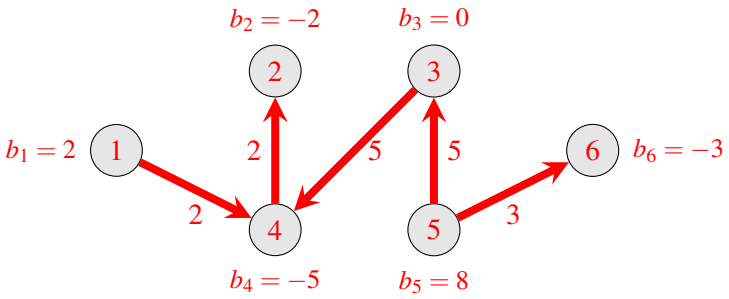
La nueva base con costos y potenciales es:



Los costos reducidos fuera de base ($r = c - \Delta\pi$) son

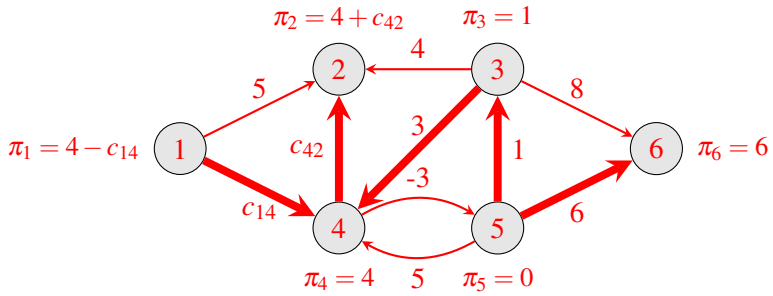
- $r_{12} = 5 - (4 - 2) = 3$
- $r_{36} = 8 - (6 - 1) = 3$
- $r_{32} = 4 - (4 - 1) = 1$
- $r_{45} = -3 - (0 - 4) = 1$
- $r_{54} = 5 - (4 - 0) = 1$

Por ello, la solución óptima y única es:



(d) Se debe cumplir $r_{1,2} = c_{1,2} - (4-2) > 0$, lo que implica $c_{1,2} > 2$.

(e) En este caso de debe recalcular los potenciales en función de los cambios:



Los costos reducidos fuera de base ($r = c - \Delta\pi$) son

- $r_{12} = 5 - (4 + c_{42} - (4 - c_{14})) = 5 - c_{14} - c_{42}$
- $r_{36} = 8 - (6 - 1) = 3$
- $r_{32} = 4 - (4 + c_{42} - 1) = 1 - c_{42}$
- $r_{45} = -3 - (0 - 4) = 1$
- $r_{54} = 5 - (4 - 0) = 1$

Luego, $c_{42} \leq 1$ y $c_{14} + c_{42} \leq 5$

Pregunta 5 (8 puntos)

Una empresa opera un conjunto S de servicios de transporte público desde un terminal de buses. Cada día, el operador de la empresa asigna un bus a cada uno de los servicios que opera. Cada bus inicia y termina el día en el terminal, puede operar todo el día y puede ejecutar más de un servicio diario, pero máximo uno al mismo tiempo. Un servicio $s \in S$ es básicamente un recorrido que comienza a la hora $a_s \in [0,24)$ en su lugar de partida y finaliza a la hora $b_s \in [0,24)$ en su lugar de término. El tiempo de viaje entre el terminal de buses y el lugar de partida del servicio s es α_s horas, y el tiempo de viaje entre el lugar de término del servicio s y el terminal de buses es β_s horas. Finalmente, cada bus debe pasar por el terminal al menos 30 minutos entre dos servicios consecutivos atendidos para cargar combustible y potencialmente cambiar de conductor.

Formule un PFCM que permita responder cuál es el mínimo número de buses diarios requeridos para atender a cada servicio en S. Defina el grafo del problema con sus nodos y arcos. Luego determine costos y capacidades en arcos y ofertas en nodos. ¿Cómo obtendría la cantidad de buses requeridos leyendo su solución óptima?

Respuesta: Este problema es análogo al de visitadores médicos visto en clase. Formulemos el PFCM:

- ◇ **Nodos**: Agregaremos cuatro tipos de nodo todos con oferta $b = 0$:
  - fuente I
  - sumidero F
  - nodo s^0 que representa el inicio del servicio $s \in S$
  - nodo s^1 que representa el término del servicio $s \in S$
- ◇ **Arcos**: Agregaremos cinco tipos de arco:
  - arcos de inicio del día (I, s^0) para cada $s \in S$ de capacidad máxima 1, flujo mínimo 0 y costo 0.
  - arcos de fin del día (s^1, F) para cada $s \in S$ de capacidad máxima 1, flujo mínimo 0 y costo 0.
  - arcos del servicio (s^0, s^1) para cada $s \in S$ de capacidad máxima 1, flujo mínimo 1 y costo 0.
  - arcos entre servicios consecutivos (s^1, s'^0) para cada $s, s' \in S : s \neq s$ y $a_{s'} \geq b_s + \beta_s + 0{,}5 + \alpha_{s'}$ de capacidad máxima 1, flujo mínimo 0 y costo 0.
  - arco de tamaño de flota (F, I) de capacidad máxima $|S|$, flujo mínimo 0 y costo 1.

Al resolver, el tamaño mínimo de flota correspondería al flujo sobre la variable $x_{F,I}$.

Nota de corrección: Alternativamente se podría dibujar esto y estaría correcto si se añade todo el detalle.

Nota de corrección 2: En la modelación de dará como máximo 9 puntos en 4 opciones de puntaje:

- ◇ Todo 100 % correcto: 9 puntos
- ◇ Un error menor: 7 puntos
- ◇ Más de dos errores menores o uno grave: 5 puntos
- ◇ Otra cosa: 0 puntos

El punto adicional va por responder a cómo obtener la cantidad de buses requeridos leyendo su solución óptima.