PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DPTO. DE INGENIERÍA DE TRANSPORTE Y LOGÍSTICA

Curso: ICT2233
Semestre: 2025-01
Profesor: Mathias Klapp

INTERROGACIÓN 2
FLUJO EN REDES - ICT2233

TIEMPO: 120 MINUTOS

- *La prueba tiene 60 puntos distribuidos entre todas sus preguntas.*
- *¡Coloque nombre en el cuadernillo y no lo separe!*
- *Una ronda de pregunta después de trascurrido una hora de prueba.*
- *La prueba es sin apuntes y/o equipos electrónicos. Se permite resumen de una hoja escrito a mano.*

Pregunta 1 (5 puntos)

Considere un grafo dirigido y conexo $G = (N,A)$ con costos $c_a \geq 0$ en cada arco $a \in A$. Suponga que el conjunto $N := \{1,\ldots,1000\}$ de mil nodos.

Considere el siguiente procedimiento:

- Usted ejecuta el algoritmo Dijkstra desde el nodo 1 hasta llegar a una iteración intermedia en donde cierra el nodo 500. Considere que d^* es la distancia desde el nodo 1 hasta el nodo 500 generada por el algoritmo.
- Luego, usted ejecuta otra vez el algoritmo Dijkstra desde cero, pero iniciándolo desde el nodo 500 y lo corre hasta llegar a la iteración en donde cierra el nodo 1000. Considere que d^{**} es la distancia desde el nodo 500 hasta el nodo 1000 generada por el algoritmo.

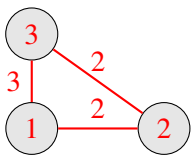
Considerando el concepto de optimalidad de subruta: ¿Puede asegurar que la distancia de ruta mínima desde el nodo 1 hacia el nodo 1000 es igual a $d^* + d^{**}$? Explique.

Respuesta: No necesariamente. Solo si la ruta mínima de 1 a 1000 pasa por el nodo 500, pues representa a la ruta de menor costo desde 1 hacia 1000 obligada a pasar por 500. Esta es solo una ruta factible y la distancia de RM es menor o igual a este valor.

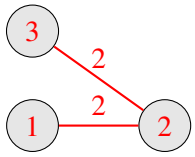
Pregunta 2 (5 puntos)

Considere un grafo no dirigido y conexo $G = (N,A)$ con costos $c_a \geq 0$ en cada arco $a \in A$. A partir de un nodo s arbitrario se calcula un árbol de rutas a mínimo costo al resto del grafo. ¿Es el árbol resultante siempre un AMEM? Justifique.

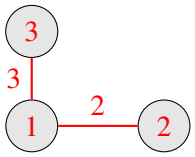
Respuesta: Por supuesto que no. Considere el siguiente grafo no dirigido:



El AMEM es:



, pero el árbol de rutas mínimas desde 1 es:



Pregunta 3 (6 puntos)

Considere un grafo dirigido y conexo $G = (N, A)$, donde N es su conjunto de n nodos y A es su conjunto de m de arcos. Tome un nodo $h \in N$ cualquiera.

- ◇ (5p) Diseñe un algoritmo eficiente que obtenga el ciclo dirigido en G con el menor número de arcos que pasa por el nodo h. NOTA: Por "eficiente" se entiende que el algoritmo posea complejidad polinomial.

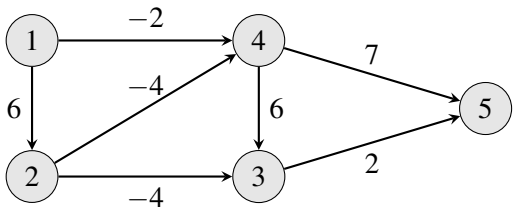
  Respuesta: Copie el nodo h y todos sus arcos de entrada. Sea h' dicha copia. Luego haga BFS e identifique la ruta desde h hacia h'.

- ◇ (1p) ¿Qué complejidad computacional tiene su algoritmo?

  Respuesta: Es $\mathcal{O}(m+n) \approx \mathcal{O}(m)$. Hay que copiar el nodo y sus arcos de entrada en $\mathcal{O}(n)$. Luego, ejecutar BFS sobre una red de $\mathcal{O}(m)$ arcos.

Pregunta 4 (32 puntos)

Considere el siguiente grafo dirigido $G = (N, A)$, en donde cada arco $a \in A$ detalla su costo c_a.



Parte A: (8 puntos)

Suponga que su meta es encontrar el árbol de rutas de mínimo costo desde el nodo 1 hacia el resto del grafo.

(a) (4p) Ejecute el algoritmo de Dijkstra y detalla las actualizaciones de distancia que hace. Comente y explique sobre la calidad de su resultado.

Respuesta: El resultado sería:

Nodo j / d_j	Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3	Iteración 4	Iteración 5
1	0	–	–	–	–
2	∞	6	6	6	6
3	∞	∞	4	–	–
4	∞	-2	–	–	–
5	∞	∞	5	5	–
Nodo a cerrar	1	4	3	5	2

En este caso claramente $d_3 = 4$ no es la distancia de ruta mínima, pues la ruta 1–2–3 accede a 3 a costo 2. El algoritmo claramente falla al existir costos negativos.

Puede ejecutar el algoritmo directamente sobre un grafo y está ok.

(b) (4p) Ahora resuelva el problema con un algoritmo valido visto en clase e identifique el árbol de rutas obtenido. Detalle los pasos de su algoritmo.

Respuesta: Se puede ejecutar ruta mínima por orden topológico (la red es acíclica) o Bellman-Ford. La solución por ruta mínima en orden topológico sería así:

- $d_1^* = 0$
- $d_2^* = d_1^* + 6$
- $d_4^* = \text{mín}(d_1^* - 2, d_2^* - 4) = -2$ (En OT el nodo 4 viene antes que el nodo 3. Equivocarse acá es un error grave.)
- $d_3^* = \text{mín}(d_2^* - 4, d_4^* + 6) = 2$
- $d_5^* = \text{mín}(d_4^* + 7, d_3^* + 2) = 4$

Parte B: (24 puntos)

Ahora, considere un Problema de Flujo en redes a Costo Mínimo (PFCM) sobre el mismo grafo dirigido G de la Parte A. Tome los mismos valores de costo en cada arco, pero que en este caso detallan el costo por unidad de flujo que pasa sobre el arco. Las ofertas netas del PFCM se desconocen, pero el siguiente flujo es factible:

$$x_{12} = 5,\ x_{14} = 3,\ x_{23} = 9,\ x_{24} = 3,\ x_{35} = 9,\ x_{43} = 3\ x_{45} = 1$$

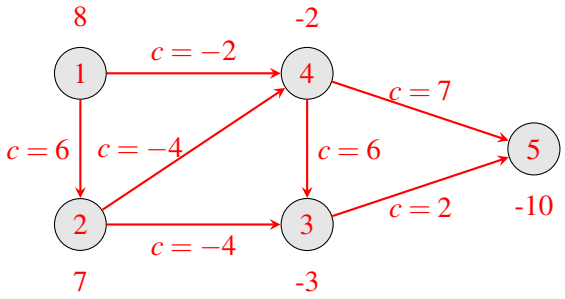
(a) (3p) Derive el valor de la oferta neta b_i en cada nodo $i \in N$ del problema. Explique como lo hizo.
Respuesta: Cada oferta se calcula desde cualquier solución factible **x** como el flujo neto que atraviesa el nodo:

$$b_i = \sum_{a \in \delta_i^+} x_a - \sum_{a \in \delta_i^-} x_a.$$

Luego:

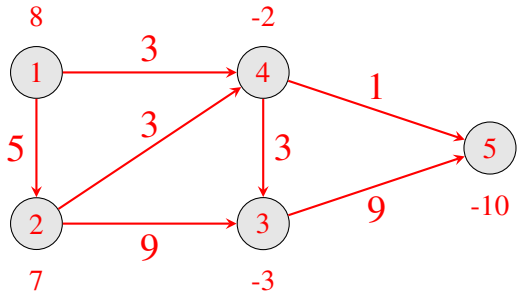
$$b_1 = 5+3 = 8$$
$$b_2 = 9+3-5 = 7$$
$$b_3 = 9+-9-3 = -3$$
$$b_4 = 3+1-3-3 = -2$$
$$b_5 = -9-1 = -10$$

El problema resultante es el siguiente:



(b) (13p) Considere el PFCM no capacitado, es decir, sin flujos mínimos o capacidades máximas en arcos.

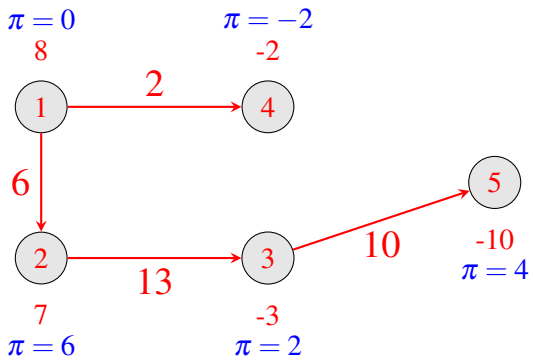
(1) (3p) Argumente que la solución factible entregada no es óptima para el PFCM no capacitado.
Respuesta: Si graficamos el flujo entregado



es fácil ver que esta solución no es óptima, pues se ejecutan varias rutas de diferentes costos entre el mismo par origen-destino. Por ejemplo, para ir desde el nodo 1 hacia el 4 se mueven tres unidades de flujo por el arco $(1,4)$ a costo -2 y otras tres unidades por la ruta $(1,2,4)$ a costo $6-4=2$. La solución sería de menor costo si se mueven esas 6 unidades por el arco $(2,4)$ (NOTA: Este argumento es suficiente).

(II) (8p) Identifique una solución óptima para el PFCM no capacitado (como usted prefiera) y detalle su valor óptimo. Certifique formalmente que su solución es óptima mediante costos reducidos. ¿Es única la solución óptima?

Respuesta: La solución óptima es:



Los costos reducidos de variables fuera de base se calculan como $r_{ij} = c_{ij} - (\pi_j - \pi_i)$ y son todos no negativos. Esto certifica su optimalidad y unicidad.

- $r_{24} = -4 - (-2 - 6) = 4 > 0$
- $r_{43} = 6 - (2 - -2) = 2 > 0$
- $r_{45} = 7 - (4 - -2) = 1 > 0$

El valor óptimo es $v^* = 2 \cdot -2 + 6 \cdot 6 + 13 \cdot -4 + 10 \cdot 2 = 0$

(III) (2p) ¿En qué rango de valores posible puede estar c_{43} (actualmente igual a 6) para mantener el actual conjunto de soluciones óptimas?

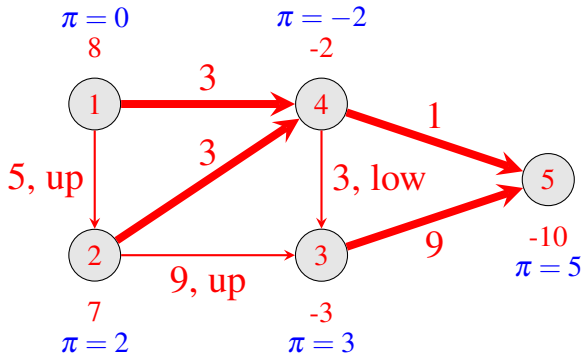
Respuesta: $c_{43} > 4$, pues de lo contrario su costo reducido se hace 0 y cambia el conjunto de soluciones óptimas.

(c) (8p) Ahora considere el PFCM sobre el mismo grafo G y con los mismos costos anteriores, pero considerando las siguientes restricciones adicionales en los siguientes arcos:

- El flujo sobre el arco (43) debe ser mayor o igual a 3.
- El flujo sobre el arco (23) debe ser menor o igual a 9
- El flujo sobre el arco (12) debe ser menor o igual a 5

Obtenga una solución óptima en este nuevo PFCM con estas tres restricciones de capacidad ejecutando el algoritmo simplex de redes desde la solución factible entregada. Certifique formalmente que su solución es óptima para el PFMC con restricciones. ¿Cuánto cuesta la imposición de estas restricciones sobre el valor óptimo?

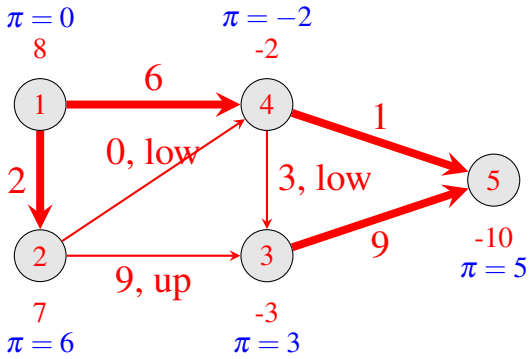
Respuesta: Apliquemos el algoritmo simplex de redes acotado desde el flujo dado. Si graficamos el flujo, vemos que la base sale directamente de los arcos que no se encuentran en cota:



El costo reducido del arco $(1,2)$ es $r_{12} = 6-(2-0) = 4 > 0$, por lo que la solución no es óptima y hay incentivos a bajar su flujo de valor.

Si baja en Δ unidades, entonces el flujo por el arco $(1,4)$ queda en $3+\Delta$ y el del arco $(2,4)$ en $3-\Delta$. Luego el mayor valor posible es $\Delta = 3$ y sucede en el momento que sale de base el arco $(2,4)$ en cota inferior.

La siguiente iteración sería:



Sus costos reducidos de variables fuera de base son:

- $r_{24} = -4-(-2-6) = 4 > 0$ (lo que está bien para variables en cota inferior)
- $r_{43} = 6-(3--2) = 1 > 0$ (lo que está bien para variables en cota inferior)
- $r_{23} = -4-(3-6) = -1 < 0$ (lo que está bien para variables en cota superior)

El valor óptimo es: $v^* = 2\cdot 6+9\cdot -4+6\cdot -2+3\cdot 6+9\cdot 2+1\cdot 7 = 7$. El costo implicado por estas restricciones es 7.

Pregunta 5 (12 puntos)

Considere un grafo dirigido y conexo $G = (N, A)$ cualquiera con $n \geq 2$ nodos y con valores $v_a > 0$ en cada uno de sus arcos $a \in A$. Considere el **problema de ruta máxima**, es decir, encontrar la ruta dirigida desde un nodo s hacia otro nodo t de mayor valor sumado sobre sus arcos.

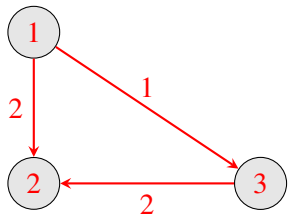
¿En cuáles de los siguientes casos puede asegurar que resolverá cada instancia del problema? Justifique por qué funciona o falla cada caso.

- ◇ (4p) En un grafo acíclico, multiplicando los valores v_a por -1 y luego ejecutando el algoritmo de rutas mínimas sobre un orden topológico de los nodos.

  Respuesta: Si funciona. Mientras no existan ciclos el algoritmo opera y equivale al problema de ruta mínima.

- ◇ (4p) En un grafo cualquiera ejecutando una versión modificada del algoritmo de Dijktra, que en cada iteración cierra el nodo abierto $i \in N$ de mayor distancia d_i y que actualiza la distancia d_j a cada nodo posterior j cuando en el arco (i, j) se cumple que $d_j < d_i + c_{ij}$. En este caso, se re-asigna la distancia como $d_j \leftarrow d_i + c_{ij}$.

  Respuesta: No funciona. Considere el siguiente ejemplo desde el nodo 1 en donde falla:



- ◇ (4p) En un grafo cualquiera, multiplicando los valores v_a por -1 y luego ejecutando el algoritmo de Bellman-Ford.

  Respuesta: Tampoco funciona, pues podría haber ciclos de costo negativo de pasada. En este caso el algoritmo de Bellman-Ford podría fallar.