PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DPTO. DE INGENIERÍA DE TRANSPORTE Y LOGÍSTICA

Curso: ICT2233
Semestre: 2023-01
Profesor: Mathias Klapp

EXAMEN
FLUJO EN REDES - ICT2233

TIEMPO: 150 MINUTOS

- *La prueba tiene 70 puntos distribuidos entre todas sus preguntas y la nota se calcula con 60 puntos. Es decir:*

$$\textit{Nota Examen} = \min(\textit{puntos obtenidos}, 60)/10 + 1$$

  se logra con 60 puntos.
- *Sea estratégico, hay algunas preguntas más difíciles que otras.*
- *¡Coloque nombre en el cuadernillo y no lo separe!* ***Se penalizará con 4 puntos a quien no siga esta instrucción****.*
- *La prueba es sin apuntes y/o equipos electrónicos. Se permite resumen de una hoja escrito a mano.*

Pregunta 1 (8 puntos)

Considere un grafo no dirigido $G = (N, A)$, donde N y A son sus conjuntos de nodos y arcos, respectivamente. Suponga que G solo posee ciclos de 4 o más arcos (no posee ciclos de 3 arcos). Defina, además, el número total de nodos $n := |N|$ y el grado de cada nodo $g_i := |\delta_i|$. Responda cada una de las siguientes preguntas:

(a) (4p) Pruebe que $g_i + g_j \leq n$ para cualquier par de nodos $i, j \in N$ conectados por un arco $\{i, j\} \in A$.

Respuesta: Los nodos i y j no pueden tener un nodo común de vecino, pues de lo contrario se formaría un ciclo de 3 arcos. Luego, la cantidad de arcos que atraviesan el corte $\{i, j\}$ no puede superar $n-2$. Agregando el arco $\{i, j\}$ (que cuenta doble) se obtiene que $g_i + g_j \leq n$.

(b) (4p) Use el resultado anterior y pruebe que G no tiene más de $n^2/4$ arcos.

Ayuda: Use inducción. Primero muestre que se cumple para grafos con 1 y 2 nodos. Luego, argumente que se cumple para un grafo de $n \geq 3$ nodos asumiendo que se cumple para grafos de $n' < n$ nodos.

Respuesta: Con $n \leq 4$ el resultado es evidente. Vamos a probar que se cumple para n, asumiendo que se cumple para cualquier $m < n$, es decir. que el número de arcos en un grafo así con m nodos es menor o igual a $m^2/4$.

Tomemos un grafo de n nodos y sea m su número de arcos.

- Si $n = 1$ o 2, entonces se cumple el resultado.
- Paso inductivo para $n \geq 3$: Elimine dos nodos $u, v \in N$ y todos los arcos incidentes en $\delta_v \cup \delta_u$. El grafo resultante tiene $n-2$ nodos y (por hipótesis de inducción) debe tener a lo más $(n-2)^2/4$ arcos. Adicionando como máximo $n-1$ arcos que tocan los nodos i, j se obtiene que el grafo debe tener como máximo $(n-1) + (n-2)^2/4 = n^2/4$ arcos.

Pregunta 2 (7 puntos)

Asuma un problema de flujo máximo desde un nodo s hacia otro nodo t sobre un grafo dirigido $G = (N, A)$, donde de N y A son sus conjuntos de nodos y arcos, respectivamente. Además, defina $n = |N|$, $m = |A|$ y capacidades no negativas en arcos u_a, $\forall a \in A$. Considere que usted conoce un flujo factible $x \in \mathbb{R}^m$ que define un grafo residual $G_r(x) = (N, A_r(x))$ de G.

(a) (4p) Diseñe un algoritmo eficiente que retorne una ruta aumentable $R \subseteq A_r(x)$ de máxima capacidad desde s hacia t. La capacidad de una ruta R es $\min_{a \in R} \bar{u}_a$, donde $\bar{u}_a$ es la capacidad residual del arco a.

(b) (3p) ¿Qué complejidad computacional posee su algoritmo en función del tamaño de la instancia?

Respuesta: Cualquiera de estas dos formas da puntaje completo.

Forma pseudo-polinomial: Primero implementamos un algoritmo que verifica si es que existe una ruta con capacidad dada $u \in \{0, 1, \ldots, F^*\}$ en tiempo polinomial. Para ello se debe filtrar todo arcos con capacidad mayor o igual a u en el conjunto residual de arcos, *i.e.*, $A_r^u := \{a \in A_r : \bar{u}_a \geq u\}$. Existe una ruta $s - t$ con capacidad u en $G_r = (N, A_r)$ si y solo si existe una ruta $s - t$ en (N, A_r^u). Esto se puede implementar en $\mathcal{O}(m)$.

Luego, se puede encontrar una ruta de máxima capacidad en $\mathcal{O}(\log(U))$ verificaciones mediante búsqueda binaria entre 1 y U (o en $\mathcal{O}(U)$ verificando todos los casos de capacidad (pierde 1 punto acá)). El algoritmo corre en $\mathcal{O}(m \log(F^*)) \leq \mathcal{O}(m \log(nU))$, donde $U = \max_{a \in A} u_a$.

Forma polinomial: Otra alternativa es ejecutar esta variante de Dijkstra:

(a) INICIALIZAR: $d_s = \infty$, $d_i = 0$, para todo $i \in N \setminus \{s\}$. $\mathscr{U} \leftarrow N$.

(b) MIENTRAS $\mathscr{U} \neq \emptyset$.

(I) $k \leftarrow \text{argmax}_{i \in \mathscr{U}} d_i$.

(II) $\mathscr{U} \leftarrow \mathscr{U} \setminus \{k\}$.

(III) Para todo $(k, j) \in A_r$ tal que $d_j < \min(d_k, \bar{u}_{k,j})$: $d_j \leftarrow \min(d_k, \bar{u}_{k,j})$

Al finalizar, el valor de d_t entrega el valor de máxima capacidad de ruta entre s y t. Equipando este algoritmo con predecesores y Heap de Fibonacci se obtiene la ruta de máxima capacidad de flujo en $\mathcal{O}(m + n \log(n))$ operaciones.

Pregunta 3 (5 puntos)

Asuma un problema de flujo máximo desde un nodo s hacia otro nodo t sobre un grafo dirigido $G = (N, A)$, donde de N y A son sus conjuntos de nodos y arcos, respectivamente. Además, defina $n = |N|$, $m = |A|$ y capacidades no negativas en arcos u_a, $\forall a \in A$. Considere que usted conoce un flujo factible $x \in \mathbb{R}^m$ que define un grafo residual $G_r(x) = (N, A_r(x))$ de G.

Muestre que el flujo neto que atraviesa un corte $Q \subset N$ tal que $s, t \notin Q$ es igual a cero.

Respuesta: Tome las restricciones de balance en nodos $i \in N \setminus \{s, t\}$:

$$\sum_{a \in \delta_i^+} x_a - \sum_{a \in \delta_i^-} x_a = 0$$

Sume sobre $i \in Q$:

$$\sum_{i \in Q} \left(\sum_{a \in \delta_i^+} x_a - \sum_{a \in \delta_i^-} x_a \right) = 0$$

, lo que implica:

$$\left(\sum_{a \in \delta_Q^+} x_a - \sum_{a \in \delta_Q^-} x_a \right) = 0.$$

Pregunta 4 (5 puntos)

Considere un grafo no dirigido $G = (N, A)$, donde de N y A son sus conjuntos de nodos y arcos, respectivamente. El grafo también posee costos $c_a \in \mathbb{Z}$ por atravesar cada arco $a \in A$ tales que no contiene ciclos con costo negativo de pasada.

Suponga que alguien busca el árbol de rutas (no dirigidas) a costo mínimo desde un nodo $s \in N$ hacia el resto. Para ello, propone adaptar el algoritmo de Bellman-Ford a grafos no dirigidos de esta manera:

(a) Copie dos veces cada arco $a \in A$ de la red no dirigida (una vez en cada dirección). Asigne a cada arco nuevo dirigido el costo original y forme un conjunto A' de $2 * |A|$ arcos dirigidos.

(b) Implemente el algoritmo de Bellman-Ford sobre la red $G = (N, A')$ desde s.

(c) Retorne el árbol de rutas resultante.

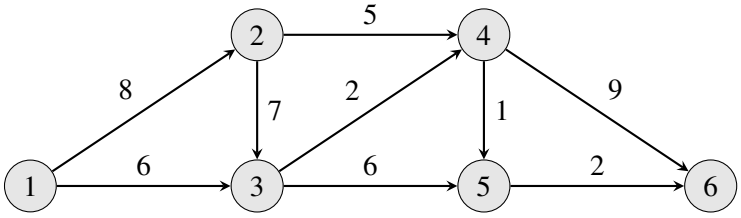
¿Funcionará correctamente este algoritmo en cada caso posible de G?

Ayuda: Si su respuesta es afirmativa, entonces se espera que argumente por qué. Si cree que no, se espera que presente un contraejemplo.

Respuesta: No siempre funcionaría el algoritmo. Al duplicar un arco no dirigido $a = \{i, j\}$ con costo negativo $c_a < 0$ en dos arcos dirigidos (i, j) y (j, i) el ciclo dirigido resultante (i, j, i) tendrá costo de pasada negativo $2 \cdot c_a < 0$ y fallará el algoritmo de B-F.

Pregunta 5 (10 puntos)

Considere el Problema de Flujo Máximo desde 1 a 6 ilustrado sobre el grafo en la figura a continuación. Las capacidades de flujo u_a están detalladas sobre cada arco $a \in A$.

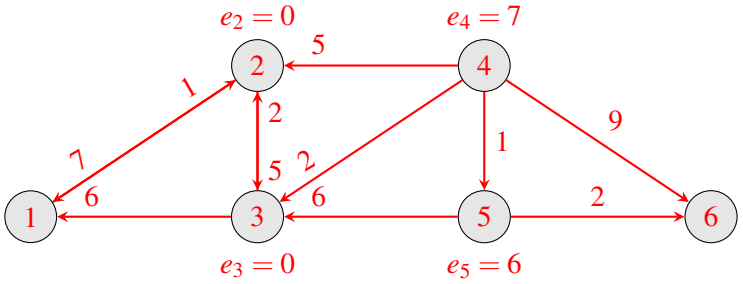


Considere el siguiente preflujo $x \in \mathbb{R}^9$:

arco	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	(3,5)	(4,5)	(4,6)	(5,6)
x_a	7	6	2	5	2	6	0	0	0

(a) (2p) Dibuje su grafo residual detallando excesos de flujo en cada nodo.

Respuesta:

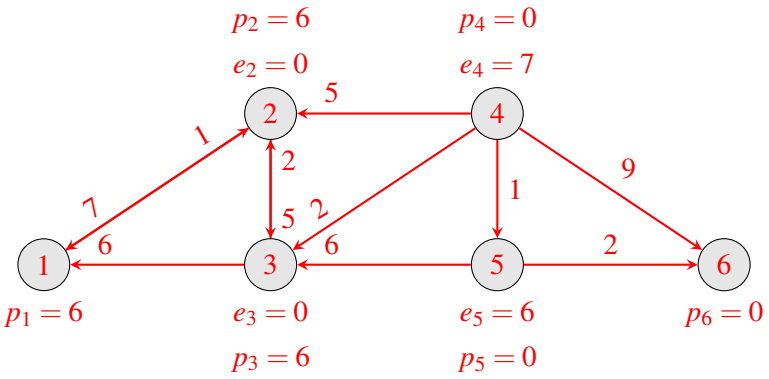


(b) (1p) ¿Es el preflujo dado un flujo factible? Justifique.

Respuesta: No, pues hay excesos positivos en los nodos 4 y 5.

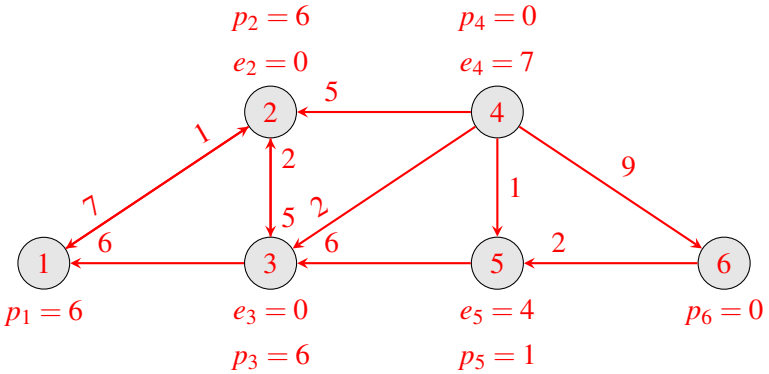
(c) (2p) Obtenga un vector de potenciales $p \in \mathbb{R}^n$ válido para este preflujo.

Respuesta: Se debe buscar potenciales que cumplan $p_i - p_j \leq 1$ en cada arco $(i,j) \in A_r(x)$, $p_1 = 6$ y $p_6 = 0$. Una forma simple de hacerlo es asignar potencial 6 a todo nodo accesible desde 1 y potencial 0 a todo nodo con acceso a 6, en este caso se obtiene:

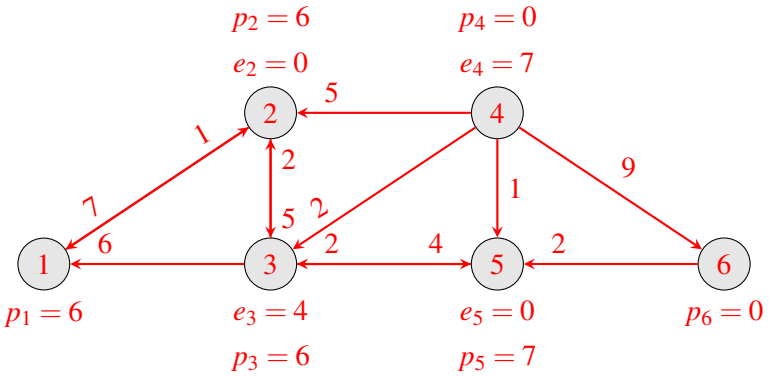


(d) (5p) Ejecute el algoritmo de empuje de preflujo desde el preflujo x hasta lograr una solución óptima. Detalle el corte saturado al finalizar el algoritmo y el valor de flujo obtenido.

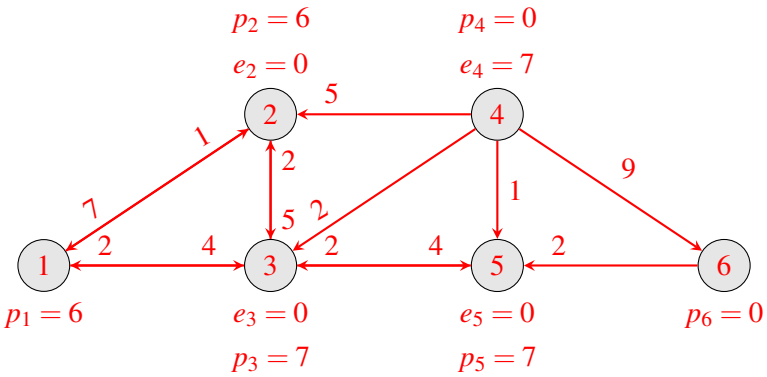
Respuesta: Reetiquetamos p_5 y luego empujamos por $(5,6)$:



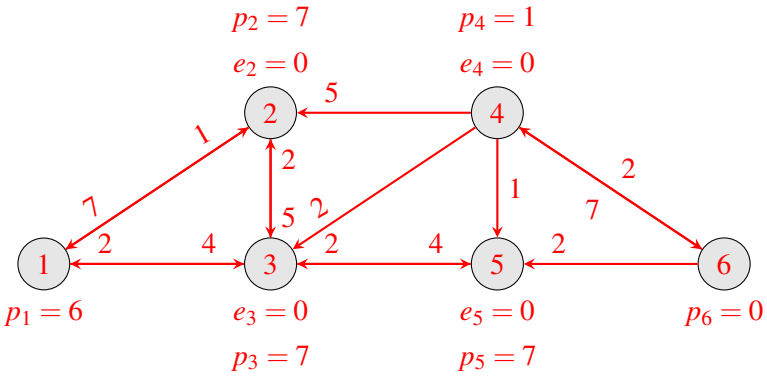
Reetiquetamos p_5 y luego empujamos por $(5,3)$:



Reetiquetamos p_3 y luego empujamos por $(3,1)$:



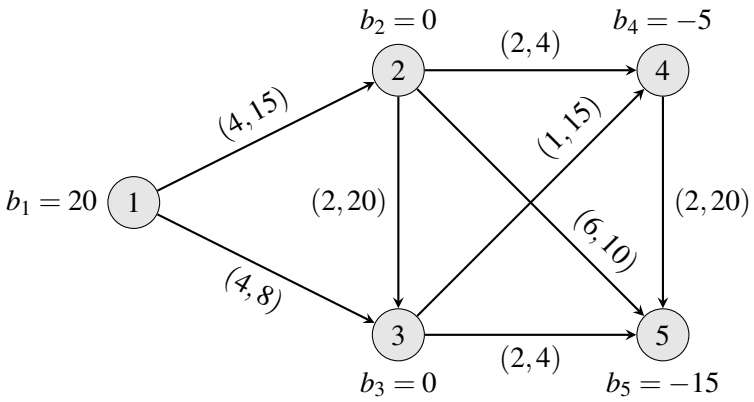
Reetiquetamos p_4 y luego empujamos por $(4,6)$:



Este grafo residual corresponde a un preflujo sin excesos (flujo factible y de máximo valor) con valor 9 determinado por el corte $X = \{1,2,3,5\}$.

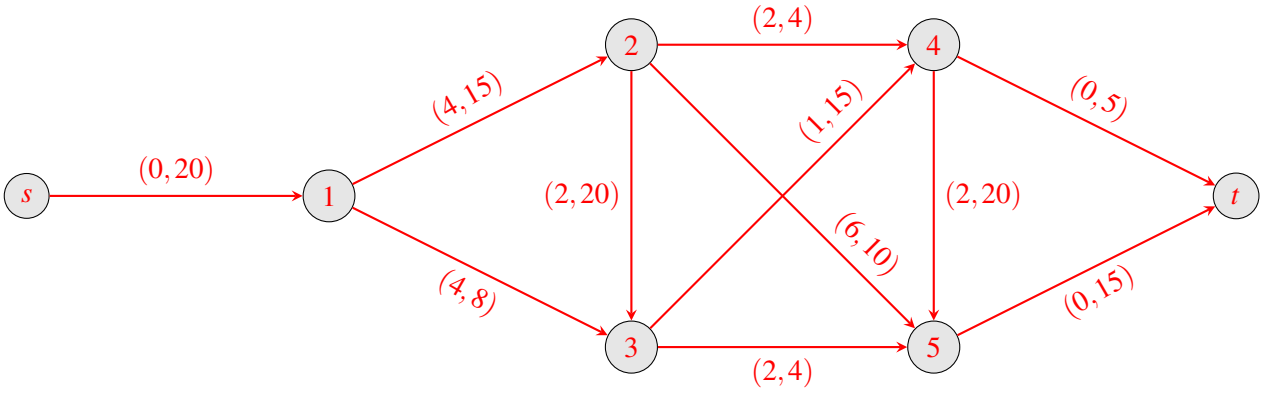
Pregunta 6 (18 puntos)

Considere la siguiente instancia de un Problema de Flujo en red a Costo Mínimo (PFCM), donde sobre cada arco $a \in A$ hay un vector (c_a, u_a) que detalla su costo c_a y capacidad de flujo u_a, respectivamente. Cada nodo $i \in N$ detalla información de oferta neta b_i.



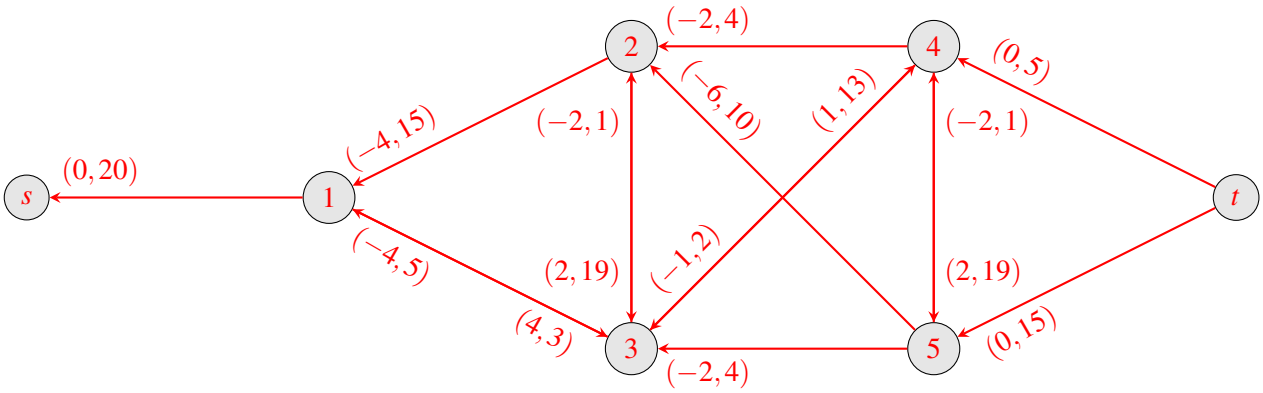
(a) (2p) Reformule esta instancia del PFCM como un Problema equivalente de Flujo Máximo a Mínimo Costo (PFM-MC). Detalle cada elemento de este problema.

Respuesta: El problema equivalente sería buscar transportar el máximo valor de flujo entre s y t a mínimo costo:



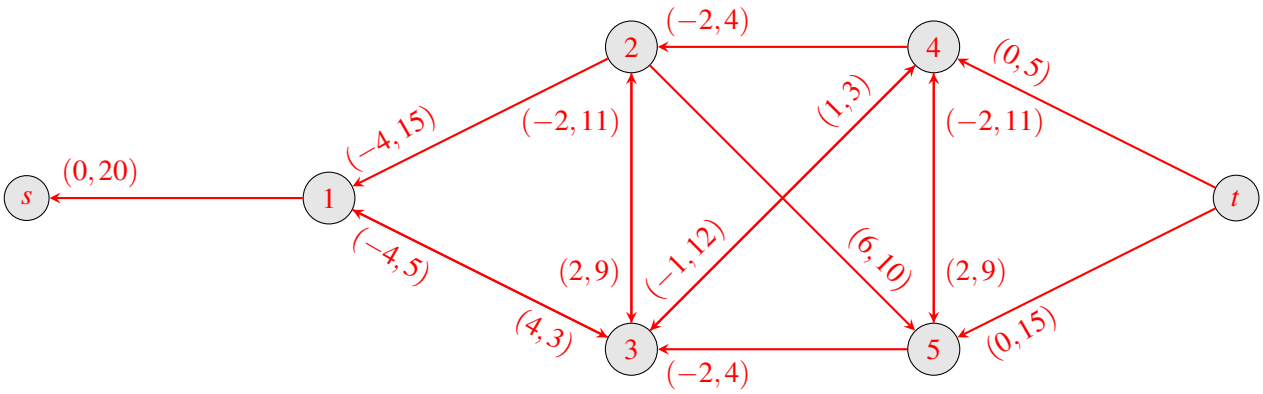
(b) (7p) Resuelva el PFM-MC planteado. Para ello encuentre primero un flujo de máximo valor y luego conviértalo en un flujo extremo de máximo valor mediante el algoritmo de cancelación de ciclos con costo de pasada negativo sobre el grafo residual del problema. Determine el vector de flujos resultante, su valor de flujo desde s a t y su costo.

Respuesta: Primero, resolveremos el problema de flujo máximo sobre el grafo residual para obtener una solución factible. Una forma es aplicar el algoritmo de ruta aumentable por las rutas $s-1-2-4-t$ (4 unidades), $s-1-3-5-t$ (4 unidades), $s-1-2-5-t$ (10 unidades), $s-1-2-3-4-t$ (1 unidad) y $s-1-3-4-5-t$ (1 unidad). En total se aumenta 20 unidades y se obtiene un corte saturado $X = \{1\}$ de capacidad 20 que certifica que este valor es máximo. El grafo residual resultante es:

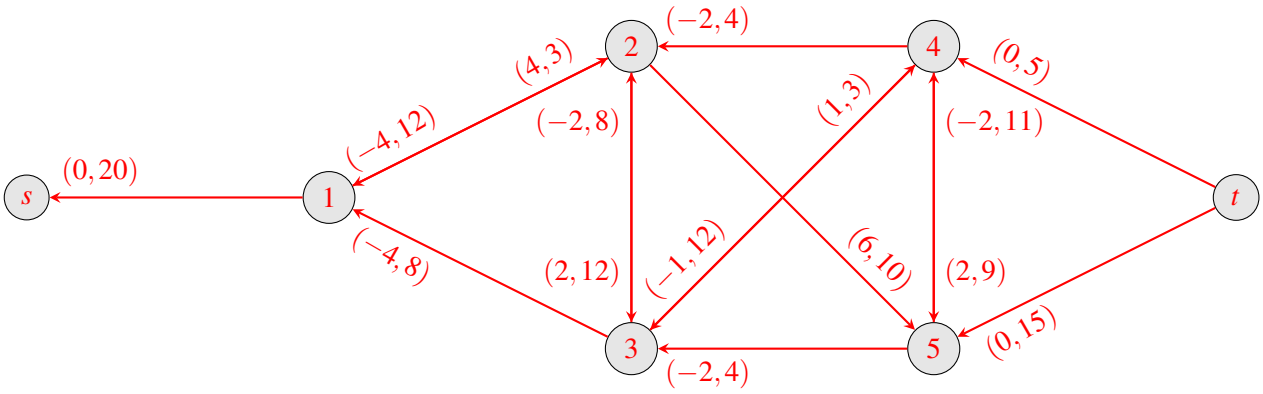


NOTA: Se podría haber aumentado por otras rutas o incluso haber aplicado otro algoritmo como Push-Relabel.

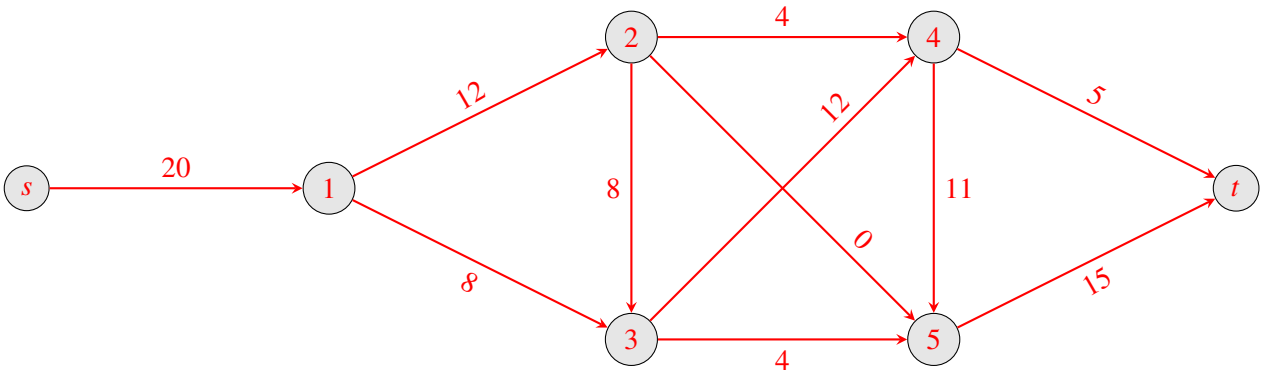
En este grafo buscaremos pasar el máximo flujo por ciclos de costo negativo detectables mediante el algoritmo de Bellman-Ford (en el ejemplo se puede hacer por inspección visual). Comenzamos por $5-2-3-4-5$ (costo -1, 10 unidades):



Seguimos con el ciclo $1-3-2-1$ (costo -2, 3 unidades):



Este grafo residual no posee ciclos de costo negativo. Desde este grafo residual, los flujos originales son:

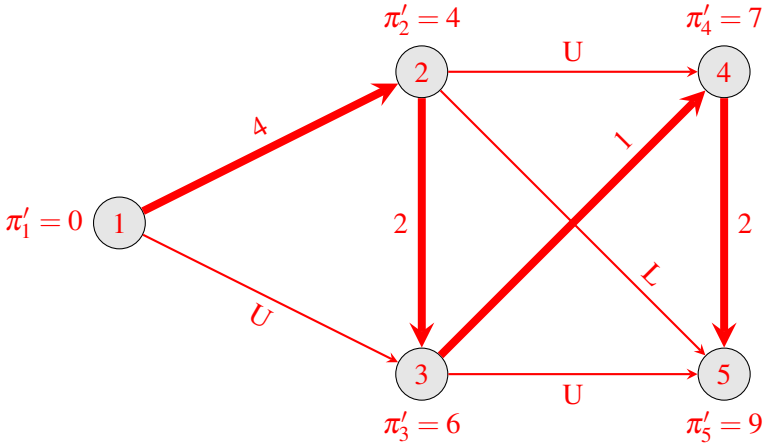


Y el costo es: $20 \cdot 0 + 12 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 6 + 12 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 11 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 15 \cdot 0 = 146$

(c) (4p) Verifique si su solución obtenida cumple las condiciones que garantizan optimalidad del PFCM.

Ayuda: Si no responde lo anterior, puede identificar una solución óptima y responder desde esta parte.

Respuesta: Para esta pregunta es necesario identificar una base que calce con la solución anterior. El grafo a continuación describe en cada arco si está en base (en negrita con costos en arco), cota superior (U) o inferior (L). Además, se detalla la solcuión dual asociada.



Para verificar que es solución óptima se puede revisar costos reducidos fuera de base:

- $r_{13} = 4 + \pi'_1 - \pi'_3 = -2 < 0$, ok para cota superior.
- $r_{24} = 2 + \pi'_2 - \pi'_4 = -1 < 0$, ok para cota superior.
- $r_{35} = 2 + \pi'_3 - \pi'_5 = -1 < 0$, ok para cota superior.
- $r_{25} = 6 + \pi'_2 - \pi'_5 = 1 > 0$, ok para cota inferior.

(d) (2p) ¿En qué rango de valores puede estar el costo del arco $(2,5)$ para que el conjunto de soluciones óptimas del PFCM se mantenga inalterado? Explique.

Respuesta: Recalculamos exigiendo la condición de optimalidad: $r_{25} = c_{25} - 5 > 0$, es decir, $c_{25} > 5$.

(e) (3p) ¿En qué rango de valores puede estar el costo del arco $(4,5)$ para que el conjunto de soluciones óptimas del PFCM se mantenga inalterado? Explique.

Respuesta: En este caso se debe recalcular el potencial $\pi'_5 = 7 + c_{45}$ en función del costo y luego imponer condiciones de optimalidad para los arcos afectados fuera de base:

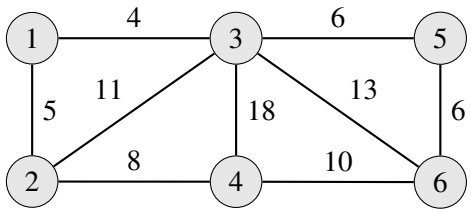
- $r_{35} = 2 + \pi'_3 - \pi'_5 = 1 - c_{45} < 0$.
- $r_{25} = 6 + \pi'_2 - \pi'_5 = 3 - c_{45} > 0$.

Luego:

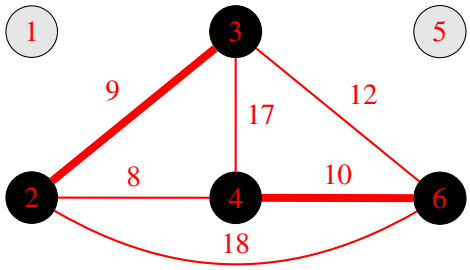
$$1 < c_{45} < 3$$

Pregunta 7 (7 puntos)

Considere el siguiente grafo no dirigido $G = (N, A)$ con costos c_a definidos sobre cada arco ($\sum_{a \in A} c_a = 81$):



- (4p) Encuentre el mínimo costo posible de una caminata cerrada en G que visita al menos una vez cada arco. No necesita detallar la caminata. **Respuesta:** Hay 4 nodos con grado impar: $\{2,3,4,6\}$, el emparejamiento a mínimo costo sobre las rutas mínimas entre todos ellos es:



  El costo óptimo de la caminata solicitada es $81 + 19 = 100$.

- (3p) Encuentre el mínimo costo posible de una caminata en G que comienza en 2, termina en 4 y que visita al menos una vez cada arco. No necesita detallar la caminata.

  Respuesta: En este caso está forzado a emparejar 3 con 6. El costo óptimo de la caminata solicitada es $81 + 12 = 93$.

Pregunta 8 (10 puntos)

Considere un Problema del Vendedor Viajero (PVV) métrico, es decir, encontrar un ciclo hamiltoniano de mínimo costo sobre un grafo no dirigido (N,A) de costos c_a en cada arco $a \in A$ que cumplen desigualdad triangular. Considere que $|A| \geq 3$. Un modelo de optimización entera para el PVV métrico es:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in\{0,1\}^{|A|}} & \sum_{a\in A} c_a x_a \\ \text{s.t.} & \sum_{a\in\delta_i} x_a = 2, \ \ \forall i \in N, \\ & \sum_{a\in\delta_S} x_a \geq 2, \ \ \forall S \subset N : S \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Las desigualdades en la última linea se conocen como "restricciones de corte".

(a) (2p) Demuestre que cualquier restricción de corte sobre un subconjunto $S \subset N$ con más de la mitad de los nodos en N es redundante en la formulación.

Respuesta: Por simetría $\delta_{N\setminus S} = \delta_S$. Esto, implica que

$$\sum_{a\in\delta_S} x_a \geq 2$$

es idéntica a la restricción de corte de un conjunto $Q = N \setminus S$ con menos de la mitad de los nodos dada por

$$\sum_{a\in\delta_Q} x_a \geq 2$$

(b) (4p) Demuestre que toda solución $x \in [0,1]^{|A|}$ factible para la relajación lineal de este problema satisface cada restricción posible de eliminación de sub-ciclo, es decir, satisface:

$$\sum_{\{i,j\}\in A: i,j\in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \ \ \forall S \subset N : S \neq \emptyset$$

Respuesta: Tome cualquier subconjunto de nodos $S \subset N$ y sume sus $|S|$ restricciones de grado. Queda:

$$\sum_{i\in S}\sum_{a\in\delta_i} x_a = 2|S|$$

Todo arco (i,j) tal que $i,j \in S$ es sumado dos veces, mientras que arcos en el corte S, es decir $a \in \delta_S$ son sumados una vez. Esto implica que la restricción anterior se puede reescribir como:

$$\sum_{\{i,j\}\in A: i,j\in A} 2x_{i,j} + \sum_{a\in\delta_S} x_a = 2|S|$$

Restando la restricción de corte asociada al subconjunto S se obtiene

$$\sum_{\{i,j\}\in A: i,j\in A} 2x_{i,j} \leq 2|S| - 2$$

que al dividir por 2 implica la restricción de eliminación de sub-ciclos sobre S:

$$\sum_{\{i,j\}\in A: i,j\in A} x_{i,j} \leq |S| - 1$$

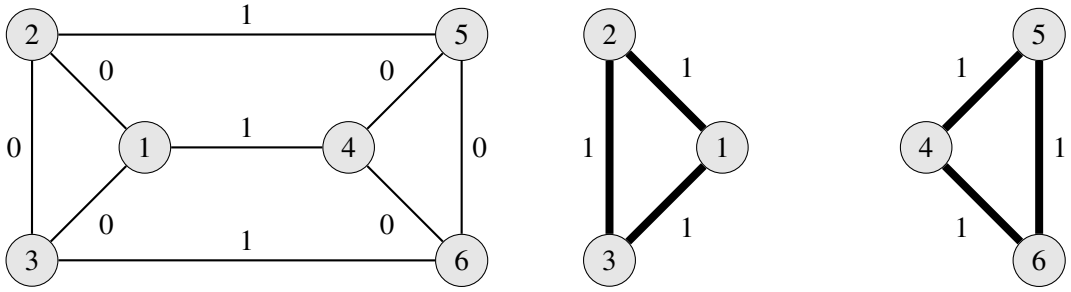
(c) (2p) Considere ahora una solución óptima x^* para el siguiente modelo relajado:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in\{0,1\}^{|A|}} & \sum_{a\in A} c_a x_a \\ \text{s.t.} & \sum_{a\in\delta_i} x_a = 2, \quad \forall i \in N \end{aligned}$$

¿Cómo podría detectar si x viola alguna restricción de corte e identificar dicha restricción?

Respuesta: La solución final (que no viola restricciones de corte) debe poseer al menos rutas disjuntas en arcos entre cada par de nodos en N. Se podría hacer BFS (of flujo máximo) desde un nodo i cualquiera hacia cada $j \in N : j \neq i$ y verificar si hay acceso (o si el valor de flujo máximo es mayor o igual a 2). (No necesita buscar para todo $i \in N$ ¿PQ?). Si no hay accesibilidad (o si el valor de flujo máximo entre i y un nodo j' es menor a 2), entonces, los nodos que forman el corte de mínima capacidad Q violan la restricción de corte.

(d) (2p) Considere la siguiente instancia del PVV que detalla costos de arcos en el grafo izquierdo y una solución óptima al modelo relajado de la parte (c) en el grafo de la derecha. ¿Viola esta solución alguna restricción de corte? En ese caso, escriba una restricción violada.



Respuesta: Si. $x_{25} + x_{14} + x_{36} \geq 2$