PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DPTO. DE INGENIERÍA DE TRANSPORTE Y LOGÍSTICA

Curso: ICT2233
Semestre: 2024-01
Profesor: Mathias Klapp

INTERROGACIÓN 2
FLUJO EN REDES - ICT2233

TIEMPO: 120 MINUTOS

- *La prueba tiene 60 puntos distribuidos entre todas sus preguntas.*
- *¡Coloque nombre en el cuadernillo y no lo separe!*
- *La prueba es sin apuntes y/o equipos electrónicos. Se permite resumen de una hoja escrito a mano.*

Pregunta 1 (18 puntos)

Indique para cada una de las siguientes afirmaciones si es **siempre** verdadera o puede ser falsa. Justifique cada verdadera y encuentre un contraejemplo para cada falsa.

(a) (3p) Considere una lista de n números enteros positivos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ todos menores a 10. Esta lista se puede ordenar de forma ascendente en $\mathcal{O}(n)$ operaciones.

Respuesta: Verdadero. Este es el algoritmo *Bucket sort* visto en clase:

(I) Crear un vector **V** de 10 contadores indexados por $j \in 1, \ldots, 10$. ($\mathcal{O}(1)$)

(II) Para cada número x_i: Hacer $V_{x_i} \leftarrow V_{x_i} + 1$. ($\mathcal{O}(n)$)

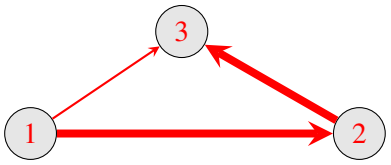
(III) Leer **V** en el orden de sus indices $j = 1 dots, 10$. En cada iteración j agregar V_j números de valor j a una lista ordenada. ($\mathcal{O}(n)$).

(IV) Los números están en orden en la nueva lista.

Nota: No necesita detallar el algoritmo.

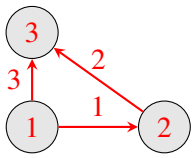
(b) (3p) El algoritmo DFS (*Depth-First-Search*) genera un árbol de rutas que contiene a la ruta más larga del grafo (en numero de arcos desde s)

Respuesta: Falso. Considere el siguiente contraejemplo donde se ejecuta DFS desde el nodo 1 por orden lexicográfico de nodos. La ruta más larga a 2 es 1-3-2, pero no es capturada por DFS.



(c) (3p) Si todos los arcos en un grafo dirigido poseen costos distintos y positivos, entonces la ruta mínima desde un nodo s a otro t es única.

Respuesta: Falso. Considere el siguiente caso de 1 a 3:

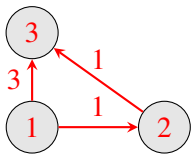


(d) (3p) Suponga que d_i es el costo de ruta mínima desde un nodo fuente s hacia cada nodo $i \in N$ en un grafo dirigido $G = (N,A)$ fuertemente conexo de costos c_a en cada arco $a \in A$. Defina $v_{k,j} = d_j - d_k$ para dos nodos j y k cualquiera. Si existe el arco (k,j), se debe cumplir que $c_{k,j} \geq v_{k,j}$.

Respuesta: Verdadero. Se debe cumplir que $d_k + c_{kj} \geq d_j$ (de lo contrario, d_j no sería el costo de ruta mínima)

(e) (3p) Considere un problema de ruta mínima desde un nodo s a otro t sobre un grafo dirigido y suponga que la ruta mínima es única y que usa p arcos. Si cada arco de la red aumenta su costo en $k > 0$ unidades, entonces el costo de la ruta mínima aumentará siempre en $k \times p$.

Respuesta: Falso. Considere el siguiente caso de 1 a 3:



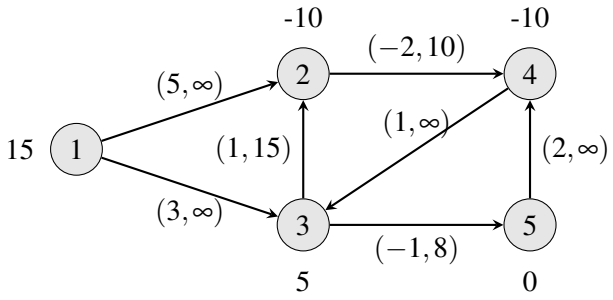
La ruta mínima es $1-2-3$. Al sumar $k = 2$ a cada arco, el costo de ruta mínima aumenta en $3 \neq k \times p = 2 \times 2 = 4$, pues la ruta mínima cambia a una que usa menos arcos.

(f) (3p) El algoritmo de Dijkstra equipado con HEAP binario es más rápido desde el punto de vista computacional que su implementación tradicional.

Respuesta: Falso, si la red es densa $m \approx n^2$ funciona en $\mathcal{O}(m \log n) \approx \mathcal{O}(n^2 \log n)$. Esto es peor que su implementación simple $\mathcal{O}(n^2)$

Pregunta 2 (10 puntos)

Considere el siguiente Problema de Flujo a Mínimo Costo sobre un grafo dirigido $G = (N, A)$. Cada arco $a \in A$ detalla (c_a, u_a); el costo por unidad de flujo y la capacidad máxima de flujo en el arco, respectivamente. Las ofertas netas están detalladas en cada nodo y las capacidades mínimas de flujo son cero.

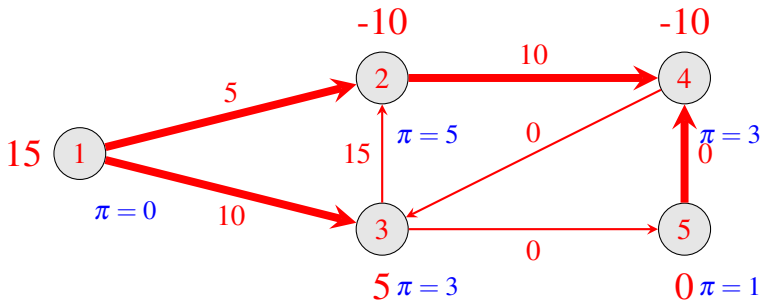


(a) (4p) Identifique, como prefiera, una solución óptima de este problema (puede ser por inspección visual).

(b) (6p) Certifique que es solución óptima mediante un argumento basado en teoría de optimización.

Respuesta:

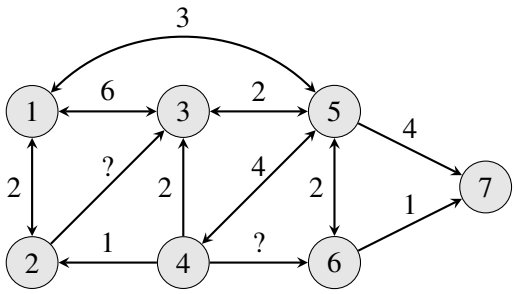
Esta es la solución óptima del problema, con la base que certifica su optimalidad, sus potenciales y costos reducidos:



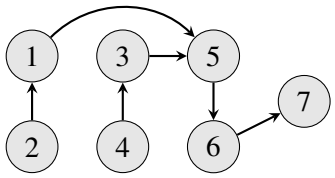
- $r_{3,2} = 1 - (5 - 3) = -1$
- $r_{4,3} = 1 - (3 - 3) = 1$
- $r_{3,5} = -1 - (1 - 3) = 1$

Pregunta 3 (14 puntos)

Considere el siguiente grafo $G = (N, A)$ dirigido de costos c_a en cada arco $a \in A$. Cada arco bidirigido se entiende como 2 arcos, uno en cada sentido. Lamentablemente, se perdió el costo de los arcos $(2,3)$ y $(4,6)$.



Antes de perder los valores de costo, se ejecutó el algoritmo Dijkstra que entregó el siguiente árbol de rutas mínimas hacia 7:



(a) (4 puntos) Detalle el orden de cierre de nodos para el algoritmo de Dijkstra ejecutado? Explique.

Respuesta: Las distancias de ruta mínima determinan el orden de cierre del algoritmo Dijkstra, pues este cierra a nodos de menor distancia primero. Las distancias son:

i	1	2	3	4	5	6	7
d_i	6	8	5	7	3	1	0

Luego, el orden de cierre es: $7-6-5-3-1-4-2$

(b) (6 puntos) ¿En qué rango de valores pueden estar los costo de los arcos $(2,3)$ y $(4,6)$. Justifique.

Respuesta: El costo debe superar la diferencia de potencial:

$$c_{23} \geq (\pi_3 - \pi_2) = (-d_3 + d_2) = -5 + 8 = 3$$

,

$$c_{46} \geq (\pi_6 - \pi_4) = (-d_6 + d_4) = -1 + 7 = 6$$

(c) (4 puntos) Determine el valor óptimo para el siguiente problema de optimización. Explique.

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^7} x_2 - x_7 \\ &\text{s.t. } x_i - x_j \leq c_{ij}, \ \ \forall (i,j) \in A \end{aligned}$$

Respuesta: Es el dual del problema de ruta mínima desde 2 a 7. Su valor óptimo es 8.

Pregunta 4 (10 puntos)

Suponga un problema de ruta mínima en un grafo dirigido $G = (N, A)$ desde un nodo s hacia el resto. Asuma costos c_a en cada arco $a \in A$ que podrían ser negativos. Considere el siguiente algoritmo para resolver el problema:

- ◇ Paso 1: Calcule el valor del costo más negativo $c_{min} = \text{mín}_{\{a \in A\}} c_a$.
- ◇ Paso 2: Si $c_{min} < 0$, sume el valor absoluto $|c_{min}|$ al costo de cada arco: $c'_a = c_a + |c_{min}|$ en $\mathcal{O}(m)$ operaciones.
- ◇ Paso 3: Resuelva el problema de rutas mínima desde s con costo c'_a en cada arco $a \in A$ a través del algoritmo de Dijkstra equipado con *Heap* Binario.
- ◇ Paso 4: Retorne las rutas encontradas en el paso anterior como su solución al problema original con costos c_a.

Responda a las siguientes preguntas:

(a) (5p) ¿Qué complejidad computacional posee este algoritmo en función del número de arcos ()m) y nodos (n) en el problema?

Respuesta: Es $\mathcal{O}(m \log(n))$. Veamos la complejidad de cada paso:

(I) Calcular c_{min} ocurre en $\mathcal{O}(m)$ (revisión de todo los arcos).

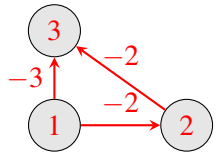
(II) Sumar el valor absoluto $|c_{min}|$ a todo arco es $\mathcal{O}(m)$.

(III) Resolver via Dijkstra con *Heap* Binario es $\mathcal{O}(m \log n)$.

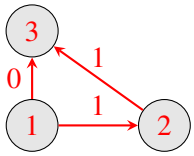
(b) (5p) ¿Es correcto este algoritmo? Justifique.

Nota: Un algoritmo es correcto si resuelve el problema para cada una de sus instancias.

Respuesta: No es correcto. El problema de fondo es que se agrega un costo mayor a rutas que usan más arcos. Por ejemplo, en la siguiente red la ruta mínima de 1 a 3 es $(1,2,3)$ a costo -4:



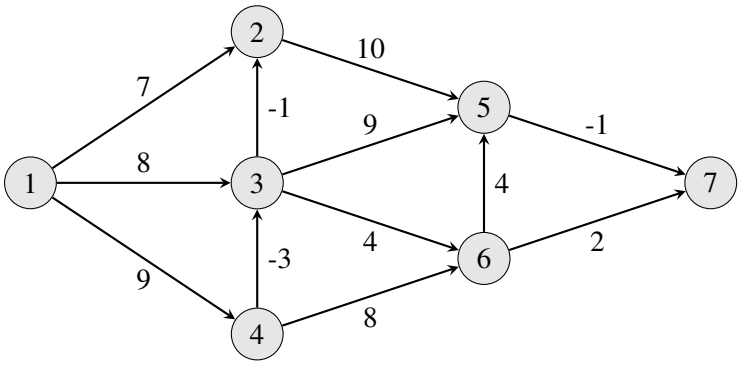
Al sumar 3 al costo de todos los arcos, la red queda en:



, donde se ha distorsionado la ruta mínima pues ahora es $(1,3)$

Pregunta 5 (8 puntos)

Considere el siguiente grafo $G = (N, A)$ dirigido y acíclico con costos c_a en cada arco $a \in A$. Encuentre los costos de ruta mínima desde el nodo 1 mediante el algoritmo de rutas mínimas por orden topológico. Detalle sus cálculos. No vale obtener soluciones por inspección visual.



Respuesta: Lo primero es ordenar el grafo en orden topológico. En este caso, el orden es $1, 4, 3, 2, 6, 5, 7$.
Luego se calcula las distancias de forma recursiva:

- $d_1 = 0$.
- $d_4 = d_1 + c_{14} = 0 + 9 = 9$.
- $d_3 = \text{mín}(d_1 + c_{13}, d_4 + c_{43}) = \text{mín}(0 + 8, 9 - 3) = 6$.
- $d_2 = \text{mín}(d_1 + c_{12}, d_3 + c_{32}) = \text{mín}(0 + 7, 6 - 1) = 5$.
- $d_6 = \text{mín}(d_3 + c_{36}, d_4 + c_{46}) = \text{mín}(6 + 4, 9 + 8) = 10$.
- $d_5 = \text{mín}(d_2 + c_{25}, d_3 + c_{35}, d_6 + c_{65}) = \text{mín}(5 + 10, 6 + 9, 10 + 4) = 14$
- $d_7 = \text{mín}(d_5 + c_{57}, d_6 + c_{67}) = \text{mín}(14 - 1, 10 + 2) = 12$