PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE TRANSPORTE Y LOGÍSTICA
ICT 2213 – Modelos de Demanda de Transporte
Profesor: Sebastián Raveau
Segundo Semestre de 2025

Control 4

Pauta

1- 1.a) U_{1q} distribuye Uniforme [1–α ; 1+α] y U_{2q} distribuye Uniforme [–α ; α]. La única manera de que se elija la alternativa 2 es que ambas utilidades caigan en el rango [1–α ; α], rango en que se traslapan y donde cada una se elige la mitad de las veces.

$$P_{2q} = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} \cdot \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{2\alpha} + \frac{2}{8\alpha^2} = 0,3$$

[3 pts por plantear un enfoque de resolución correcto]

$$\rightarrow \alpha \approx 2,218$$

[1 pts solución correcta]

1.b) Ambas componentes de error tienen igual ancho de rango y, por lo tanto, igual varianza. El modelo es homocedástico. **[1 pto]** Las distribuciones de probabilidad de los errores no dependen una de la otra, así que son independientes. **[1 pto]**

2- 2.a) Un modelo Probit, a diferencia de un modelo Logit, es capaz de considerar matrices de covarianza tan generales como se desee, pudiendo incorporar heterocedasticidad y/o estructuras de correlación. **[1 pto]** Un modelo Logit, en cambio, posee una expresión cerrada para las probabilidades de elección, mientras que un modelo Probit requiere aproximar numéricamente o simular las integrales múltiples que definen la probabilidad de elección. **[1 pto]**

2.b) Existen, por supuesto, una infinidad de respuestas correctas. Las utilidades deben tener al menos una variable genérica que aparezca en las tres utilidades con el mismo parámetro **[0,6 pts]**, una variable específica que aparezca en i) solo algunas de las utilidades o ii) en las tres utilidades pero con al menos dos parámetros distintos **[0,6 pts]** y una variación sistemática donde el impacto de al menos un atributo varíe según alguna característica del individuo **[0,8 pts]**.

2.c) La verosimilitud es la probabilidad conjunta (i.e., el producto de las probabilidades de cada observación de la base de datos) de observar los datos de acuerdo con el modelo. **[1 pto]** Se trabaja con su logaritmo por conveniencia computacional. La verosimilitud suele tener un orden de magnitud muy pequeño, posiblemente bajo el nivel de precisión de un optimizador tradicional. Al aplicar logaritmo (una función monótona creciente que no cambia la solución óptima) obtenemos una función objetivo con un orden de magnitud fácilmente trabajable. **[1 pto]**

3- Como $\sigma^2 = \pi^2 / \left(6 \cdot \lambda^2\right)$ Si la varianza de las componentes Gumbel está entre 5 y 15, entonces el parámetro de escala está entre $\sqrt{\pi^2/(6 \cdot 5)} \approx 0,574$ y $\sqrt{\pi^2/(6 \cdot 15)} \approx 0,331$. **[2 pts]**

Las probabilidades de elección están en el rango:

Alternativa 1

$$\frac{e^{0,574 \cdot 0}}{e^{0,574 \cdot 0} + e^{0,574 \cdot 2} + e^{0,574 \cdot 1}} = 0,169$$

$$\frac{e^{0,331 \cdot 0}}{e^{0,331 \cdot 0} + e^{0,331 \cdot 2} + e^{0,331 \cdot 1}} = 0,231$$

Alternativa 2

$$\frac{e^{0,574 \cdot 2}}{e^{0,574 \cdot 0} + e^{0,574 \cdot 2} + e^{0,574 \cdot 1}} = 0,532$$

[2 pts]

$$\frac{e^{0,331 \cdot 2}}{e^{0,331 \cdot 0} + e^{0,331 \cdot 2} + e^{0,331 \cdot 1}} = 0,448$$

Alternativa 3

$$\frac{e^{0,574 \cdot 1}}{e^{0,574 \cdot 0} + e^{0,574 \cdot 2} + e^{0,574 \cdot 1}} = 0,300$$

$$\frac{e^{0,331 \cdot 1}}{e^{0,331 \cdot 0} + e^{0,331 \cdot 2} + e^{0,331 \cdot 1}} = 0,321$$

Podemos ver que a medida que para varianzas mayores, las probabilidades del modelo se acercan más a ser equiprobables **[1 pto]**, mientras que para varianzas menores, las probabilidades del modelo se acercan más a ser todo o nada **[1 pto]**.

4- 4.a) Las utilidades son:

$$V_{Aq} = -0,002 \cdot 1000 - 0,04 \cdot 20 = -2,8$$

$$V_{Bq} = -0,002 \cdot 500 - 0,04 \cdot 40 + 0,3 = -2,3 \quad \textbf{[1 pto]}$$

$$V_{Cq} = -0,002 \cdot 0 - 0,04 \cdot 60 - 0,7 = -3,1$$

Por lo tanto, las probabilidades son:

$$P_{Aq} = \frac{e^{-2,8}}{e^{-2,8} + e^{-2,3} + e^{-3,1}} = 0,295$$

$$P_{Bq} = \frac{e^{-2,3}}{e^{-2,8} + e^{-2,3} + e^{-3,1}} = 0,486 \quad \textbf{[1 pto]}$$

$$P_{Cq} = \frac{e^{-3,1}}{e^{-2,8} + e^{-2,3} + e^{-3,1}} = 0,219$$

4.b) Sólo debemos corregir las constantes modales:

$$\theta'_A = 0 - \ln(0,295 / 0,6) = 0,710$$

$$\theta'_B = 0,3 - \ln(0,486 / 0,3) = -0,183 \quad \textbf{[2 pto]}$$

$$\theta'_C = -0,7 - \ln(0,219 / 0,1) = -1,482$$

Con estas nuevas constantes, ahora las utilidades son: $V'_{Aq} = -2,090$, $V'_{Bq} = -2,783$ y $V'_{Cq} = -3,882$. **[1 pto]**

Y por lo tanto, ahora las probabilidades son consistentes con los nuevos datos:

$$P'_{Aq} = \frac{e^{-2,090}}{e^{-2,090} + e^{-2,783} + e^{-3,882}} = 0,6$$

$$P'_{Bq} = \frac{e^{-2,783}}{e^{-2,090} + e^{-2,783} + e^{-3,882}} = 0,3 \quad \textbf{[1 pto]}$$

$$P'_{Cq} = \frac{e^{-3,882}}{e^{-2,090} + e^{-2,783} + e^{-3,882}} = 0,1$$

5- 5.a) Una alternativa etiquetada es aquella donde la alternativa en sí representa algo particular y diferenciable al resto. (e.g., la alternativa "auto" es intrínsecamente distinta a la alternativa "bus") **[0,5 pts]**, mientras que una alternativa no-etiquetada es aquella donde la alternativa en sí no es diferenciable al resto (e.g., la alternativa "ruta 1" de por sí no es diferenciable de la alternativa "ruta 2") **[0,5 pts]**.

La diferencia en especificación es que con alternativas etiquetadas se incluyen constantes específicas en la utilidad sistemática, mientras que con alternativas no-etiquetadas no. **[1 pts]**

5.b) Sea γ el parámetro de potencia. Podemos realizar un test-t para la hipótesis nula $H_0 : \gamma - 1 = 0$. Si no se rechaza la hipótesis nula, el impacto de la variable es estadísticamente lineal, por lo que se prefiere el modelo A. Si se rechaza la hipótesis nula, se valida el impacto no lineal de la variable y se prefiere el modelo B. **[2 pts]**

5.c) Los modelos basados en la Teoría de Utilidad Aleatoria funcionan en base a diferencias de utilidades. Por lo tanto, con N alternativas, sólo es posible estimar $N - 1$ diferencias de constantes. Así, para que el modelo sea identificable se debe fijar una de ellas en 0 como referencia y estimar las demás **[2 pts]**