PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE TRANSPORTE Y LOGÍSTICA
ICT 2213 – Modelos de Demanda de Transporte
Profesor: Sebastián Raveau
Segundo Semestre de 2025

Control 3

Pauta

1- 1.a) En total tenemos 9 viajes, por lo que la entropía de la matriz es:

$$W = \frac{9!}{2! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 2!} = 15.120$$ **[2 pts]**

1.b) Tenemos:

	C	D	E	O_i
A	2	0	1	3
B	3	1	2	6
D_j	5	1	3	

[Enfoque de solución 1: balanceo implícito]

Ajustamos los orígenes, aplicando un factor de 5/3 a la primera fila y 8/6 a la segunda fila: **[1 pto]**

	C	D	E	O_i
A	3,333	0	1,667	5
B	4	1,333	2,667	8
D_j	7,333	1,333	4,333	

Ajustamos los destinos, aplicando un factor de 4/7,333 a la primera columna, 3/1,333 a la segunda columna y 6/4,333 a la tercera columna: **[1 pto]**

	C	D	E	O_i
A	1,818	0	2,308	4,126
B	2,182	3	3,692	8,874
D_j	4	3	6	

[Enfoque de solución 2: balanceo explícito]

El modelo subyacente es $T_{ij} = A_i \cdot O_i \cdot B_j \cdot D_j \cdot t_{ij}$; los factores de balanceo son:

$$A_i = \frac{1}{\sum_j B_j \cdot D_j \cdot t_{ij}} \quad \text{y} \quad B_j = \frac{1}{\sum_i A_i \cdot O_i \cdot t_{ij}}$$

Inicializamos los factores de balanceo de destinos en $B_j = 1$, obtenemos los factores de balanceo de orígenes

$$A_A = \frac{1}{1\cdot 4\cdot 2 + 1\cdot 3\cdot 0 + 1\cdot 6\cdot 1} = \frac{1}{14} \approx 0{,}0714$$
$$A_B = \frac{1}{1\cdot 4\cdot 3 + 1\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot 6\cdot 2} = \frac{1}{27} \approx 0{,}0370$$ **[1 pto]**

La matriz intermedia, ajustada a orígenes, es:

	C	D	E	O_i
A	2,857	0	2,143	5
B	3,556	0,889	3,556	8
D_j	6,413	0,889	5,698	

Con los factores de balanceo de orígenes obtenidos, obtenemos los factores de balanceo de destinos

$$B_C = \frac{1}{1/14\cdot 5\cdot 2 + 1/27\cdot 8\cdot 3} = \frac{63}{101} \approx 0{,}624$$
$$B_D = \frac{1}{1/14\cdot 5\cdot 0 + 1/27\cdot 8\cdot 1} = \frac{27}{8} \approx 3{,}375$$ **[1 pto]**
$$B_E = \frac{1}{1/14\cdot 5\cdot 1 + 1/27\cdot 8\cdot 2} = \frac{378}{359} \approx 1{,}053$$

La matriz intermedia, ajustada a orígenes, es:

	C	D	E	O_i
A	1,782	0	2,256	4,038
B	2,218	3	3,743	8,962
D_j	4	3	6	

1.c) Los ceros pueden ser muestrales o estructurales. **[0,4 pts]** Los ceros muestrales deben ser corregidos. **[0,6 pts]** La corrección consiste en utilizar una semilla, reemplazando los ceros muestrales por valores pequeños de viajes. **[1 pto]**

2- 2.a) Min $Z = \sum_i \sum_j \left[\left(T_{ij} + 1/2 \right) \cdot \ln T_{ij} - T_{ij} \right]$ **[1 pto]**

s.a. $\sum_j T_{ij} = O_i \qquad \forall i \qquad (\mu_i)$ **[0,5 pto]**

$\sum_i \sum_j T_{ij} \cdot C_{ij} = C_T \qquad (\beta)$ **[0,5 pto]**

2.b) Planteamos el Lagrangiano y obtenemos las condiciones de optimalidad de primer orden:

$$L = Z + \sum_i \mu_i \cdot \left(O_i - \sum_j T_{ij} \right) + \beta \cdot \left(\sum_i \sum_j T_{ij} \cdot C_{ij} - C_T \right)$$ **[0,5 pts]**

$$\frac{\partial L}{\partial T_{ij}} = \ln T_{ij} + \frac{1}{2 \cdot T_{ij}} - \mu_i + \beta \cdot C_{ij}$$ **[0,5 pts]**

$$\frac{\partial L}{\partial T_{ij}} = 0 \quad \rightarrow \quad T_{ij} = \exp(\mu_i) \cdot \exp\left(-\beta \cdot C_{ij} - \frac{1}{2 \cdot T_{ij}} \right)$$ **[1 pto]**

2.c) El modelo de distribución de viajes resultante es de punto fijo (no es posible despejar las variables T_{ij}, por lo que queda a ambos lados de la ecuación), lo que complejiza significativamente su uso. **[2 pts]**

3- 3.a) Dado que Hyman es un método iterativo, dependiendo del criterio de parada utilizado para determinar la convergencia, el valor obtenido de β puede ser cercano, pero no necesariamente igual al entregado por Lagrange. **[2 pts]**

3.b) Si realizamos la comparación entre los destinos D1 & D2 y entre los destinos D1 & D3, la comparación entre los destinos D2 & D3 será linealmente dependiente a las comparaciones ya realizadas, de modo que no aporta información adicional. **[2 pts]**

3.c) En un modelo doblemente acotado los factores de balanceo A_i y B_j dependen, entre otras cosas, del parámetro β que se desea estimar. Así, el método iterativo permite separar el proceso de balanceo del proceso de optimización, simplificando fuertemente la estimación del parámetro β. **[2 pts]**

4- 4.a) Al primer intervalo pertenecen los pares (A,C), (A,E), (B,C) y (B,D). Al segundo intervalo pertenecen los pares (A,D) y (B,E).

Matriz $\delta_{ij}^{k=1}$ **[0,5 pts]**

	C	D	E
A	1	0	1
B	1	1	0

Matriz $\delta_{ij}^{k=2}$ **[0,5 pts]**

	C	D	E
A	0	1	0
B	0	0	1

4.b) Evaluamos el modelo: $T_{ij} = A_i \cdot O_i \cdot B_j \cdot D_j \cdot \sum_k C_k \cdot S_k \cdot \delta_{ij}^k$

$T_{AC} = 0{,}122 \cdot 10 \cdot 0{,}069 \cdot 10 \cdot 0{,}122 \cdot 20 = 2{,}05$

$T_{AD} = 0{,}122 \cdot 10 \cdot 0{,}073 \cdot 15 \cdot 0{,}187 \cdot 10 = 2{,}50$

$T_{AE} = 0{,}122 \cdot 10 \cdot 0{,}085 \cdot 5 \cdot 0{,}122 \cdot 20 = 1{,}27$ **[2 pts]**

$T_{BC} = 0{,}235 \cdot 20 \cdot 0{,}069 \cdot 10 \cdot 0{,}122 \cdot 20 = 7{,}91$

$T_{BD} = 0{,}235 \cdot 20 \cdot 0{,}073 \cdot 15 \cdot 0{,}122 \cdot 20 = 12{,}56$

$T_{BE} = 0{,}235 \cdot 20 \cdot 0{,}085 \cdot 5 \cdot 0{,}187 \cdot 10 = 3{,}74$

	C	D	E	O_i Act	O_i Obj
A	2,05	2,50	1,27	5,82	10
B	7,91	12,56	3,74	24,21	20
D_j Act	9,96	15,06	5,01		
D_j Obj	10	15	5		

k	S_k Act	S_{ik} Obj
1	23,79	20
2	6,24	10

Como los totales actuales que calzan con los objetivos son D_j, las últimas variables en ser ajustadas son la atracción de viajes (destinos). **[1 pto]**

4.c) Los errores para las variables no ajustadas (orígenes y costos) son:

O_A $|10\text{-}5{,}82|/10 = 41{,}8\%$ de error

O_B $|20\text{-}24{,}21|/20 = 21{,}0\%$ de error **[1 pto]**

S_1 $|20\text{-}23{,}79|/20 = 18{,}9\%$ de error

S_2 $|10\text{-}6{,}24|/10 = 37{,}7\%$ de error

Dado que los errores son bastante altos (mucho más de lo habitualmente aceptable), el algoritmo no ha convergido. **[1 pto]**

5- 5.a) Las variables p_{ij}^{a} son las proporciones de viajes entre el par origen-destino *i-j* que pasan por el arco *a*. **[1 pto]** Son el resultado de modelos de elección de ruta o asignación de viajes. **[1 pto]**

5.b) Debido a que la información de sensibilidad de los viajeros hacia los costos está implícitamente incorporada en la modelación a través de las elecciones de ruta que dan lugar a las variables p_{ij}^{a}. **[2 pts]**

5.c) Obtenemos el estadígrafo para comprar las matrices observada t_{ij} y modelada T_{ij}:

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{\left(t_{ij} - T_{ij}\right)^2}{T_{ij}} \qquad \textbf{[1 pto]}$$

El estadígrafo se compara con un valor de tabla, donde los grados de libertad corresponden a la cantidad de celdas de la matriz menos 1. **[0,5 pts]** Si el estadígrafo es menor o igual que el valor de tabla, no se rechaza la hipótesis nula de que ambas matrices son estadísticamente iguales. **[0,5 pts]**