Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesores Maximiliano González, Nicolás Vargas y Andrés Navarro
Segundo Semestre 2024

Interrogación 1

Duración: 2 horas y 30 minutos

Problema 1 (10 puntos)

a) **(5 puntos)** Suponga que el rubro de comida rápida de un país tiene 28 principales empresas que compiten por la población de consumidores de tres ciudades (que por simplicidad llamaremos X, Y y Z). Una empresa puede tener licencia para operar en las tres ciudades o solo en una de ellas. Si 10 empresas tienen licencia en X, 11 empresas tienen licencia en Y, y 13 empresas tienen licencia en Z, responda:

i) ¿Cuál es la probabilidad de que una empresa tenga licencia para operar **únicamente en** Z?

Solución: Sean los siguientes eventos:

- X: una empresa cualquiera opera en la ciudad X.
- Y: una empresa cualquiera opera en la ciudad Y.
- Z: una empresa cualquiera opera en la ciudad Z.
- $|X|$: una empresa cualquiera opera únicamente en la ciudad X.
- $|Y|$: una empresa cualquiera opera únicamente en la ciudad Y.
- $|Z|$: una empresa cualquiera opera únicamente en la ciudad Z.

Sabemos que:

$$\mathbb{P}(X) = \frac{10}{28}, \quad \mathbb{P}(Y) = \frac{11}{28}, \quad \mathbb{P}(Z) = \frac{13}{28}$$

Sea W la probabilidad de que una empresa cualquiera opere en las tres ciudades. Se tiene la siguiente ecuación base:

$$\mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(|X|) + \mathbb{P}(|Y|) + \mathbb{P}(|Z|) = 1$$

Además, sabemos que:

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(|X|) + \mathbb{P}(W)$$
$$\mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(|Y|) + \mathbb{P}(W)$$
$$\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(|Z|) + \mathbb{P}(W)$$

Despejamos $\mathbb{P}(|X|)$, $\mathbb{P}(|Y|)$ y $\mathbb{P}(|Z|)$:

$$\mathbb{P}(|X|) = \mathbb{P}(X) - \mathbb{P}(W) = \frac{10}{28} - \mathbb{P}(W)$$
$$\mathbb{P}(|Y|) = \mathbb{P}(Y) - \mathbb{P}(W) = \frac{11}{28} - \mathbb{P}(W)$$
$$\mathbb{P}(|Z|) = \mathbb{P}(Z) - \mathbb{P}(W) = \frac{13}{28} - \mathbb{P}(W)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación base:

$$\mathbb{P}(W) + \left(\frac{10}{28} - \mathbb{P}(W)\right) + \left(\frac{11}{28} - \mathbb{P}(W)\right) + \left(\frac{13}{28} - \mathbb{P}(W)\right) = 1$$

Simplificando:

$$\mathbb{P}(W) + \frac{10}{28} - \mathbb{P}(W) + \frac{11}{28} - \mathbb{P}(W) + \frac{13}{28} - \mathbb{P}(W) = 1$$

Agrupando términos similares:

$$\frac{10}{28} + \frac{11}{28} + \frac{13}{28} - 2\mathbb{P}(W) = 1$$

Sumamos las fracciones:

$$\frac{34}{28} - 2\mathbb{P}(W) = 1$$

Obteniendo que:

$$\mathbb{P}(W) = \frac{3}{28}$$

Finalmente, calculamos $\mathbb{P}(|Z|)$:

$$\mathbb{P}(|Z|) = \mathbb{P}(Z) - \mathbb{P}(W) = \frac{13}{28} - \frac{3}{28} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que una empresa opere únicamente en Z es $\mathbb{P}(|Z|) = \frac{5}{14}$.

ii) Si se selecciona una empresa que opera en Z, ¿cuál es la probabilidad de que esta opere únicamente en dicha ciudad?

Solución: Queremos encontrar la probabilidad de que una empresa opere únicamente en Z dado que opera en Z, es decir, $\mathbb{P}(|Z| \mid Z)$. Esto se calcula utilizando la fórmula de probabilidad condicional:

$$\mathbb{P}(|Z| \mid Z) = \frac{\mathbb{P}(|Z| \cap Z)}{\mathbb{P}(Z)}$$

Dado que $\mathbb{P}(|Z| \cap Z)$ es simplemente $\mathbb{P}(|Z|)$ (porque $|Z|$ representa las empresas que operan únicamente en Z), podemos reescribir la fórmula como:

$$\mathbb{P}(|Z| \mid Z) = \frac{\mathbb{P}(|Z|)}{\mathbb{P}(Z)}$$

Sabemos que:

$$\mathbb{P}(|Z|) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

$$\mathbb{P}(Z) = \frac{13}{28}$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula:

$$\mathbb{P}(|Z| \mid Z) = \frac{\frac{10}{28}}{\frac{13}{28}} = \frac{10}{13}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que una empresa opere únicamente en Z dado que opera en Z es $\frac{10}{13}$, o aproximadamente 0.7692 (76.92%).

b) **(5 puntos)** Un local que vende empanadas para el 18 de septiembre tiene tres cocineros: A, B y C. El cocinero A prepara el 50% de las empanadas, el cocinero B el 30%, y el cocinero C el 20%. Se sabe que el 4% de las empanadas preparadas por el cocinero A se queman, el 5% de las empanadas preparadas por el cocinero B se queman, y el 7% de las empanadas preparadas por el cocinero C se queman.

i) Si se selecciona una empanada al azar y resulta estar quemada, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido preparada por el cocinero B?

Solución: Primero, calculamos la probabilidad total de que una empanada esté quemada:

$$\mathbb{P}(\text{Quemada}) = \mathbb{P}(\text{Quemada} \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\text{Quemada} \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\text{Quemada} \mid C)\mathbb{P}(C)$$

$$\mathbb{P}(\text{Quemada}) = (0.04 \times 0.50) + (0.05 \times 0.30) + (0.07 \times 0.20) = 0.049$$

Ahora, usamos el teorema de Bayes para encontrar $\mathbb{P}(B \mid \text{Quemada})$:

$$\mathbb{P}(B \mid \text{Quemada}) = \frac{\mathbb{P}(\text{Quemada} \mid B) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(\text{Quemada})}$$

Sustituyendo los valores:

$$\mathbb{P}(B \mid \text{Quemada}) = \frac{0.05 \times 0.30}{0.049} = \frac{0.015}{0.049} \approx 0.3061$$

Por lo tanto, la probabilidad de que una empanada quemada haya sido preparada por el cocinero B es aproximadamente 0.3061 o 30.61%.

ii) Suponiendo que un cliente que hizo el pedido de las 20 empanadas solicita una compensación si más del 10% de las empanadas están quemadas, ¿cuál es la probabilidad de que el local tenga que ofrecer una compensación?

Solución: El local ofrece una compensación si más del 10% de las empanadas están quemadas, es decir, si más de 2 empanadas están quemadas (porque 10% de 20 empanadas es 2 empanadas).

Queremos calcular $\mathbb{P}(X > 2)$:

$$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2)$$

Donde $\mathbb{P}(X \leq 2)$ es la suma de las probabilidades de que haya 0, 1 o 2 empanadas quemadas:

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$$

Calculamos estas probabilidades

$$\mathbb{P}(X = 0) = (0.951)^{20} \approx 0.3661$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \binom{20}{1} \times (0.049)^1 \times (0.951)^{19} \approx 0.3772$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \binom{20}{2} \times (0.049)^2 \times (0.951)^{18} \approx 0.1847$$

Entonces,

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = 0.3661 + 0.3772 + 0.1847 \approx 0.928$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - 0.928 = 0.072$$

La probabilidad de que el local tenga que ofrecer una compensación es aproximadamente 0.072 o 7.2%.

Problema 2 (20 puntos)

Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros α y β, respectivamente.

a) **(5 puntos)** Sea $Z = \max\{X, Y\}$. Determine una expresión para la función de distribución acumulada de Z.

Solución: Tenemos

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) \\ &= \mathbb{P}(\max\{X,Y\} \leq z) \\ &= \mathbb{P}(X \leq z, Y \leq z) \\ &= \mathbb{P}(X \leq z) \cdot \mathbb{P}(Y \leq z) \\ &= F_X(z) \cdot F_Y(z) \\ &= (1 - e^{-\alpha z}) \cdot (1 - e^{-\beta z}) \end{aligned}$$

b) **(5 puntos)** Sea $W = \min\{X, Y\}$. Demuestre que W distribuye exponencial y determine su parámetro.

Solución: Para este caso tenemos

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \mathbb{P}(W \leq w) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\min\{X,Y\} > w) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X > w) \cdot \mathbb{P}(Y > w) \\ &= 1 - e^{-\alpha w} \cdot e^{-\beta w} \\ &= 1 - e^{-(\alpha+\beta)w}. \end{aligned}$$

Esto es la CDF de una distribución exponencial con parámetro $\alpha + \beta$. Por lo tanto, $W = \min\{X, Y\}$ sigue una distribución exponencial con parámetro $\alpha + \beta$.

c) **(5 puntos)** Calcule $\mathbb{P}(\min\{X, Y\} \leq w \leq \max\{X, Y\})$, con $w > 0$.

Solución: Tenemos

$$\mathbb{P}(\min\{X,Y\} \leq w \leq \max\{X,Y\}) = 1 - \mathbb{P}(w < \min\{X,Y\}) - \mathbb{P}(w > \max\{X,Y\})$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - e^{-(\alpha+\beta)w} - \mathbb{P}(w > X, w > Y) \\
&= 1 - e^{-(\alpha+\beta)w} - (1 - e^{-\alpha w})(1 - e^{-\beta w}) \\
&= 1 - e^{-(\alpha+\beta)w} - \left(1 - e^{-\alpha w} - e^{-\beta w} + e^{-(\alpha+\beta)w}\right) \\
&= e^{-\alpha w} + e^{-\beta w} - 2e^{-(\alpha+\beta)w}
\end{aligned}
$$

d) **(5 puntos)** Sea $V = X^2$. Determine una expresión para la función de densidad de probabilidad de V.

Solución: Podemos notar que

$$F_V(v) = \mathbb{P}(V \leq v) = \mathbb{P}(X^2 \leq v)$$

Dado que $V = X^2$ y $X \geq 0$ (ya que X sigue una distribución exponencial), entonces:

$$F_V(v) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{v}) \quad \text{para} \quad y \geq 0$$

Dado que $X \sim \text{Exp}(\alpha)$, la CDF de X es:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\alpha x}$$

Por lo tanto:

$$F_V(v) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{v}) = 1 - e^{-\alpha\sqrt{v}} \quad \text{para} \quad v \geq 0$$

Para obtener la PDF de V, derivamos la CDF de V con respecto a v:

$$f_V(v) = \frac{d}{dv} F_V(v) = \frac{d}{dv}\left(1 - e^{-\alpha\sqrt{v}}\right)$$

Calculando la derivada:

$$f_V(v) = \alpha \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot e^{-\alpha\sqrt{v}} \quad \text{para} \quad v \geq 0$$

Así, la función de densidad de probabilidad de V es:

$$f_V(v) = \frac{\alpha}{2\sqrt{v}} e^{-\alpha\sqrt{v}} \quad \text{para} \quad v \geq 0$$

Problema 3 (30 puntos)

Suponga un sistema FIFO donde los tiempos entre llegadas (en horas) pueden modelarse como una variable aleatoria X acotada entre los valores $x \in [0, 1]$, tal que su CDF es $F(x) = 3x^2 - 2x^3$. Las atenciones tardan un tiempo aleatorio Z que sigue una distribución exponencial de media 2/3 horas.

a) **(2 puntos)** Utilice el Método Congruencial Lineal (LCG) con $a = 21$, $c = 13$, $m = 100$ y $X_0 = 31$, para obtener una serie de 12 variables aleatorias Uniforme(0,1).

Solución: Tenemos

Xi	64	57	10	23	96	29	22	75	88	61	94	87
Ui	0.64	0.57	0.10	0.23	0.96	0.29	0.22	0.75	0.88	0.61	0.94	0.87

Table 1: Inciso a).

b) **(14 puntos)** Utilice la serie obtenida en el inciso anterior para generar instancias de X. Para ello, desarrolle un algoritmo de Aceptación y Rechazo adecuado, utilizando como cota una función lineal a tramos (trapezoidal) como se muestra en la Figura 1.

Ejemplo: si generó dos instancias uniformes U_1, U_2, en ese orden, utilice U_1 para la decisión de aceptar o rechazar, y utilice U_2 para generar su instancia candidata.

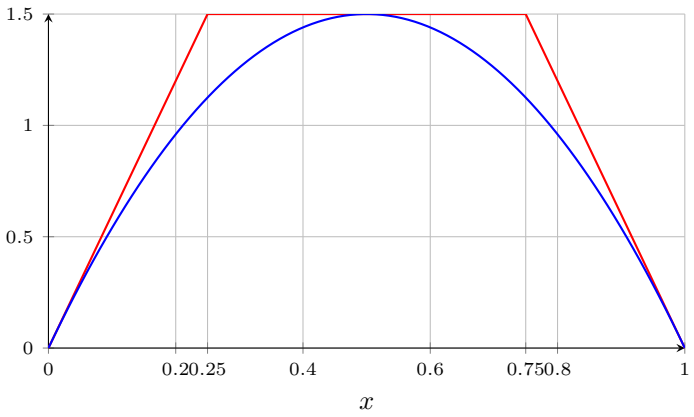


Figure 1: Cota sugerida para el algoritmo de Aceptación y Rechazo.

En este ítem se evaluará la definición de los pasos adecuados para llegar a dichas instancias. El siguiente punteo puede ser de ayuda:

- Defina adecuadamente las funciones $t(x)$, $h(x)$ y $g(x)$.
- Explique cómo genera cada instancia candidata.

Aproxime todos los valores con que trabaje al segundo decimal

Solución: Partamos viendo la definición de las funciones asociadas.

La función objetivo $f(x)$ está dada por:

$$f(x) = 6x(1-x)$$

La función de cota $t(x)$ es:

$$t(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } 0 \leq x \leq 0.25 \\ 1.5 & \text{si } 0.25 < x \leq 0.75 \\ -6x + 6 & \text{si } 0.75 < x \leq 1 \end{cases}$$

La constante c está dada por el área del trapecio que en este caso es $\frac{9}{8}$.

La función de aceptación $g(x)$ se define como:

$$g(x) = \frac{f(x)}{t(x)} = \begin{cases} 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 0.25 \\ 4x(1-x) & \text{si } 0.25 < x \leq 0.75 \\ x & \text{si } 0.75 < x \leq 1 \end{cases}$$

La función $h(x)$, a partir de la cual generaremos un candidato es:

$$h(x) = \frac{t(x)}{c} = \begin{cases} \frac{16}{3}x & \text{si } 0 \leq x \leq 0.25 \\ \frac{4}{3} & \text{si } 0.25 < x \leq 0.75 \\ -\frac{16}{3}x + \frac{16}{3} & \text{si } 0.75 < x \leq 1 \end{cases}$$

Luego, al ser $h(x)$ una función a tramos, obtenemos su distribución acumulada $H(x)$ para poder aplicar el método de la Transformada Inversa

Para $0 \leq x \leq 0.25$**:**

Integrando $h(x) = \frac{16}{3}x$ en este intervalo:

$$H(x) = \int_0^x \frac{16}{3}t\,dt = \left[\frac{8}{3}t^2\right]_0^x = \frac{8}{3}x^2$$

Para $0.25 < x \leq 0.75$**:**

Primero, evaluamos $H(x)$ en $x = 0.25$ para obtener la constante de integración:

$$H(0.25) = \frac{8}{3}(0.25)^2 = \frac{8}{3} \times 0.0625 = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} \approx 0.1667$$

Ahora, integramos $h(x) = \frac{4}{3}$ desde $x = 0.25$ hasta x:

$$H(x) = \frac{1}{6} + \int_{0.25}^x \frac{4}{3}\,dt = \frac{1}{6} + \frac{4}{3}(x - 0.25)$$

$$H(x) = \frac{1}{6} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}x - \frac{1}{6}$$

Para $0.75 < x \leq 1$**:**

Primero, evaluamos $H(x)$ en $x = 0.75$ para obtener la constante de integración:

$$H(0.75) = \frac{4}{3}(0.75) - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 0.8333$$

Ahora, integramos $h(x) = -\frac{16}{3}x + \frac{16}{3}$ desde $x = 0.75$ hasta x:

$$H(x) = \frac{5}{6} + \int_{0.75}^x \left(-\frac{16}{3}t + \frac{16}{3}\right)dt = \frac{5}{6} + \left[-\frac{8}{3}t^2 + \frac{16}{3}t\right]_{0.75}^x$$

Evaluando la integral:

$$H(x) = \frac{5}{6} + \left[-\frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{3}x\right] - \left[-\frac{8}{3}(0.75)^2 + \frac{16}{3}(0.75)\right]$$

Simplificando:

$$H(x) = -\frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{3}x + \left(\frac{9}{6} - \frac{3}{6}\right) = -\frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{3}x - \frac{3}{6} + \frac{3}{3} = \frac{8}{3}(x - 0.75)$$

Finalmente, la función acumulada $H(x)$ es:

$$H(x) = \begin{cases} \frac{8}{3}x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 0.25 \\ \frac{4}{3}x - \frac{1}{6} & \text{si } 0.25 < x \leq 0.75 \\ -\frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{3}x - \frac{5}{3} & \text{si } 0.75 < x \leq 1 \end{cases}$$

Luego, como la función acumulada $H(x)$ está definida por tramos, su inversa se calcula para cada tramo. Notar que los límites del dominio de la función inversa equivalen a los límites del recorrido de la función acumulada.

Para $0 \leq y \leq \frac{1}{6}$:

La función acumulada es:

$$H(x) = \frac{8}{3}x^2$$

Invirtiendo:

$$y = \frac{8}{3}x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{3y}{8}}$$

Por lo tanto:

$$H^{-1}(y) = \sqrt{\frac{3y}{8}}$$

Para $\frac{1}{6} < y \leq \frac{5}{6}$:

La función acumulada es:

$$H(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{6}$$

Invirtiendo:

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3y}{4} + \frac{1}{8}$$

Por lo tanto:

$$H^{-1}(y) = \frac{3y}{4} + \frac{1}{8}$$

Para $\frac{5}{6} < y \leq 1$:

La función acumulada es:

$$H(x) = -\frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{3}x - \frac{5}{3}$$

Invirtiendo usando la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = -\frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{3}x - \frac{5}{3}$$

Simplificando:

$$x = 1 - \sqrt{1 - \frac{5 + 3y}{8}}$$

Por lo tanto:

$$H^{-1}(y) = 1 - \sqrt{1 - \frac{5 + 3y}{8}}$$

$$H^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3y}{8}} & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{1}{6} \\ \frac{3y}{4} + \frac{1}{8} & \text{si } \frac{1}{6} < y \leq \frac{5}{6} \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{5+3y}{8}} & \text{si } \frac{5}{6} < y \leq 1 \end{cases}$$

Finalmente, cada iteración del algoritmo de Aceptación y Rechazo es de la forma:

(a) Generar instancia uniforme U_1

(b) Generar segunda instancia Uniforme U_2

(c) Generar instancia candidata Y evaluando U_2 en $H^{-1}(y)$

(d) Evaluar instancia candidata Y en la función de aceptación $g(y)$

(e) Si $U_1 \leq g(Y)$, aceptar Y como instancia de X, si no, regresar al primer paso

Aplicando dicho algoritmo, obtenemos lo siguiente (ver Tabla 1)

c) **(4 puntos)** Genere la misma cantidad de instancias de Z que obtuvo para X en el apartado b). Para ello, en caso de necesitar variables Uniforme(0,1), utilice el siguiente conjunto en el mismo orden que se entregan:

$$U = \{0.54, 0.92, 0.23, 0.08, 0.15, 0.62, 0.38, 0.00, 0.69, 0.85\}$$

Aproxime todos los valores al segundo decimal.

Solución: Aplicamos el método de transformada inversa con la expresión obtenida en clases para obtener cuatro instancias con distribución exponencial de tasa $\lambda = 3/2$ (ver Tabla 3).

$$Z = \frac{-1}{\lambda} \ln(1 - U)$$

	X_i	U_i	$Y = H^{-1}(U_i)$	$g(Y)$	**Decisión**
0	31	-	-	-	-
1	64	0.64	-	-	-
2	57	0.57	0.55	0.99	Aceptamos 0.55
3	10	0.10	-	-	-
4	23	0.23	0.30	0.84	Aceptamos 0.3
5	96	0.96	-	-	-
6	29	0.29	0.34	0.90	Rechazamos 0.34
7	22	0.22	-	-	-
8	75	0.75	0.69	0.86	Aceptamos 0.69
9	88	0.88	-	-	-
10	61	0.61	0.58	0.97	Aceptamos 0.58
11	94	0.94	-	-	-
12	87	0.87	0.78	0.78	Rechazamos 0.78

Table 2: Inciso b).

U_i	Z_i
0.54	0.52
0.92	1.68
0.23	0.17
0.08	0.06

Table 3: Inciso c).

d) **(6 puntos)** Genere una tabla como la vista en clases a partir de las variables I_i (*Interarrival Time*, obtenida en *b*)) y S_i (*Service Time*, obtenida en *c*)). En su tabla debe incluir adicionalmente las siguientes variables.

- A_i: Instante de llegada del i-ésimo cliente
- T_i: Instante en que empieza a atenderse el i-ésimo cliente
- W_i: Tiempo de espera en cola del i-ésimo cliente
- D_i: Instante de salida del i-ésimo cliente del sistema

Solución: Tabulamos los valores en base a las 4 instancias que aceptamos de X (ver Tabla 3).

i	**I_i**	**A_i**	**T_i**	**W_i**	**S_i**	**D_i**
1	0.55	0.55	0.55	0.00	0.52	1.07
2	0.30	0.85	1.07	0.22	1.68	2.75
3	0.69	1.54	2.75	1.22	0.17	2.92
4	0.58	2.12	2.92	0.81	0.06	2.98

Table 4: Inciso d).

e) **(4 puntos)** Para el sistema simulado, obtenga el tiempo de espera promedio en cola, la cantidad media de clientes en el sistema y el % de utilización del sistema.

Solución: Con los resultados anteriores, obtenemos que el tiempo promedio en cola es de 0.56 horas (se obtiene como $\sum_{i=1}^{4} \frac{W_i}{4}$), la cantidad media de clientes en el sistema es de 1.57 (se obtiene como $\sum_{i=1}^{4} \frac{D_i - A_i}{D_4}$) y el sistema estuvo utilizado un 81.54% del tiempo (se obtiene como $1 - \frac{A_1}{D_4}$).

Formulario Distribuciones

Distribución	**PDF**	**CDF**	**Esperanza**	**Varianza**
Poisson(λ)	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Binomial(n, p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$n\mathbb{P}(1-p)$
Uniforme(a, b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Forma cuadrática	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$			