Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123-2 – Modelos Estocásticos
Profesor Nicolás Vargas C.
Primer Semestre 2024

Interrogación 1

Duración: 2 horas y 20 minutos

Problema 1 (20 pts.)

1. Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso Poisson con tasa $\lambda > 0$. Calcule:

   a) (5 puntos) $P(N(20) - N(10) = 50 | N(18) - N(15) = 11)$

   b) (5 puntos) $P(11 < S_{10} \leq 15 | N(20) = 50)$

2. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros α y β, respectivamente. Calcule:

   a) (5 puntos) $P(\min\{X, Y\} \leq w \leq \max\{X, Y\})$, con $w > 0$.

   b) (5 puntos) $\mathbb{E}[\min\{X, Y\} | \min\{X, Y\} > v]$, con $v > 0$.

Solucion Problema 1

1. a)

$$\begin{aligned}
P(N(20) - N(10) = 50 | N(18) - N(15) = 11) &= \frac{P(N(20) - N(10) = 50, N(18) - N(15) = 11)}{P(N(18) - N(15) = 11)} \\
&= \frac{P(N(20) - N(10) = 50, N(18) - N(15) = 11)}{P(N(18) - N(15) = 11)} \\
&= \frac{P(N(20) - N(10) = 50, N(18) - N(15) = 11) \cdot P(N(20) - N(10) = 50)}{P(N(18) - N(15) = 11) \cdot P(N(20) - N(10) = 50)} \\
&= \frac{P(N(18) - N(15) = 11 | N(20) - N(10) = 50) \cdot P(N(20) - N(10) = 50)}{P(N(18) - N(15) = 11)} \\
&= P(N(18) - N(15) = 11 | N(20) - N(10) = 50) \cdot \frac{P(N(10) = 50)}{P(N(3) = 11)} \\
&= \binom{50}{11} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{11} \cdot \left(1 - \frac{3}{10}\right)^{39} \cdot \frac{\frac{e^{-10\lambda}(10\lambda)^{50}}{50!}}{\frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^{11}}{11!}}
\end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned}
P(11 < S_{10} \leq 15 | N(20) = 50) &= P(N(11) \leq 9, N(15) \geq 10 | N(20) = 50) \\
&= \frac{P(N(11) = 9, N(15) \geq 10, N(20) = 50)}{P(N(20) = 50)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{j=0}^{9} P(N(11)=j, N(15)\geq 10, N(20)=50)}{P(N(20)=50)} \\
&= \frac{\sum_{j=0}^{9}\sum_{k=0}^{50-j} P(N(11)=j, N(15)-N(11)=k, N(20)=50)}{P(N(20)=50)} \\
&= \frac{\sum_{j=0}^{9}\sum_{k=0}^{50-j} P(N(11)=j, N(15)-N(11)=k, N(20)-N(15)=50-j-k)}{P(N(20)=50)} \\
&= \frac{\sum_{j=0}^{9}\sum_{k=0}^{50-j} P(N(11)=j)\cdot P(N(15)-N(11)=k)\cdot P(N(20)-N(15)=50-j-k)}{P(N(20)=50)} \\
&= \frac{\sum_{j=0}^{9}\sum_{k=0}^{50-j} P(N(11)=j)\cdot P(N(4)=k)\cdot P(N(5)=50-j-k)}{P(N(20)=50)} \\
&= \frac{\sum_{j=0}^{9}\sum_{k=0}^{50-j} \frac{e^{-11\lambda}(11\lambda)^j}{j!}\cdot\frac{e^{-4\lambda}(4\lambda)^k}{k!}\cdot\frac{e^{-5\lambda}(5\lambda)^{50-j-k}}{(50-j-k)!}}{\frac{e^{-20\lambda}(20\lambda)^{50}}{50!}}
\end{aligned}
$$

2. *a*)

$$
\begin{aligned}
P(\min\{X,Y\}\leq w\leq \max\{X,Y\}) &= P(\min\{X,Y\}\leq w\leq \max\{X,Y\}|X<Y)\cdot P(X<Y) \\
&\quad + P(\min\{X,Y\}\leq w\leq \max\{X,Y\}|X\geq Y)\cdot P(X\geq Y) \\
&= P(X\leq w\leq Y)\cdot P(X<Y) + P(Y\leq w\leq X)\cdot P(X\geq Y) \\
&= P(X\leq w)\cdot P(w\leq Y)\cdot P(X<Y) + P(Y\leq w)\cdot P(w\leq X)\cdot P(X\geq Y) \\
&= P(X\leq w)\cdot(1-P(Y\leq w))\cdot P(X<Y) + P(Y\leq w)\cdot(1-P(X\leq w))\cdot P(X\geq Y) \\
&= (1-e^{-\alpha w})\cdot e^{-\beta w}\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + (1-e^{-\beta w})\cdot e^{-\alpha w}\frac{\beta}{\alpha+\beta} \\
&= \frac{\alpha e^{-\beta w} + \beta e^{-\alpha w} - (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)w}}{\alpha+\beta} \\
&= \frac{\alpha e^{-\beta w} + \beta e^{-\alpha w}}{\alpha+\beta} - e^{-(\alpha+\beta)w}
\end{aligned}
$$

b) En clases se demostró que el mínimo de dos variables exponenciales $X\sim \text{Exp}(\alpha)$ y $Y\sim\text{Exp}(\beta)$ tiene la misma distribución que otra exponencial con un parámetro igual a la suma de los dos anteriores ($Z\sim\text{Exp}(\alpha+\beta)$). Esto se puede ocupar directamente o demostrar. Una demostración válida sería:

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z\leq z\} \\
&= P\{\min\{X,Y\}\leq z\} \\
&= 1-P\{\min\{X,Y\}>z\} \\
&= 1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\} \\
&= 1-e^{-\alpha z}\cdot e^{-\beta z} \\
&= 1-e^{-(\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
f_Z(z) = F_Z'(z) = (\alpha+\beta)\cdot e^{-(\alpha+\beta)}
$$

Por lo tanto, $Z \sim \text{Exp}(\alpha + \beta)$. Como sabemos que la distribución exponencial no tiene memoria, entonces:

$$E[\min\{X, Y\} | \min\{X, Y\} > v] = E[Z|Z > v] = E[Z] + v$$

Finalmente, como el valor esperado de una variable aleatoria exponencial es el inverso de su parámetro:

$$\mathbb{E}\left[\min\{X, Y\} | \min\{X, Y\} > v\right] = \frac{1}{\alpha + \beta} + v$$

Problema 2 (20 pts.)

Un conocido "mago" del Paseo Ahumada ha hecho una respetable fortuna con el siguiente juego de azar: en una mesa tiene tres vasos (no transparentes) boca-abajo y dos bolitas que se colocan (juntas o por separado) debajo de alguno de los vasos. Luego, con una habilidad y rapidez impresionantes, el mago procede a mover las bolitas de un vaso a otro. En cada movimiento cambia de posición solo una bolita. Esto lo hace incontables veces hasta que un jugador deseoso de apostar le dice *stop*. En ese momento el jugador tiene que escoger uno de los vasos. Si debajo del vaso hay dos bolitas, el jugador gana la cantidad apostada. De lo contrario, pierde. Para simplificar el juego, asuma que en cada movimiento el mago escoge con igual probabilidad cualquiera de las bolitas, y también equiprobablemente escoge a cuál de los otros vasos la cambia.

a) (6 puntos) Muestre que el juego anterior se puede modelar como una CMTD con solo 6 estados. Identifique estos estados y la matriz de probabilidades de transición.

b) (4 puntos) Determine las clases de estados y clasifique estas clases en transientes, recurrentes positivas o nulas, y determine si son aperiódicas o periódicas. Además, determine el valor del período cuando corresponda.

c) (3 puntos) Argumente si esta CMTD admite probabilidades estacionarias y límite. De ser así, indique el sistema de ecuaciones que se debe resolver para encontrar estas probabilidades.

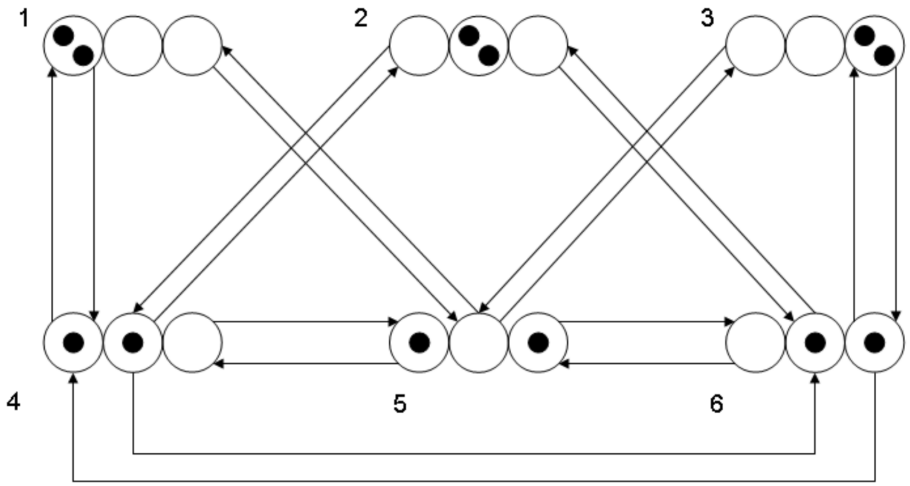
d) (3 puntos) Sea r_k el número de vasos vacíos en el estado k, y $\pi_k = \frac{3-r_k}{9}$. Demuestre que el vector definido por estos π_k corresponde a una solución estacionaria.

e) (4 puntos) Ignorando el hecho de que usted pueda tener una vista muy aguda, ¿cuál es la esperanza de la ganancia obtenida al apostar \$5.000? Considere que el mago hace "muchos" movimientos antes de que usted diga *stop* y que usted escoge equiprobablemente cualquiera de los tres vasos.

Solucion Problema 2

a) Para modelar el juego como una cadena de Markov en tiempo discreto, definimos 6 estados posibles:

- Estado 1: Dos bolitas bajo el primer vaso.
- Estado 2: Dos bolitas bajo el segundo vaso.
- Estado 3: Dos bolitas bajo el tercer vaso.
- Estado 4: Una bolita bajo el primer vaso y una bajo el segundo vaso.
- Estado 5: Una bolita bajo el primer vaso y una bajo el tercer vaso.
- Estado 6: Una bolita bajo el segundo vaso y una bajo el tercer vaso.



La matriz de probabilidades de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Como todos los estados se comunican entre sí, por lo que es una CMTD irreductible. Por lo tanto, solo existe una clase recurrente positiva. Para determinar el período de esta clase podemos pararnos en el estado 1 y obtener el máximo común divisor de los n para los cuales $P_{11}^{(n)} > 0$. Analizando la CMTD podemos ver que es posible volver en 2, 3, 4, 5, 6, etc. etapas. Luego, como el máximo común divisor es 1, la clase es aperiódica.

c) Como la CMTD es irreducible y aperiódica, entonces el proceso tiene distribución límite y distribución estacionaria (las cuales coinciden). Para calcular estas probabilidades, se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\pi^T = \pi^T \cdot P$$
$$\sum_{i=1}^{6} \pi_i = 1$$
$$\pi_i \geq 0 \qquad \forall i \in \{1, ..., 6\}$$

d) De acuerdo a la definición $r_1 = r_2 = r_3 = 2$ y $r_4 = r_5 = r_6 = 1$. Entonces: $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{9}$ y $\pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = \frac{2}{9}$.
Luego, basta con verificar que se cumple el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}) = (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{6} \pi_i = 1$$
$$\pi_i \geq 0 \qquad \forall i \in \{1, ..., 6\}$$

e) Para ganar, debemos detener el juego en un estado en el que sea posible ganar y, además, elegir correctamente el vaso ganador. Luego, la esperanza de las ganancias vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{Ganancias}] &= \sum_{i=1}^{6} \mathbb{E}[\text{Ganancias}|\text{El juego se detiene en el estado } i] \cdot P[\text{Detener el juego en el estado } i] \\
&= \sum_{i=1}^{6} \mathbb{E}[\text{Ganancias}|\text{El juego se detiene en el estado } i] \cdot \pi_i \\
&= \left(\$5.000\left(\frac{1}{3}\right) - \$5.000\left(\frac{2}{3}\right)\right) \cdot \pi_1 \\
&\quad + \left(\$5.000\left(\frac{1}{3}\right) - \$5.000\left(\frac{2}{3}\right)\right) \cdot \pi_2 \\
&\quad + \left(\$5.000\left(\frac{1}{3}\right) - \$5.000\left(\frac{2}{3}\right)\right) \cdot \pi_3 \\
&\quad - \$5.000 \cdot \pi_4 - \$5.000 \cdot \pi_5 - \$5.000 \cdot \pi_6 \\
&= -\left(\frac{\$5.000}{3}\right) \cdot (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) - \$5.000 \cdot (\pi_4 + \pi_5 + \pi_6) \\
&= -\left(\frac{\$5.000}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} - \$5.000 \cdot \frac{2}{3} \\
&= -\frac{\$25.000}{9} = -\$2.777,\overline{7}
\end{aligned}$$

Problema 3 (20 pts.)

Considere una Cadena de Markov en Tiempo Discreto con espacio de estados $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (2 puntos) Determine las clases de estados y clasifique todos los estados en transientes, recurrentes positivos o nulos, y determine si son aperiódicos o periódicos, y el valor del período si es que corresponde.

b) (2 puntos) ¿Existe $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ para todo (i, j)? Justifique.

c) (3 puntos) ¿Existe alguna distribución estacionaria? Si su respuesta es afirmativa, especifique al menos una distribución estacionaria y verifique que cumple con su correspondiente sistema de ecuaciones.

d) (4 puntos) Asumiendo que el estado inicial es el estado 1, calcule la probabilidad de eventualmente visitar el estado 4.

e) (2 puntos) Calcule $P(T(3, 2) = k)$, con $k \in \{1, ..., 9\}$.

f) (3 puntos) Determine $\mathbb{E}[T(1, 5)]$.

g) (4 puntos) Asumiendo que $f^{(0)} = [0.3, 0, 0.7, 0, 0, 0]^T$, calcule $P(X_4 = 2)$.

Solucion Problema 3

a) Las clases de estado son:

- $\{1, 3\}$: Transiente aperiódica.
- $\{2, 5, 6\}$: Recurrente positiva periódica, con período 3.
- $\{4\}$: Recurrente positiva aperiódica.

b) Como existe una clase recurrente positiva periódica, no existe $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ para todo (i, j)

c) Para determinar si existe alguna distribución estacionaria, debemos encontrar un vector π tal que $\pi^\intercal = \pi^\intercal P$ con $\pi \geq 0$ y $\pi_1 + \ldots + \pi_6 = 1$.

Analizando la cadena, se aprecia que si partimos en el estado 4, una solución estacionaria es $\pi = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$. Por otro lado, si partimos desde un estado de la clase $\{2, 5, 6\}$, otra solución estacionaria es $\pi = (0, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

d) Nos piden calcular $F(1, 4)$, luego:

$$
\begin{aligned}
& F(1,4) = P_{1,4} + P_{1,3}F(3,4) + P_{1,1}F(1,4) \\
& F(1,4) = 0 + 0.2F(3,4) + 0.4F(1,4) \\
& F(3,4) = P_{3,4} + P_{3,1}F(1,4) \\
& F(3,4) = 0.3 + 0.7F(1,4) \\
\Rightarrow\ & F(1,4) = 0.2(0.3 + 0.7F(1,4)) + 0.4F(1,4) \\
& F(1,4) = 0.06 + 0.14F(1,4) + 0.4F(1,4) \\
& F(1,4) = \frac{0.06}{0.46} = 0.13043478
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
& P(T(3,2) = 1) = P_{32} = 0 \\
& P(T(3,2) = 2) = P_{31}P_{12} = 0.7 \cdot 0.4
\end{aligned}
$$

Como para llegar del estado 3 al estado 2 por primera vez en $k \geq 3$ etapas siempre tendremos que ir del estado 3 al estado 1 en la primera transición y del estado 1 al estado 2 en la ultima, se cumple que $P(T(3, 2) = k) = P_{31}P_{11}^{(k-2)}P_{12}$. Por lo tanto, solo falta determinar $P_{11}^{(n)}$ para $n \in \{1, ..., 7\}$.

$$
\begin{aligned}
P_{11}^{(1)} &= P_{11} = 0.4 \\
P_{11}^{(2)} &= P_{11}^2 + P_{13}P_{31} \\
&= 0.4^2 + 0.7 \cdot 0.2 \\
&= 0.3 \\
P_{11}^{(3)} &= P_{11}^3 + P_{11}P_{13}P_{31} + P_{13}P_{31}P_{11} \\
&= 0.4^3 + 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.4 \\
&= 0.176 \\
P_{11}^{(4)} &= P_{11}^4 + P_{11}^2P_{13}P_{31} + P_{13}P_{31}P_{11}^2 + (P_{13}P_{31})^2 \\
&= 0.4^4 + 0.4^2 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.4^2 + (0.7 \cdot 0.2)^2 \\
&= 0.1124 \\
P_{11}^{(5)} &= P_{11}^5 + P_{11}^3P_{13}P_{31} + P_{13}P_{31}P_{11}P_{13}P_{31} + P_{13}P_{31}P_{11}^3 \\
&= 0.4^5 + 0.4^3 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.4^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 0.0696 \\
P_{11}^{(6)} &= P_{11}^6 + P_{11}^4 P_{13}P_{31} + P_{13}P_{31}P_{11}^2 P_{13}P_{31} + P_{13}P_{31}P_{11}^4 + (P_{13}P_{31})^3 \\
&= 0.4^6 + 0.4^4 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.4^2 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.4^4 + (0.7 \cdot 0.2)^3 \\
&= 0.0436 \\
P_{11}^{(7)} &= P_{11}^7 + P_{11}^5 P_{13}P_{31} + P_{11}^3 (P_{13}P_{31})^2 + P_{13}P_{31}P_{11}^3 P_{13}P_{31} + (P_{13}P_{31})^2 P_{11} P_{13}P_{31} \\
&\quad + P_{13}P_{31}P_{11}(P_{13}P_{31})^2 + P_{11}(P_{13}P_{31})^3 + P_{13}P_{31}P_{11}^5 + (P_{13}P_{31})^2 P_{11}^3 + (P_{13}P_{31})^3 P_{11} \\
&= 0.4^7 + 0.4^5 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + 0.4^3 (0.7 \cdot 0.2)^2 + 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.4^3 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + (0.7 \cdot 0.2)^2 \cdot 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.2 \\
&\quad + 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.4 (0.7 \cdot 0.2)^2 + 0.4 (0.7 \cdot 0.2)^3 + 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.4^5 + (0.7 \cdot 0.2)^2 0.4^3 + (0.7 \cdot 0.2)^3 0.4 \\
&= 0.0272
\end{aligned}
$$

Finalmente tenemos que:

$$
\begin{aligned}
P(T(3,2) = 3) &= P_{31}P_{11}P_{12} = 0.7 \cdot 0.4 \cdot 0.4 = 0.112 \\
P(T(3,2) = 4) &= P_{31}P_{11}^{(2)}P_{12} = 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.4 = 0.084 \\
P(T(3,2) = 5) &= P_{31}P_{11}^{(3)}P_{12} = 0.7 \cdot 0.176 \cdot 0.4 = 0.0493 \\
P(T(3,2) = 6) &= P_{31}P_{11}^{(4)}P_{12} = 0.7 \cdot 0.1124 \cdot 0.4 = 0.0315 \\
P(T(3,2) = 7) &= P_{31}P_{11}^{(5)}P_{12} = 0.7 \cdot 0.0696 \cdot 0.4 = 0.0195 \\
P(T(3,2) = 8) &= P_{31}P_{11}^{(6)}P_{12} = 0.7 \cdot 0.0436 \cdot 0.4 = 0.0122 \\
P(T(3,2) = 9) &= P_{31}P_{11}^{(7)}P_{12} = 0.7 \cdot 0.0272 \cdot 0.4 = 0.0076
\end{aligned}
$$

f) Utilizando $\mathbb{E}(T(i,j)) = 1 + \sum_{m \neq j} \mathbb{E}(T(m,j)) \cdot P_{i,m}$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(T(1,5)) &= 1 + P_{1,1} \cdot \mathbb{E}(T(1,5)) + P_{1,3} \cdot \mathbb{E}(T(3,5)) + P_{1,2} \cdot \mathbb{E}(T(2,5)) \\
&= \frac{1 + P_{1,3} \cdot \mathbb{E}(T(3,5)) + P_{1,2} \cdot \mathbb{E}(T(2,5))}{1 - P_{1,1}} \\
\mathbb{E}(T(3,5)) &= 1 + P_{3,1} \cdot \mathbb{E}(T(1,5)) + P_{3,4} \cdot \mathbb{E}(T(4,5)) \\
\mathbb{E}(T(4,5)) &= \infty \\
\rightarrow \mathbb{E}(T(3,5)) &= \infty \\
\rightarrow \mathbb{E}(T(1,5)) &= \infty
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
P(X_4 = 2) &= P(X_4 = 2 | X_0 = 1) \cdot P(X_0 = 1) + P(X_4 = 2 | X_0 = 3) \cdot P(X_0 = 3) \\
&= P(X_4 = 2 | X_0 = 1) \cdot f_1^{(0)} + P(X_4 = 2 | X_0 = 3) \cdot f_3^{(0)} \\
&= P_{12}^{(4)} \cdot f_1^{(0)} + P_{32}^{(4)} \cdot f_3^{(0)} \\
&= (P_{11}^3 P_{12} + P_{11}P_{13}P_{31}P_{12} + P_{13}P_{31}P_{11}P_{12} + P_{12}P_{26}P_{65}P_{52}) \cdot f_1^{(0)} + (P_{31}P_{11}^2 P_{12} + P_{31}P_{13}P_{31}P_{12}) \cdot f_3^{(0)} \\
&= (0.4^3 0.4 + 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.4 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1) \cdot 0.3 + (0.7 \cdot 0.4^2 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.4) \cdot 0.7 \\
&= 0.1992
\end{aligned}
$$

Distribución	**PDF**	**CDF**	**Esperanza**	**Varianza**
Poisson(λ)	$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Exponencial(λ)	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Binomial(n, p)	$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Uniforme(a, b)	$f(x) = \frac{1}{b-a}$	$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$