Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesor Maximiliano González
Segundo Semestre 2023

# Interrogación 1 (Pauta)

## Problema 1 (26 puntos)

a) **(5 puntos)** Sea X una variable aleatoria Uniforme (0, 1). Calcule $E(X^3)$

**Solución:**
Como X distribuye Uniforme(0,1) su función de densidad es $f(x) = 1$. Para obtener $E(X^3)$ hay que plantear la siguiente integral:

$$E(X^3) = \int_0^1 x^3 \cdot 1 \, dx$$

$$E(X^3) = \frac{1}{4}$$

b) **(5 puntos)** Suponga que su amigo le propone un interesante juego. Deberá lanzar una moneda cargada tres veces seguidas. En cada lanzamiento, si sale cara, usted gana \$Y . Sin embargo, si sale sello, pierde todo lo que ha ganado hasta el momento. ¿Cuál debiese ser el monto mínimo o máximo para \$Y que le asegure una ganancia esperada de al menos \$2000. Considere que la probabilidad de obtener cara es $p = 0.4$.

**Solución:**
Para determinar el monto mínimo o máximo que Y debe tomar para garantizar una ganancia esperada de al menos \$ 2000 hay que primero analizar los casos posibles de tirar una moneda tres veces, sus probabilidades respectivas y la ganancia en cada caso.

- $CCC$: P($CCC$)= $0.4^3$; Ganancia 3Y
- $CCS$: P($CCS$)= $0.4^2 \cdot 0.6$; Ganancia 0
- $CSC$: P($CSC$)= $0.4^2 \cdot 0.6$; Ganancia Y
- $SCC$: P($SCC$)= $0.4^2 \cdot 0.6$; Ganancia 2Y
- $SSC$: P($SSC$)= $0.6^2 \cdot 0.4$; Ganancia Y
- $SCS$: P($SCS$)= $0.6^2 \cdot 0.4$; Ganancia 0
- $CSS$: P($CSS$)= $0.6^2 \cdot 0.4$; Ganancia 0
- $SSS$: P($SSS$)= $0.6^3$; Ganancia 0

Para determinar el valor esperado de la ganacia podemos obviar los casos donde la ganncia es cero y planteamos la siguiente esperanza:

$$E[Ganancia] = 0.4^3 \cdot 3Y + 0.4^2 \cdot 0.6 \cdot Y + 0.4^2 \cdot 0.6 \cdot 2Y + 0.6^2 \cdot 0.4 \cdot Y = 0.624Y$$

$$0.624Y \geq 2000$$

$$Y \geq 3205.128$$

Por lo tanto para garantizar una ganancia esperada de al menos \$ 2000 es necesario que Y sea como mínimo 3205.128.

c) Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso de Poisson a tasa $\lambda$.

Suponga que N(t)=2.

(i) **(4 puntos)** Obtenga una expresión para la función de densidad de probabilidad del instante de ocurrencia del segundo evento.

**Solución:**
Piden la distribución de densidad de probabilidad de $S_2|N(t) = 2$. Para esto planteamos la siguiente probabilidad ( con $x \leq t$):

$$P(S_2 \leq x|N(t) = 2)$$

Separando los intervalos en $x$ y $t - x$. Podemos plantear lo siguiente:

$$\sum_{i=2}^{2} \frac{P(N(x) = i) \cdot P(N(t-x) = 2 - i)}{P(N(t) = 2)}$$

$$\sum_{i=2}^{2} \frac{(\lambda x)^i \cdot e^{-(\lambda x)}}{i!} \cdot \frac{(\lambda(t-x))^{2-i} \cdot e^{-(\lambda(t-x))}}{(2-i)!} \frac{2!}{(\lambda t)^2 \cdot e^{-\lambda t}}$$

Resolviendo la sumatoria llegamos a que:

$$P(S_2 \leq x|N(t) = 2) = \frac{x^2}{t^2}$$

Derivando por $x$ para obtener la función de densidad de probabilidad llegamos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2}{t^2} = \frac{2x}{t^2}$$

(ii) **(4 puntos)** Obtenga el valor esperado del instante en que ocurre el segundo evento.

**Solución:**
Para obtener el valor esperado del instante en que ocurre el segundo evento se debe integrar la siguiente expresión:

$$E(X) = \int_0^t x \cdot \frac{2x}{t^2}\, dx$$

$$E(X) = \frac{1}{t^2} \int_0^t 2x^2\, dx$$

$$E(X) = \frac{2t}{3}$$

Suponga ahora que $N(t) = 4$.

(iii) **(4 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el primero de ellos haya ocurrido antes del instante $x$, con $0 < x < t$?

**Solución:**
Nos piden la probabilidad de que $P(S_1 \leq x|N(t) = 4)$, lo que se puede reescribir como $P(N(x) \geq 1|N(t) = 4)$.

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{P(N(x) = i) \cdot P(N(t-x) = 4 - i)}{P(N(t) = 4)}$$

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{(\lambda x)^i \cdot e^{-(\lambda x)}}{i!} \cdot \frac{(\lambda(t-x))^{4-i} \cdot e^{-(\lambda(t-x))}}{(4-i)!} \frac{4!}{(\lambda t)^4 \cdot e^{-\lambda t}}$$

$$\sum_{i=1}^{4} \binom{4}{i} \left( \frac{x^i \cdot (t-x)^{4-i}}{t^4} \right)$$

Suponga ahora que $N(t) = n$. Sea $0 \leq s \leq t$.

(iv) **(4 puntos)** Calcule la probabilidad de que hasta el instante $s$ se observen al menos $k \leq n$ eventos.

**Solución:**
Para esta pregunta se plantea la siguiente expresión:

$$P(N(s) \geq k | N(t) = n) = 1 - P(N(s) \leq k-1 | N(t) = n)$$

$$1 - \sum_{i=1}^{k-1} P(N(s) = i | N(t) = n)$$

$$1 - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left(\frac{s}{t}\right)^i \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{k-1-i}$$

# Problema 2 (34 puntos)

a) Durante las fechas de fiestas patrias, permanentemente se observan acciones imprudentes de peatones que cruzan por vías no habilitadas arriesgándose a sufrir graves accidentes. Suponga una vía de dos pistas en la cual los peatones requieren de 8 segundos para cruzar. El flujo en la pista 1 y 2 es en promedio 200 veh/h y 160 veh/h, respectivamente. Además, en ambas pistas el paso de vehículos sigue un proceso de Poisson. Asuma que los peatones cruzarán si y solo si el tiempo entre dos vehículos consecutivos que se genera es suficiente para realizar el cruce. Cada vez que el peatón observa pasar un vehículo intentará cruzar inmediatamente.

i) **(4 puntos)** Determine la probabilidad de que inmediatamente después de que pase un auto cualquiera el peatón pueda cruzar la calle.

**Solución:**

El flujo en ambas pistas sigue un proceso poisson, los cuales se pueden definir como $N_1(t)$ y $N_(t)$ respectivamente para cada pista. La primera tiene un flujo de 200 vehículos por hora, por lo que la tasa de $N_1(t)$ sería $\lambda_1 = 200/3600 = 0.055$ veh/s. Bajo el mismo razonamiento, la tasa de $N_2(t)$ sería $\lambda_2 = 160/3600 = 0.044$ veh/s. Para que el peatón pueda cruzar, necesita de 8 segundos, por lo que se debe cumplir que:

$$P(\min\{T1, T2\} \geq 8)$$

siendo $T1$ y $T2$ los tiempos entre 2 eventos consecutivos de $N_1(t)$ y $N_2(t)$ respectivamente. Como se vio en clases, el mínimo entre dos variables aleatorias distribuye exponencial con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$, por lo que se tiene:

$$P = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\cdot 8} = e^{-0.792} = 0.452$$

ii) **(4 puntos)** Determine la cantidad esperada de vehículos que el peatón observa pasar antes de que logre cruzar.

**Solución:**

Definimos a $X$ como el proceso de conteo de cruces exitosos, considerando que los peatones cruzan de a 1. Luego, definimos la variable aleatoria $T$ como el tiempo entre 2 eventos de cruces exitosos, la cual distribuye exponencial con parámetro $(\lambda_1 + \lambda_2)p$. Con esto, tenemos que $\bar{T}$, el tiempo medio de espera de un peatón, será:

$$\bar{T} = \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)p} = \frac{10}{p}$$

Finalmente, multiplicamos por la tasa de llegada total de vehículos para obtener la cantidad de estos:

$$N = \frac{10}{p} \cdot \frac{200 + 160}{3600} = \frac{1}{p} = 2.212$$

b) Considere la organización de una campaña masiva de adopción de mascotas. En base a sus conocimientos de procesos estocásticos, usted ha propuesto que la adopción de estos tiernos animalitos ocurre según los siguientes procesos de Poisson: $P(t)$, $t \geq 0$ cuenta el número de perritos que han sido adoptados hasta el día $t$, y $G(t)$, $t \geq 0$ que cuenta el número de gatitos que han sido adoptados hasta el día $t$. Dichos procesos ocurren a tasas $\lambda_p$ y $\lambda_g$ adopciones por día, respectivamente.

i) **(2 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que durante el primer día se adopten 4 perros y dentro de los primeros 4 días se adopten 9 perros en total?

**Solución:**

Sea $N_p(t)$ el proceso poisson de adopción de perros y $N_g(t)$ el proceso poisson de adopción de gatos. La probabilidad pedida se puede expresar como:

$$P(N_p(1) = 4 \wedge N_p(4) = 9) = P(N_p(4) = 9 | N_p(1) = 4) \cdot P(N_p(1) = 4)$$

Lo que es equivalente a:

$$P(N_p(1) = 4) \cdot P(N_p(3) = 5)$$

Reemplazando se obtiene:

$$\frac{\lambda_p^4 \cdot e^{-\lambda_p}}{4!} \cdot \frac{3\lambda_p^5 \cdot e^{-3\lambda_p}}{5!}$$

ii) **(4 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que durante los primeros dos días se adopten más de 8 animales (perros o gatos), si se sabe que en dichos dos días se adoptaron al menos tres?

**Solución:**

Sea $N(t)$ el proceso poisson de animales en total, es decir, la suma de $N_p(t)$ y $N_g(t)$, y su tasa es $\lambda = \lambda_g + \lambda_p$. La probabilidad que se pide es:

$$P(N(2) > 8 | N(2) \geq 3) = \frac{P(N(2) > 8 \wedge N(2) \geq 3)}{P(N(2) \geq 3)}$$

Como el numerador tenemos que $N(2)$ debe ser mayor que 8 y 3 al mismo tiempo, basta con que sea mayor a 8 para que se cumplan ambas, por lo que queda:

$$\frac{P(N(2) > 8)}{P(N(2) \geq 3)} = \frac{1 - P(N(2) \leq 8)}{1 - P(N(2) \leq 2)} = \frac{1 - \sum_{i=0}^{8} P(N(2) = i)}{1 - \sum_{j=0}^{2} P(N(2) = j)}$$

Reemplazando las probabilidades se obtiene:

$$\frac{1 - \sum_{i=0}^{8} \frac{(2\lambda)^i \cdot e^{-2\lambda}}{i!}}{1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{(2\lambda)^i \cdot e^{-2\lambda}}{i!}}$$

iii) **(4 puntos)** Considere que durante los 4 primeros días, se adoptaron 10 perritos. Calcule el número esperado de perritos que se adoptaron el primer día.

**Solución:**

El número esperado de perritos que se adoptaron en el primer día, corresponde a la esperanza en 1 periodo, es decir:

$$E[N_p(1)] = \lambda_p$$

iv) **(4 puntos)** Si lamentablemente durante los primeros $n$ días no hubo adopciones, ¿cuál es el valor esperado del tiempo hasta que ocurra la primera adopción, ya sea de un perrito o de un gatito?

**Solución:**

Por la propiedad de pérdida de memoria, sabemos que no afecta lo que haya ocurrido en el pasado, por lo que nos piden es simplemente la esperanza de que ocurra el próximo evento, es decir:

$$E[T_1] = \frac{1}{\lambda}$$

con $\lambda = \lambda_p + \lambda_g$

v) **(6 puntos)** Obtenga una expresión para la función de densidad del momento de la primera adopción (perro o gato), si se sabe que en los primeros $t$ días hubo dos adopciones.

**Solución:**

Se puede expresar como la siguiente probabilidad condicional:

$$P(S_1 \leq x | N(2) = 2) = P(N(x) \geq 1 | N(2) = 2)$$

Ocupando la definición de probabilidad condicional y reescribiendo los intervalos se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{P(N(x) = i) \cdot P(N(t-x) = 2-i)}{P(N(t) = 2)} = \sum_{i=1}^{2} \frac{(\lambda x)^i \cdot e^{-(\lambda x)}}{i!} \cdot \frac{(\lambda(t-x))^{2-i} \cdot e^{-(\lambda(t-x))}}{(2-i)!} \cdot \frac{2!}{(\lambda t)^2 \cdot e^{-\lambda t}}$$

Sumando ambos términos de la sumatoria y simplificando los términos semejantes se obtiene que:

$$P(S_1 \leq x | N(2) = 2) = \frac{2x}{t} - \frac{x^2}{t^2}$$

Para encontrar la expresión de la función de densidad, debemos derivar con respecto a $x$ la probabilidad obtenida, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{t} - \frac{x^2}{t^2}\right) = \frac{2}{t} - \frac{2x}{t^2}$$

vi) **(6 puntos)** Sea $D$ la variable aleatoria que representa el tiempo (en días) transcurrido desde la primera adopción de un gatito y la primera adopción de un perrito. Calcule la probabilidad de que dicha diferencia no sea mayor a $x$ días.

**Solución:**

$D$ representa la diferencia entre los primeros eventos de $N_p(t)$ y $N_g(t)$, es decir, la diferencia entre dos distribuciones exponenciales. Definiremos a $T$ como el tiempo entre eventos de adopción de gatos ($T_1^g$) y $Y$ como el tiempo entre eventos de adopción de perros ($T_1^p$). Sabemos que ambas son distribuciones exponenciales de parámetros $\lambda_g$ y $\lambda_p$ respectivamente. Con esto, sabemos que la probabilidad pedida es:

$$P(D \leq x) = P(T - Y \leq x)$$

Ocupando la definición de probabilidades totales:

$$\int_0^x P(T - Y \leq x | Y = y) \cdot f_y(y) dy = \int_0^x P(T \leq x + y) \cdot f_y(y) dy$$

Acá se presenta 2 casos, ya que $x + y$ puede ser negativo o positivo y la función de distribución exponencial vale 0 para el caso negativo.

Si $x \geq 0$:

Esta integral se puede separar en 2, para así obtener 2 funciones de densidad exponenciales que se puedan integrar fácilmente:

$$\int_0^x \lambda_p e^{-\lambda_p y} dy - \frac{\lambda_p e^{-\lambda_g x}}{\lambda_g + \lambda_p} \cdot \int_0^x (\lambda_g + \lambda_p) e^{-(\lambda_g + \lambda_p) y} dy$$

Ambas integrales corresponden a funciones de densidad exponenciales, por lo que se obtiene:

$$(1 - e^{-\lambda_p x}) - \frac{\lambda_p e^{-\lambda_g x}}{\lambda_g + \lambda_p} \cdot (1 - e^{-(\lambda_g + \lambda_p) x})$$

Desarrollando la expresión se obtiene:

$$1 - e^{-\lambda_p x} + \frac{\lambda_p e^{(-2\lambda_g x - \lambda_p x)} - \lambda_p e^{-\lambda_g x}}{\lambda_g + \lambda_p}$$

Si $x < 0$:

$$\int_0^{|x|} P(T \leq x + y) \cdot f_y(y) dy = 0$$