Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesores Maximiliano González y Nicolás Vargas
Primer Semestre 2025

Examen

Duración: 2 horas y 30 minutos

Resuelva 5 de las siguientes 6 preguntas. Marque claramente con una X toda la hoja de la pregunta que no contestará. En caso de no descartar una pregunta, no se contará el problema con mayor puntaje para el cálculo de la nota.

Problema 1 (12 puntos)

a) **(3 puntos)** Usted elige un número al azar entre 1 y 100 (ambos inclusive). Dado que el número que usted eligió es divisible por 2, calcule la probabilidad de que dicho número también sea divisible por 3 o por 5. **Solución:** Sean A, B y C los conjuntos de números entre 1 y 100 divisibles por 2,3 y 5 respectivamente. Queremos calcular $P(B \cup C|A)$. Por Probabilidad condicional, esto está dado por

$$P(B \cup C|A) = \frac{P((B \cup C) \cap A)}{P(A)}$$

Claramente, $P(A) = 50/100$. Luego, $P((B \cup C) \cap A) = P(B \cap A) + P(B \cap A) - P(C \cap B \cap A)$.
$A \cap B = \{6, 12, 18, ..., 96\}$, el cual contiene 16 elementos. $(A \cap C) - (A \cap B \cap C) = \{10, 20, \cancel{30}, 40, 50, \cancel{60}, 70, 80, \cancel{90}, 100\}$, el cual contiene 7 elementos. Así, reemplazando

$$P(B \cup C|A) = \frac{\frac{16}{100} + \frac{7}{100}}{\frac{50}{100}} = \frac{23}{50}$$

En una planta industrial se tiene un detector que activa un mecanismo de enfriamiento para la maquinaria cuando la temperatura sobrepasa un umbral de seguridad. La probabilidad de que esto ocurra en un periodo de una hora es de 0.2. Sin embargo, el detector tiene un defecto y falla 25% de las veces. Cuando el detector falla, independientemente de cual sea la medida correcta, el resultado es positivo (detecta exceso de temperatura) con probabilidad 0.4 y negativo (detecta que no hay exceso de temperatura) con probabilidad 0.6.

b) **(3 puntos)** En un periodo de una hora, ¿cuál es la probabilidad de que el detector indique que la temperatura excede el umbral? **Solución:** Sean los siguientes eventos:

- T: La temperatura excede el umbral de seguridad.
- E: Hay un error en el detector.
- R: El detector registra exceso de temperatura.
- C: El detector registra el resultado correcto.

Tenemos que $P(T) = 0.2$, $P(E) = 0.25$, $P(R|E) = 0.4$. Así, la probabilidad de que el detector registre que hay exceso de temperatura es

$$P(R) = P(R|E^c)P(E^c) + P(R|E)P(E) = 0.2 \cdot 0.75 + 0.4 \cdot 0.25 = 0.25$$

c) **(3 puntos)** Si el detector registra exceso de temperatura, ¿Cuál es la probabilidad de que realmente haya sido así?
Solución:

$$P(T|R) = \frac{P(R \cap T)}{P(R)} = \frac{P(R \cap T)}{0.25}$$

Descomponemos la intersección según haya habido un error en el detector o no:

$$\begin{aligned} P(T \cap R) &= P(T \cap R \cap E) + P(T \cap R \cap E^c) \\ &= P(R|T \cap E)P(E|T)P(T) + P(R|T \cap E^c)P(E^c|T)P(T) \\ &= 0.4 \cdot 0.25 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.75 \cdot 0.2 = 0.02 + 0.15 = 0.17 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$P(T|R) = \frac{0.17}{0.25} = 0.68$$

d) **(3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el mecanismo registre el estado correcto?
Solución:

$$P(C) = P(C|E)P(E) + P(C|E^c)P(E^c)$$

Si el detector no falla, la probabilidad de que indique el estado correcto es 1: $P(C|E^c) = 1$.

Observamos que:

$$C = (T \cap R) \cup (T^c \cap R^c)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P(C|E) &= P(T \cap R|E) + P(T^c \cap R^c|E) \\ &= P(T|E)P(R|E) + P(T^c|E)P(R^c|E) \\ &= 0.2 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.6 = 0.08 + 0.48 = 0.56 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$P(C) = 0.56 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.75 = 0.14 + 0.75 = 0.89$$

Problema 2 (12 puntos)

a) **(3 puntos)** Sea T una variable aleatoria con distribución Exponencial de media $\frac{1}{\lambda}$ minutos que representa el tiempo que tarda un(a) estudiante en decidir cuál de las 6 preguntas dejará sin responder en el examen de Modelos Estocásticos. Suponga que este estudiante ya ha utilizado s minutos en tomar esta decisión. Demuestre que el tiempo esperado que le tomará está dado por $\mathbb{E}(T|T > s) = \mathbb{E}(T) + s$.

Hint: La distribución condicional de $T|T > s$ está dada por $f_{X|X>s}(t) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda s}}$.

Solución: Dado que ya se conoce la distribución condicional. Basta con utilizar la definición de esperanza condicional.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T \mid T > s) &= \int_s^\infty t \cdot f_{X|X>s}(t)\, dt \\
&= \int_s^\infty t \cdot \lambda e^{-\lambda(t-s)}\, dt \\
&= \int_0^\infty (u+s) \cdot \lambda e^{-\lambda u}\, du \\
&= \int_0^\infty u \cdot \lambda e^{-\lambda u}\, du + \int_0^\infty s \cdot \lambda e^{-\lambda u}\, du \\
&= \mathbb{E}(T) + s
\end{aligned}$$

b) **(3 puntos)** Se tienen tres ampolletas con tiempos de vida util dados por variables aleatorias $T_i \sim Exp(\lambda_i)$ con $i = 1, 2, 3$. Calcule la probabilidad de que la ampolleta 1 sea la primera en fallar. **Solución:**

c) **(3 puntos)** Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias iid, con distribución $Uniforme(0, 1)$. Sea $Z = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Calcule $\mathbb{E}[Z]$ y $Var[Z]$. **Solución:**

d) **(3 puntos)** Sea X una variable aleatoria, definida como $X = Y \cdot Z$, donde Y y Z son variables aleatorias independientes, que toman valores 1 o 1 con probabilidad 0.5. Demuestre que X es independiente de Y y Z, pero no de $Y + Z$. **Solución:**

Problema 3 (12 puntos)

La llegada de personas a la estación de metro Baquedano se modela como un proceso de Poisson con tasa λ personas por minuto. Debido a la alta densidad de personas en la estación, no todas las personas ingresan al metro si la estación se encuentra muy llena. Específicamente, si en la estación hay un número menor o igual a k personas, entonces toda persona que llega ingresa al metro. En cambio, si hay más de k personas, una persona cualquiera que llegue ingresará al metro con probabilidad p, y decidirá no ingresar con probabilidad $1 - p$. Para efectos de este problema, se asume que el metro tiene capacidad infinita y que el proceso de llegada de personas comienza a las 6:00 AM. Responda las preguntas a continuación de forma independiente.

(a) **(4 puntos)** Determine la probabilidad de que ninguna persona tome otro medio de transporte durante las primeras 2 horas desde la apertura.

Solución: Para que ninguna persona tome otro medio de transporte durante las dos primeras horas pueden ocurrir dos cosas: primero que en ese tiempo no se haya llegado a k personas en la estación; o bien si ya entraron k personas

todas las que lleguen entren. Por lo tanto la expresión pedida es:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Ninguna persona se va en las primeras 2 horas}) &= \mathbb{P}(N(120) \leq k) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \mathbb{P}(N(120) = n) \cdot p^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{k} \frac{e^{-120\lambda}(120\lambda)^n}{n!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{e^{-120\lambda}(120\lambda)^n}{n!} \cdot p^{n-k}\end{aligned}$$

(b) **(4 puntos)** Determine la probabilidad de que durante las primeras 5 horas del día, 150 personas decidan no viajar en metro.

Solución: Se trata de una binomial. La probabilidad es:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{150 personas no ingresan en 5 horas}) &= \sum_{n=k+150}^{\infty} \mathbb{P}(N(300) = n) \cdot \binom{n-k}{150} p^{n-k-150}(1-p)^{150} \\ &= \sum_{n=k+150}^{\infty} \frac{e^{-300\lambda}(300\lambda)^n}{n!} \cdot \binom{n-k}{150} p^{n-k-150}(1-p)^{150}\end{aligned}$$

(c) **(4 puntos)** Suponga que usted observa el proceso de llegadas durante 4 horas desde la apertura del metro y ve que en total hay 1200 personas. Dada esta información, determine la probabilidad de que pasen más de 3 minutos sin que ingrese una persona a la estación Baquedano.

Solución: Para responder este inciso debemos ponermnos en 2 casos: $k < 1200$ y $k \geq 1200$.

Si $k < 1200$, la probabilidad de que pasen más de 3 minutos sin que ninguna persona ingrese a la estación es:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Nadie ingresa en 3 minutos}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(3) = n) \cdot (1-p)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^n}{n!} \cdot (1-p)^n \\ &= e^{-3\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(1-p)(3\lambda)]^n}{n!} \\ &= e^{-3\lambda} \cdot e^{(1-p)(3\lambda)} \\ &= e^{-3\lambda p}\end{aligned}$$

Por otro lado, si $k \geq 1200$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Nadie ingresa en 3 minutos}) &= \mathbb{P}(N(3) = 0) \\ &= e^{-3\lambda}\end{aligned}$$

(d) **(4 puntos)** Determine la probabilidad de que en las primeras 3 horas de funcionamiento de la estación 80 personas tomen el metro si usted sabe que entre las 8:00AM y 11:00AM llegaron 50 personas.

Solución: Para esta pregunta faltó poner en el enunciado que $k > 80$, por lo tanto asignar todo el puntaje:

$$\mathbb{P}\big(N(180) - 80 \mid N(300) - N(120) = 50\big) = \frac{\mathbb{P}\big(N(180) - 80,\ N(300) - N(120) = 50\big)}{\mathbb{P}\big(N(300) - N(120) = 50\big)}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{50} \mathbb{P}\big(N(120) = 80-i,\ N(180)-N(120) = i,\ N(300)-N(180) = 50-i\big)}{\mathbb{P}\big(N(300)-N(120)=50\big)}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{50} \mathbb{P}\big(N(120) = 80-i\big)\,\mathbb{P}\big(N(180)-N(120) = i\big)\,\mathbb{P}\big(N(300)-N(180) = 50-i\big)}{\mathbb{P}\big(N(300)-N(120)=50\big)}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{50} \mathbb{P}\big(N(120) = 80-i\big)\,\mathbb{P}\big(N(60) = i\big)\,\mathbb{P}\big(N(120) = 50-i\big)}{\mathbb{P}\big(N(180)=50\big)}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{50} \frac{e^{-120\lambda}(120\lambda)^{80-i}}{(80-i)!}\,\frac{e^{-60\lambda}(60\lambda)^{i}}{i!}\,\frac{e^{-120\lambda}(120\lambda)^{50-i}}{(50-i)!}}{\frac{e^{-180\lambda}(180\lambda)^{50}}{50!}}$$

Problema 4 (12 puntos)

Un departamento de policía está implementando un sistema de patrullaje inteligente con el objetivo de reducir incidentes delictivos en una zona compuesta por seis barrios conectados entre sí. A través del análisis de incidentes pasados, se ha identificado el patrón de movimiento de un sospechoso recurrente que frecuenta estos barrios de manera continua. El objetivo del modelamiento es apoyar la toma de decisiones para aumentar la probabilidad de interceptación del sospechoso y reducir el daño causado.

Los barrios están organizados de forma que cada uno es contiguo solo con sus vecinos inmediatos. Es decir, el sospechoso puede desplazarse diariamente únicamente a un barrio vecino: del barrio i puede moverse al barrio $i-1$ o $i+1$. Además, los barrios 1 y 6 también son contiguos, formando un ciclo.

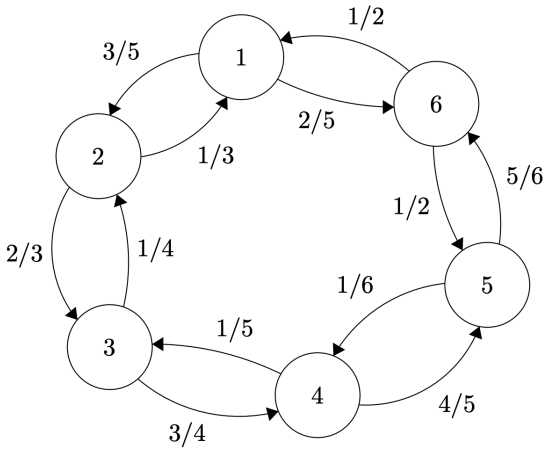
Según los registros históricos, el movimiento del sospechoso sigue las siguientes probabilidades de transición:

$$P_{i,i+1} = \frac{i}{i+1} \quad \forall i \in \{2,3,4,5\}$$
$$P_{i,i-1} = 1 - \frac{i}{i+1} \quad \forall i \in \{2,3,4,5\}$$
$$P_{1,6} = \frac{2}{5}$$
$$P_{6,1} = \frac{1}{2}$$

Se asume que el sospechoso cambia de barrio una vez por día. La policía patrulla un barrio distinto cada día, con el objetivo de interceptarlo. Una intercepción exitosa ocurre si el barrio patrullado coincide con aquel en el que se encuentra el sospechoso.

(a) **(6 puntos)** Modele la situación como una Cadena de Markov en Tiempo Discreto. Incluya el grafo de estados y la matriz de probabilidades de transición correspondiente.

Solución: Dado que hay 6 barrios posibles por los que se desplaza el sospechoso, el grafo asociado es:



La matriz de probabilidades de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) **(4 puntos)** Si el sospechoso parte en el barrio 2, explicite el sistema de ecuaciones necesario para determinar cuántos días deben pasar, en promedio, para que se encuentre en el barrio 1.

Solución:

Usamos la fórmula para el tiempo esperado de primera llegada:

$$E(T(i,j)) = 1 + \sum_{l \neq j} P_{i,l} \cdot E(T(l,j))$$

Se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} E(T(2,1)) &= 1 + \frac{2}{3}E(T(3,1)) \\ E(T(3,1)) &= 1 + \frac{1}{4}E(T(2,1)) + \frac{3}{4}E(T(4,1)) \\ E(T(4,1)) &= 1 + \frac{1}{5}E(T(3,1)) + \frac{4}{5}E(T(5,1)) \\ E(T(5,1)) &= 1 + \frac{1}{6}E(T(4,1)) + \frac{5}{6}E(T(6,1)) \\ E(T(6,1)) &= 1 + \frac{1}{2}E(T(5,1)) \end{aligned}$$

(c) **(4 puntos)** Justifique la existencia de una distribución estacionaria. En caso que exista, escriba las ecuaciones necesarias para calcularla y resuelva el sistema.

Solución: Dado que la cadena tiene una sola clase recurrente aperiódica y es finita, existe una distribución estacionaria. El sistema de ecuaciones es:

$$\pi_1 = \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_6$$
$$\pi_2 = \frac{3}{5}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3$$
$$\pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{1}{5}\pi_4$$
$$\pi_4 = \frac{3}{4}\pi_3 + \frac{1}{6}\pi_5$$
$$\pi_5 = \frac{4}{5}\pi_4 + \frac{1}{2}\pi_6$$
$$\pi_6 = \frac{2}{5}\pi_1 + \frac{5}{6}\pi_5$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1$$

(d) **(4 puntos)** Tras una investigación, se concluye que el sospechoso solo frecuenta actualmente los barrios 2, 4 y 6. Dado esto, ¿cuál es la probabilidad de que se encuentre en el barrio 2?

Solución: Queremos calcular la probabilidad de que el sospechoso esté en el barrio 2, dado que está en alguno de los barrios $\{2, 4, 6\}$. Entonces:

$$P = \frac{\pi_2}{\pi_2 + \pi_4 + \pi_6}$$

(e) **(2 puntos)** Para planificar una redada final, el jefe de operaciones desea saber en qué barrio es más probable encontrar al sospechoso en el largo plazo. ¿Cuál barrio recomendaría patrullar y por qué?

Solución: El barrio donde se recomienda patrullar es el que tenga el π_i más alto entre todos los estados. Esto implica que, en el largo plazo, el sospechoso pasa más tiempo allí, y por lo tanto, la probabilidad de interceptarlo es mayor.

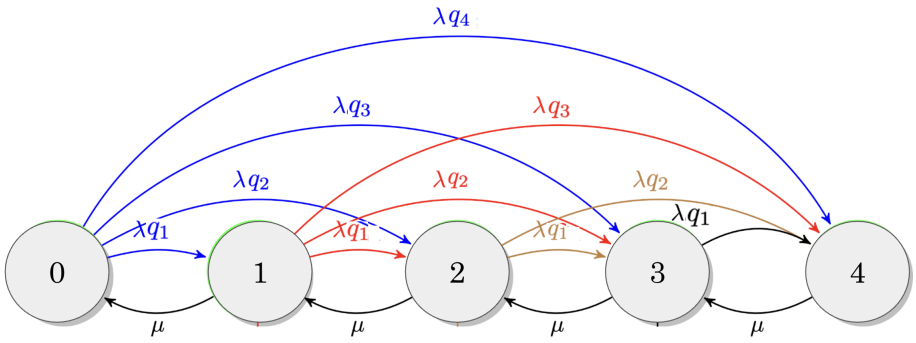
Problema 5 (12 puntos)

Pacientes llegan en grupos de 1, 2, 3 o 4 personas (por ejemplo, familiares o acompañantes) a un centro de atención médica que es atendido por un único doctor. El número de pacientes por grupo es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida (i.i.d.). Sea q_i la probabilidad de que un grupo tenga exactamente i pacientes, con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $\sum_{i=1}^{4} q_i = 1$. El sistema tiene capacidad para 4 personas. Si un grupo de pacientes no puede ser acomodado completamente dentro del sistema, ninguno de sus integrantes ingresa.

Los tiempos entre llegadas de cada grupo y el tiempo de atención siguen una distribución exponencial de parámetros λ y μ, respectivamente.

a) **(6 puntos)** Construya una Cadena de Markov en Tiempo Continuo que modele el estado de ocupación del centro de atención médica. Explicite claramente los estados y sus respectivas tasas de transición.

Solución: El sistema tiene 5 estados representando el número de pacientes actualmente en el sistema. Las transiciones entre estados ocurren cuando llega un grupo y hay espacio para acomodarlo completamente. Las tasas de llegada dependen del tamaño del grupo y del espacio disponible.



b) **(4 puntos)** Justifique la existencia de una distribución de probabilidades estacionarias y construya el sistema de ecuaciones que permita calcularlas.

Solución: Sea P_i la probabilidad de estar en el estado i. Las ecuaciones de balance se escriben como:

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot P_0 &= \mu \cdot P_1 \\
(\lambda q_1 + \mu) \cdot P_1 &= \lambda q_1 \cdot P_0 + 2\mu \cdot P_2 \\
(\lambda(q_1 + q_2) + 2\mu) \cdot P_2 &= \lambda q_2 \cdot P_0 + \lambda q_1 \cdot P_1 + 3\mu \cdot P_3 \\
(\lambda(q_1 + q_2 + q_3) + 3\mu) \cdot P_3 &= \lambda q_3 \cdot P_0 + \lambda q_2 \cdot P_1 + \lambda q_1 \cdot P_2 + 4\mu \cdot P_4 \\
4\mu \cdot P_4 &= \lambda q_4 \cdot P_0 + \lambda q_3 \cdot P_1 + \lambda q_2 \cdot P_2 + \lambda q_1 \cdot P_3 \\
P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 &= 1
\end{aligned}$$

c) **(6 puntos)** Calcule el número promedio de pacientes en el sistema y el tiempo promedio de espera por paciente.

Solución: El número promedio de pacientes en el sistema es:

$$\mathbb{E}(N) = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4$$

La tasa efectiva de llegada de pacientes es:

$$\lambda_e = \lambda \cdot [P_0(q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 4q_4) + P_1(q_1 + 2q_2 + 3q_3) + P_2(q_1 + 2q_2) + P_3(q_1)]$$

Aplicando la ley de Little:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \frac{\mathbb{E}(N)}{\lambda_e} \\
\mathbb{E}(W) &= \mathbb{E}(T) - \mu
\end{aligned}$$

d) **(4 puntos)** Determine la probabilidad de que un paciente cualquiera no pueda ingresar al sistema

Solución: La probabilidad de que un paciente cualquiera no pueda ingresar es la probabilidad de que su grupo sea rechazado, ponderada por el tamaño del grupo. La expresión es:

$$\mathbb{P}(\text{Paciente bloqueado}) = P_1 \cdot q_4 + P_2 \cdot (q_3 + q_4) + P_3 \cdot (q_2 + q_3 + q_4) + P_4 \cdot (q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$$

Problema 6 (12 puntos)

En este ejercicio usted comparará la eficiencia del algoritmo de Aceptación o Rechazo para dos distribuciones distintas. Suponga una variable aleatoria N que sigue una distribución normal de media $\mu = 4$ y varianza $\sigma^2 = 5$. Por otro lado, la variable aleatoria X tiene una función de densidad de probabilidad $f(x) = 30x(1-x)^4$ con $x \in [0, 1]$.

a) (1 punto) Si la densidad de probabilidad de una variable aleatoria normal estándar Z es $z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$, explique por qué el método de Aceptación o Rechazo utiliza la siguiente función de densidad $z'(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Solución: Esto sucede ya que el algoritmo en vez de genera una instancia $Z \sim$Uniforme (0,1), genera una instancia para la cola positiva de dicha distribución, es decir, para $|Z|$. Así, la densidad de $|Z|$ concentra el doble de la densidad de Z en cada posible valor, es por ello que la densidad se multiplica por 2.

b) (2 puntos) Demuestre por qué la cota $t(x) = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} e^{-x}$ vista en clases es válida para generar instancias de la variable N.

Solución: Para que la cota sea válida, debe ser mayor o igual que $z'(x)$ para todo $x >= 0$. Al igualar ambas funciones obtenemos que

$$e^{\frac{1}{2}-x} = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Con ello, basta con resolver la ecuación

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Cuya única solución es $x = 1$. Luego, basta con evaluar un valor menor a 1 y un valor mayor a 1 para verificar que $z'(\frac{1}{2}) = 0.704$, y $t(\frac{1}{2}) = 0.798$, con lo que $t(x) \geq z'(x)$ para todo $x < 1$.Luego, $z'(2) = 0.108$, y $t(2) = 0.178$, con lo que también $t(x) \geq z'(x)$ para todo $x > 1$. Así, dado que tango $t(x)$ como $z'(x)$ son funciones continuas en el intervalo abierto $(0, \infty)$, por el Teorema del Valor Intermedio, $z'(x) \leq t(x), \quad \forall x \geq 0$.

c) (4 puntos) Desarrolle un algoritmo de Aceptación o rechazo para obtener todas las instancias posibles de N a partir de la siguiente lista de instancias Uniforme(0,1): [0.941, 0.207, 0.874, 0.039, 0.171, 0.357, 0.367, 0.163, 0.566, 0.706]. *Utilize esta lista a medida que la vaya necesitando de izquierda a derecha.*

Solución: Se definen las siguientes funciones según se vio en clases.

$$h(x) = \frac{t(x)}{c} = \frac{\sqrt{\frac{2e}{\pi}} e^{-x}}{\sqrt{\frac{2e}{\pi}}} = e^{-x}$$

$$g(x) = \frac{z'(x)}{t(x)} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{\frac{2e}{\pi}} e^{-x}} = e^{\frac{-(x-1)^2}{2}}$$

Utilizaremos la misma estructura para el algoritmo vista en clases.

- Genera U
- Genera Y con una distribución exponencial de tasa 1; es decir, genera U' y establece $Y = ln(1 - U')$.
- Si $U \leq e^{\frac{-(Y-1)^2}{2}}$, sea $Z = Y$, en otro caso volver a 1.
- Genera U''. Sea $Z = |Z|$ si $U'' \leq 0.5$, o sea $Z = -|Z|$ si $U'' > 0.5$.

Con ello, la primera iteración será

- $U = 0.941$
- $Y = ln(1 - 0.207) = 0.232$
- $g(Y) = 0.745$
- Como $0.941 > 0.745$, se rechaza Y

Segunda iteración

- $U = 0.874$
- $Y = ln(1 - 0.039) = 0.040$
- $g(Y) = 0.631$
- Como $0.874 > 0.631$, se rechaza Y

Tercera iteración

- $U = 0.171$
- $Y = ln(1 - 0.357) = 0.442$
- $g(Y) = 0.856$
- Como $0.171 \leq 0.856$, se acepta $|Z| = Y$
- Sea $U'' = 0.367$. Como $U'' < 0.5$, $Z = |Z| = 0.442$
- Se obtiene la instancia de $N = \sigma \cdot Z + \mu = \sqrt{5} \cdot 0.442 + 4 = 4.987$

Cuarta iteración

- $U = 0.163$
- $Y = ln(1 - 0.566) = 0.835$
- $g(Y) = 0.986$
- Como $0.163 \leq 0.986$, se acepta $|Z| = Y$
- Sea $U'' = 0.706$. Como $U'' > 0.5$, $Z = -|Z| = -0.835$
- Se obtiene la instancia de $N = \sigma \cdot Z + \mu = \sqrt{5} \cdot (-0.835) + 4 = 2.134$

Notamos que ya solo nos queda una instancia uniforme, por lo que no podemos completar una quinta iteración.

d) (4 puntos) Desarrolle un algoritmo de Aceptación o rechazo para obtener todas las instancias posibles de Y a partir de la siguiente lista de instancias Uniforme(0,1): [0.718, 0.375, 0.408, 0.201, 0.303, 0.400, 0.517, 0.550, 0.581, 0.845]. *Utilize esta lista a medida que la vaya necesitando de izquierda a derecha.*

Solución: Se definen las siguientes funciones.

$$t(x) = f(0.2) = 2.4576 \quad , 0 \leq x \leq 1$$

$$h(x) = \frac{t(x)}{c} = 1 \longrightarrow \text{Uniforme(0,1)}$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{t(x)} = \frac{30x(1-x)^4}{2.4576}$$

Utilizaremos la misma estructura del inciso *c)*.

- Generar U
- Generar instancia candidata $\bar{Y}$ con una distribución uniforme (0,1); es decir, se puede obtener directo de la lista.
- Si $U \leq g(\bar{Y})$, se acepta $X = \bar{Y}$

Iteración	**U**	$\bar{Y}$	$g(\bar{Y})$	**¿Acepta?**
1	0.718	0.375	0.698	No
2	0.408	0.201	1.000	Sí
3	0.303	0.4	0.633	Sí
4	0.517	0.55	0.275	No
5	0.581	0.845	0.006	No

e) (1 punto) Discuta sobre los resultados obtenidos. ¿El algoritmo es más eficiente para generar instancias de X o de Y?

Solución: Más allá de la cantidad de instancias generadas en cada caso, lo cual a su vez depende de cómo utilizaron las instancias uniformes, no podemos afirmar nada respecto a la eficiencia del algoritmo en uno u otro caso, puesto que esto es una sola "ejecución" de cada caso, por lo que los resultados ocurridos podrían haberse dado "de pura suerte".

También se considera válido que se calcule el valor de $\frac{1}{c}$ como un *proxy* de la eficiencia del algoritmo. En este caso, para la v.a. N, $c = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} \approx 1.731$ y para X, $c = f(\frac{1}{5}) = 2.4576$, de modo que, bajo este punto de vista, en cada iteración es más probable aceptar una instancia de N.