Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 Modelos Estocásticos
Profesor Maximiliano González R.
Primer Semestre 2023

Examen

Tiempo total: 2 horas y 30 minutos

Problema 1 (26 puntos)

Suponga que le han encomendado organizar un ciclo de charlas tipo TED a realizarse diariamente en el patio de la universidad el próximo semestre. Las charlas durarán exactamente T minutos y no existe un número máximo de participantes como público. Sin embargo, debido a la fama de estas charlas, se espera que mucha gente asista a escucharlas, por lo que se solicitará a cada persona que permanezca en la charla un tiempo exactamente igual a β minutos (con $\beta < T$), así dar la posibilidad a que muchos escuchen las importantes narraciones.

Usted que aprendió mucho sobre procesos estocásticos durante el primer semestre, decide asumir que la llegada de oyentes puede ser modelada como un proceso de Poisson a tasa λ personas por minuto.

a) **(3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día cualquiera exactamente k personas escuchen el final de la charla?

b) **(3 puntos)** Como herramienta de publicidad, usted decide confeccionar N poleras que regalará el primer día justo en la mitad de la charla, ¿cuál es la probabilidad de que alguna persona presente en la charla en ese momento se quede sin polera? Asuma que el tiempo en entregarlas es despreciable para efectos de cualquier cálculo.

c) **(3 puntos)** ¿Cuántas personas en promedio no podrán presenciar los β minutos que les correspondía?

Además, debido a la gran euforia por las charlas, usted ve una oportunidad de negocio y decide ofrecer a cada participante una membresía al término de cada sesión. Considere que existe una probabilidad p de que una persona cualquiera se inscriba en la membresía.

d) **(2 puntos)** Si se encuentran K personas presenciando el final de la charla ($K \ mod \ 2 = 0$), ¿cuál es la probabilidad que más de la mitad de ellas se inscriba en la membresía?

Considere ahora que los *speakers* han decidido realizar charlas de duración variable. Esto significa que la duración de cada charla es una v.a. que distribuye exponencial de media $1/\mu$ minutos. También se ha decidido permitir que las personas que llegan se queden durante toda la charla, lo cual todos deciden hacer debido a la gran calidad de estas.

e) **(3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que una charla cualquiera sea escuchada completa o parcialmente por más de K personas? Asuma que la llegada de público comienza en el mismo instante de inicio de la charla.

Los siguientes incisos son independientes de los incisos a) - e).

f) **(3 puntos)** Suponga dos procesos de conteo independientes entre sí con tiempos entre eventos iid que distribuyen exponencial. El primer proceso tiene tasa α y el segundo tasa β. Suponga que ambos procesos comienzan con 0 eventos y que en las primeras t unidades de tiempo ocurrió un evento en cada proceso. ¿Cuál es la probabilidad de que en las próximas $t/2$ unidades no ocurra ningún evento?

Suponga la llegada de clientes a un recinto que se rige por un proceso de Poisson no homogeneo con las siguientes características. Entre $t = 0$ y $t = 3$ la tasa de llegada crece de manera lineal de tal modo que $\lambda(0) = 10$ clientes/hora y $\lambda(3) = 40$ clientes/hora. Luego entre $t = 3$ y $t = 7$ se mantiene constante en 40 clientes/hora y luego decae cada una hora y en cantidades constantes de modo tal que a la hora de cierre ($t = 11$), la tasa es de 24 clientes/hora.

g) **(3 puntos)** Calcule la probabilidad de que no arriben clientes entre $t = 0.5$ y $t = 1.5$.

h) **(3 puntos)** Calcule el número esperado de clientes durante toda la jornada.

i) **(3 puntos)** Calcule la probabilidad de que lleguen n clientes a lo largo de la jornada.

Problema 2 (14 puntos)

El fuerte sistema frontal ocurrido hace un par de semanas nos dejó ver cómo el comportamiento común de la naturaleza se está viendo fuertemente alterado producto del efecto del cambio climático. Esto ha producido que en ciertos años Chile experimente grandes sequías y en otros, inviernos altamente lluviosos.

Los expertos han clasificado la situación climatológica de un año cualquiera en tres tipos: **sequía**, **normal** y **lluvioso**. Además ha determinado que la evolución de un subconjunto de comunas del país **entre los últimos dos años es representativa del comportamiento a nivel país**. La tabla a continuación muestra la evolución durante los últimos dos años de dicho subconjunto, compuesto por 52 comunas.

	Status 2022			Total
Status 2021	Sequía	Normal	Lluvioso	Comunas
Sequía	25	5	0	30
Normal	13	6	1	20
Lluvioso	0	1	1	2
Total Comunas	38	12	2	52

Sea X_n el status en que se encuentra una comuna cualquiera en el n-ésimo año.

a) **(4 puntos)** Modele X_n como una Cadena de Markov en Tiempo Discreto. Defina el conjunto de estados y calcule la matriz de probabilidades de transición.

b) **(2 puntos)** Clasifique los estados y argumente sobre el comportamiento límite de la cadena.

c) **(4 puntos)** Calcule la distribución de probabilidad que se espera para el año 2024 y para el año 2100. ¿Qué interpretación le da a estos resultados?

d) **(2 puntos)** En promedio, ¿cuántos años se demora una comuna en volver a cada estado en el largo plazo?

e) **(2 puntos)** En base a los resultados observados, ¿qué puede concluir acerca de la situación climatológica que enfrentarán las próximas generaciones?

Problema 3 (20 puntos)

Considere un aeropuerto donde opera una sola aerolínea llamada FLY a la cual llegan pasajeros según un proceso de Poisson de tasa λ pasajeros por minuto. Estos son clasificados en dos tipos: pasajeros normales y pasajeros FLY Travel, donde estos últimos representan una fracción p del total en un vuelo promedio. La aerolínea cuenta con 3 servidores de atención a público normal que funcionan en paralelo y cada uno de ellos tarda un tiempo que distribuye exponencial con media $1/\beta$ minutos en otorgarles su tarjeta de embarque. Los pasajeros FLY Travel son atendidos en dos servidores exclusivos que también funcionan en paralelo y tardan un tiempo exponencial de media $1/\mu$ minutos.

Una vez obtenida su tarjeta de embarque, cada pasajero es sometido a un control policial aleatorio con probabilidad q, el cual es independiente del tipo de pasajero y del tiempo de atención en el servidor. Este control es realizado por un único policía especialista en pasajeros peligrosos, el cual toma un tiempo que distribuye exponencial de media $1/\gamma$ minutos.

Luego de esto, independiente si pasó o no por el control policial, el pasajero deberá esperar un tiempo fijo de t minutos para subir al próximo avión.

Cada una de las estaciones (servidores pasajeros normales, servidores FLY Travel y control policial aleatorio) funcionan con una fila única con capacidad ilimitada.

a) **(5 puntos)** Caracterice los distintos sistemas de espera que componen el proceso de atención de FLY, utilizando la notación $X_1/X_2/X_3/X_4$. Represente el sistema completo mediante un diagrama indicando claramente las tasas de entrada y salida en cada subsistema.

b) **(4 puntos)** Indique de la manera más simplificada posible las relaciones que deben cumplirse entre los parámetros de llegada y atención para que en estado estacionario el sistema completo converja.

c) Asumiendo conocidas las probabilidades de largo plazo, entregue una expresión para:

   i) **(2 puntos)** Número medio de clientes esperando en la cola para obtener su tarjeta de embarque, independiente del tipo de cliente.

   ii) **(3 puntos)** Tiempo medio que permanece un cliente desde que llega hasta que puede embarcar el avión.

Los siguientes incisos son independientes de los incisos a), b) y c).

d) **(3 puntos)** En el contexto del algoritmo de A-R, indique qué representa c y explique por qué es importante en términos de rendimiento.

e) **(3 puntos)** ¿Es necesario siempre utilizar funciones $t(x)$ constantes en el método de A-R? ¿Por qué en ciertos casos es conveniente usar funciones de ese tipo? ¿Existen casos en los que no es posible utilizar funciones $t(x)$ constantes? Si es que su respuesta es afirmativa, de un ejemplo concreto y justifique.

Algunas fórmulas

◇ Series:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}, \text{ si } |a| < 1.$$

◇ Ecuación de Little:

$$L = \lambda_e \cdot W$$

◇ Sistemas elementales de espera en estado estacionario:

$M/M/1$:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad P_0 = 1 - \rho \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

◇ Relación entre P_n y P_0 para cualquier sistema de espera markoviano

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdot \lambda_{n-2} \ldots \lambda_0}{\mu_n \cdot \mu_{n-1} \ldots \mu_1} P_0$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesor Maximiliano González
Primer Semestre 2023

Pauta Examen

Solución Problema 1

(a) $\{X(t), t \geq 0\}$ proceso Poisson(λ) $\rightarrow$ llegada de oyentes

Las personas que escuchan el final de la charla van a ser solo las que llegaron en el intervalo de tiempo entre β minutos antes del final y el final. Por lo tanto, nos piden:

$$\mathbb{P}(X(T) - X(T-\beta) = k)$$

Por incrementos estacionarios tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(X(\beta) = k) \\ &= \frac{(\lambda\beta)^k \cdot e^{-\lambda\beta}}{k!} \end{aligned}$$

(1 punto) Por plantear probabilidad
(1 punto) Por utilizar incrementos estacionarios
(1 punto) Por resultado correcto

(b) Las personas disponibles para recibir poleras van a ser las que lleguen en el intervalo de tiempo entre β minutos antes de la mitad de la charla y la mitad de la charla. Por este motivo, para que alguna persona se quede sin una polera, deben haber más de N personas en ese instante. Nos piden:

$$\mathbb{P}(X(\frac{T}{2}) - X(\frac{T}{2} - \beta) > N)$$

Por incrementos estacionarios tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(X(\beta) > N) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{N} \frac{(\lambda\beta)^i \cdot e^{-\lambda\beta}}{i!} \end{aligned}$$

(1 punto) Por plantear probabilidad
(1 punto) Por utilizar incrementos estacionarios
(1 punto) Por resultado correcto

(c) Las únicas personas que no van a poder presenciar los β minutos de charla que les corresponde, son las que lleguen en el intervalo de tiempo entre β minutos antes del final y el final de la charla. Nos piden:

$$\mathbb{E}(X(T) - X(T-\beta))$$

Por incrementos estacionarios tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}(X(\beta)) \\ &= \beta\lambda \end{aligned}$$

(1 punto) Por plantear esperanza
(1 punto) Por utilizar incrementos estacionarios
(1 punto) Por resultado correcto

(d) Notamos que el proceso Poisson no influye (sabemos que K personas van a estar presenciando el final de la charla), por lo que podemos definir una variable aleatoria binomial para el número de inscripciones. Nos piden lo siguiente:

$$\sum_{i=\frac{K}{2}+1}^{K} \binom{K}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{K-i}$$

(1 punto) Por utilizar distribución binomial
(1 punto) Por resultado correcto

(e) Duración charlas $D \sim$ Exponencial(μ)
Las personas que escucharán la charla completa o parcialmente son todas las que lleguen en el intervalo de tiempo que dure la charla. Nos piden:

$$\mathbb{P}(X(D) > K)$$

Ocupando ley de probabilidades totales:

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X(D) > K | D = t) \cdot f_D(t) dt \\ &= 1 - \int_0^\infty \mathbb{P}(X(t) \leq K) \cdot f_D(t) dt \\ &= 1 - \int_0^\infty \sum_{i=0}^{K} \frac{(\lambda t)^i \cdot e^{-\lambda t}}{i!} \cdot \mu e^{-\mu t} dt \end{aligned}$$

(1 punto) Por plantear probabilidad
(1 punto) Por utilizar probabilidades totales
(1 punto) Por resultado correcto

(f) $\{N_1(t), t \geq 0\}$ proceso Poisson(α)
$\{N_2(t), t \geq 0\}$ proceso Poisson(β)

Los dos procesos son independientes, por lo que la suma de ambos es un proceso de Poisson de tasa $\alpha + \beta$. Definimos:

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

Además, por falta de memoria de la distribución exponencial, no influye lo que haya ocurrido en las primeras t unidades de tiempo. Nos piden:

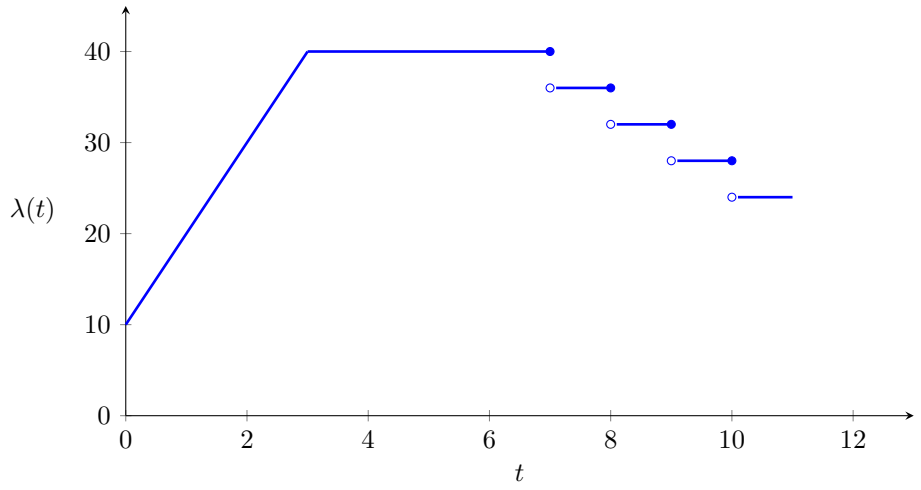
$$\mathbb{P}(N(\frac{3t}{2}) - N(t) = 0)$$

Por incrementos estacionarios:

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(N(\frac{t}{2}) = 0) \\ &= \frac{((\alpha+\beta)\frac{t}{2})^0 \cdot e^{-(\alpha+\beta)\frac{t}{2}}}{0!} \\ &= e^{-(\alpha+\beta)\frac{t}{2}} \end{aligned}$$

(1 punto) Por identificar suma de procesos Poisson
(1 punto) Por utilizar propiedad de falta de memoria e incrementos estacionarios
(1 punto) Por resultado correcto

(g) $\{N(t), t \geq 0\}$ proceso Poisson no homogéneo con tasa $\lambda(t)$



Nos piden:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N(1.5)-N(0.5)=0)\\&=\frac{[m(1.5)-m(0.5)]^0\cdot e^{-[m(1.5)-m(0.5)]}}{0!}\end{aligned}$$

Con $m(t)=\int_0^t \lambda(t)dt$

$$\begin{aligned}m(1.5)-m(0.5)&=\int_{0.5}^{1.5}\lambda(t)dt\\&=\int_{0.5}^{1.5}10t+10dt\\&=5t^2+10t\Big|_{0.5}^{1.5}\\&=26.25-6.25\\&=20\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{20^0\cdot e^{-20}}{0!}=e^{-20}\approx 2.061\times 10^{-9}$$

(1 punto) Por plantear probabilidad
(1 punto) Por integrar área
(1 punto) Por resultado correcto

(h) Nos piden:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(N(11)-N(0))\\&=m(11)-m(0)\end{aligned}$$

Con $m(t)=\int_0^t \lambda(t)dt$

$$\begin{aligned}m(11)-m(0)&=\int_0^{11}\lambda(t)dt\\&=\int_0^3 10t+10dt+\int_3^7 40dt+\int_7^8 36dt+\int_8^9 32dt+\int_9^{10}28dt+\int_{10}^{11}24dt\\&=5t^2+10t\Big|_0^3+40t\Big|_3^7+36t\Big|_7^8+32t\Big|_8^9+28t\Big|_9^{10}+24t\Big|_{10}^{11}\\&=75+160+36+32+28+24\\&=355\end{aligned}$$

Por lo tanto, el número de llegadas entre $t=0$ y $t=11$ sigue una distribución Poisson de media 355.

(1 punto) Por plantear esperanza
(1 punto) Por plantear integrales
(1 punto) Por resultado correcto

(i) Nos piden:

$$\mathbb{P}(N(11) - N(0) = n)$$
$$= \frac{[m(11) - m(0)]^n \cdot e^{-[m(11)-m(0)]}}{n!}$$

Del inciso anterior sabemos que $m(11) - m(0) = 355$, por lo tanto:

$$= \frac{[355]^n \cdot e^{-[355]}}{n!}$$

(1 punto) Por plantear probabilidad
(2 puntos) Por resultado correcto

Solución Problema 2

(a) Conjunto de estados: $\Omega = \{S, N, L\}$
En base a la evolución durante los años 2021 y 2022, podemos calcular la matriz de probabilidades de transición.

$$\begin{array}{c} \\ S \\ N \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & N & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 \\ 13/20 & 6/20 & 1/20 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(2 puntos) Por definir conjunto de estados
(2 puntos) Por calcular matriz

(b) Tenemos una única clase de estados la cual es recurrente positiva y aperiódica. Por la proposición vista en clases, como se tiene una CMTD irreducible y aperiódica, el proceso tiene distribución límite y distribución estacionaria (las cuales coinciden).

(1 punto) Por clasificar correctamente la clase
(1 punto) Por concluir que tiene distribución límite y estacionaria

(c) Sabemos que:

$$f^{(n)\top} = f^{(0)\top} P^n$$

Considerando el año 2022 como la etapa 0, en primer lugar nos piden lo siguiente:

$$f^{(2)\top} = f^{(0)\top} P^2$$

Elevando a 2 la matriz y utilizando los datos del año 2022, se tiene que:

$$\begin{aligned} f^{(2)\top} &= \begin{pmatrix} 38/52 & 12/52 & 2/52 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 289/360 & 17/90 & 1/120 \\ 221/300 & 67/300 & 1/25 \\ 13/40 & 2/5 & 1/40 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8999/11700 & 1199/5850 & 101/3900 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 0.769 & 0.205 & 0.026 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, para la distribución en el año 2100, como sabemos que la cadena tiene distribución estacionaria, podemos realizar una aproximación mediante esta. Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \pi_S &= \frac{5\pi_S}{6} + \frac{13\pi_N}{20} \\ \pi_N &= \frac{\pi_S}{6} + \frac{6\pi_N}{20} + \frac{\pi_L}{2} \\ \pi_L &= \frac{\pi_N}{20} + \frac{\pi_L}{2} \\ \pi_S + \pi_N + \pi_L &= 1 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema tenemos que:

$$f^{(78)\top} \approx \pi = \begin{pmatrix} 0.780 & 0.200 & 0.020 \end{pmatrix}$$

Los resultados anteriores los podemos interpretar como que con el paso de los años, la probabilidad de que una comuna se encuentre en el estado de sequía va a ir aumentando, mientras que la probabilidad de que se encuentre en el estado normal y lluvioso va a ir disminuyendo.

(1 punto) Por distribución del año 2024
(1 punto) Por plantear sistema para el año 2100
(1 punto) Por resolver sistema
(1 punto) Por conclusión válida

(d) Por el inciso b) sabemos que la distribución límite y estacionaria coinciden para esta cadena. De esta forma, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mathbb{E}(T(j,j))} = \pi_j$$

Nos piden:

$$\mathbb{E}(T(j,j)) = \frac{1}{\pi_j}$$

Como conocemos π, se tiene que:

$$\mathbb{E}(T(S,S)) = \frac{1}{0.78} \approx 1.28$$
$$\mathbb{E}(T(N,N)) = \frac{1}{0.20} = 5$$
$$\mathbb{E}(T(L,L)) = \frac{1}{0.02} = 50$$

(1 punto) Por ecuación correcta
(1 punto) Por resultados correctos

(e) Se puede concluir que en el largo plazo nunca se superaría la sequía, pues la probabilidad de que una comuna se encuentre en dicho estado es de un 78%. Como la distribución límite y estacionaria coinciden, esto es igual a la proporción del tiempo en el largo plazo que la comuna se encontrará en sequía. También, podemos notar que si bien puede que un año una comuna en sequía pase a ser una lluviosa, luego de eso, en promedio deberán pasar 50 años para que esta vuelva a ser una comuna lluviosa.

(2 puntos) Por conclusión válida

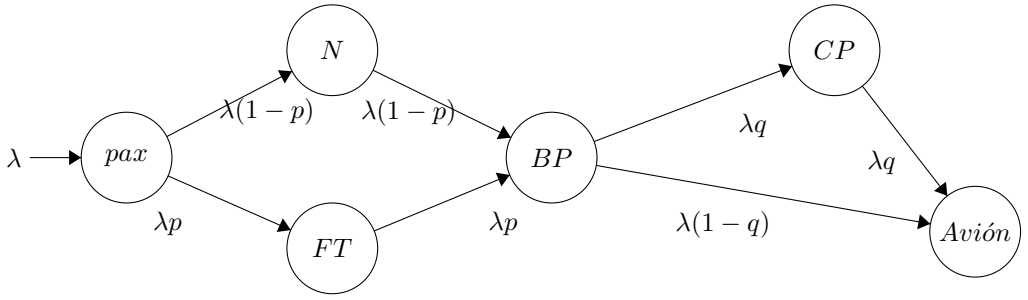
Solución Problema 3

(a) Dentro del problema podemos identificar 3 subproblemas:
1. Atención pasajeros normales: M/M/c , c = 3
2. Atención pasajeros FLY TRAVEL : M/M/c , c = 2
3. Control policial: M/M/1

Sea $X_i \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$ la cantidad de personas en el sistema

Tipo de Atención	Estado	Tasa llegada	Tasa atención
Tarjeta embarque normales	0	$(1-p)\lambda$	
	1,2	$(1-p)\lambda$	iβ, i = 1,2
	i $\geq$ 3	$(1-p)\lambda$	3β
Tarjeta Embarque FT	0	$p\lambda$	
	1	$p\lambda$	μ
	i $\geq$ 2	$p\lambda$	2μ
Control Policial	0	$q\lambda$	
	i $\geq$ 1	$q\lambda$	γ

Luego a cada pasajero entre o no al control policial, le debe agregar el tiempo t de espera del avión. Así, asumiendo que el sistema se encuentra en estado estable en el largo plazo, el diagrama que lo representa es el siguiente.



Nota: BP representa la obtención del Boarding Pass. Este nodo no representa una cola como tal, pero se agrega para denotar que la obtención de dichos documentos es también a tasa λ.

(0.5 puntos) Por cada caracterización correcta de un subproblema
(0.5 puntos) Por las tasas de nacimiento y muerte correctas
(0.5 puntos) Por hacer el diagrama correctamente

(b) Para que el sistema completo converja se tienen que cumplir 3 relaciones importantes
1. $\frac{(1-p)\lambda}{3\beta} < 1$
2. $\frac{p\lambda}{2\mu} < 1$
3: $\frac{q\lambda}{\gamma} < 1$

(1 punto) Por cada ecuación correcta
(1 punto) Por mencionar que son 3 ecuaciones importantes

(c) i) Nos piden L_q

$$L_q = L_q^N + L_q^{FT}$$

$$L_q = \sum_{i=3}^{\infty}(i-3)P_i^N + \sum_{i=2}^{\infty}(i-2)P_i^{FT}$$

Donde los P_i se obtienen luego de resolver las ecuaciones de equilibrio

(1 punto) Por plantear bien la ecuación
(1 punto) Por plantear bien L_q^N y L_q^{FT}

ii) Para encontrar el tiempo medio de permanencia debemos considerar el tiempo en la cola (W_q) de cada suproblema. Lo separaremos para personas normales, personas FLY TRAVEL y Control Policial

$$W_{q,normales} = \frac{1}{(1-p)\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}(i)P_i^N$$

$$W_{q,FT} = \frac{1}{(p)\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}(i)P_i^{FT}$$

$$W_{q,CP} = \frac{1}{q\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}(i)P_i^{CP} = \frac{1}{(\gamma - q\lambda)}$$

De modo que el tiempo medio que permanece un cliente en el sistema es de:

$$\text{W} = \text{p}W_{q,normales} + \text{(1-p)}W_{q,FT} + \text{q}W_{q,CP} + t = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}(i)P_i^N + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}(i)P_i^{FT} + \frac{q}{(\gamma - q\lambda)} + t$$

(0.5 punto)Por usar bien ecuación de Little
(0.5 punto) Por $W_{q,normales}$, $W_{q,FT}$. W (cada uno 0.5)
(1 punto) Por $W_{q,CP}$ (Si no se coloca $\frac{1}{(\gamma - q\lambda)}$ dar 0.5)

(d) El parámetro c representa el area bajo la curva de $t(x)$ y su tamaño está directamente ralacionado con la cercanía de la función $t(x)$ a $f(x)$. El valor que tome este parámetro es importante en términos del rendimiento del algoritmo, pues como se vió en clases, la probabilidad de aceptar una instancia en una iteración cualquiera es $1/c$. Así, si c es demasiado grande habrá en promedio un mayor número de rechazos lo que disminuirá la eficiencia del método A-R (también viceversa).

(1 punto) Por explicar qué es el parámetro c
(2 puntos) Por explicar por qué es relevante en el rednimiento

(e) No es necesario, de hecho no siempre es posible. El uso de funciones $t(x)$ constantes puede ser beneficioso a la hora de obtener instancias de $Y \sim h(y)$ pues es más sencillo. Sin embargo, en algunos casos la función constante no puede ser utilizada, ya que no cumple con ser una cota a lo largo de todo el dominio. Un primer ejemplo es cuando la $f(x)$ no posee máximo, por ejemplo una función exponencial $\lambda e^{-\lambda x}$, o cuando el dominio de la función es infinito (como la distribución normal), en cuyo caso la integral de una función constante sería infinito.

Por ejemplo cuando queremos generar muestras de uan distribución normal estándar. la función $f(x)$ es $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{(-x^2/2)}$ para $-\infty < x < \infty$. Como distribución auxiliar podemos considerar $t(x) = 1/2 \cdot (e^{-x} + e^{x})$. Podemos ver que esta no es constante pero se ajusta a la distribución objetivo. Al combinar ambas funciones exponenciales obtenemos una aproximación mas precisa de la distribución normal

(1 punto) Por mencionar que no es necesario utilizar t(x) constante
(1 punto) Por explicar por qué ocurre
(1 punto) Por dar un ejemplo adecuado