Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 Modelos Estocásticos
Profesor Maximiliano González R.
Primer Semestre 2024

Interrogación 2

Tiempo total: 2 horas

Problema 1 (24 puntos)

Nuevamente, este año el sistema de salud en Chile se ve desafiado por una fuerte ola de infecciones respiratorias. Esto afecta particularmente a centros médicos de pequeñas localidades, los cuales cuentan con recursos bastante limitados. Suponga un pequeño centro de salud, en el cual dos médicos se dedican a atender consultas regulares y emergencias respiratorias. El primer médico atiende consultas a una tasa de μ_1 consultas por día, mientras que el segundo atiende a una tasa de μ_2 consultas por día. Suponga que los pacientes llegan al centro de salud según un proceso de Poisson de media λ_p pacientes por día. Cada médico puede atender a un solo paciente a la vez, por lo que si ambos están ocupados en una atención regular y un nuevo cliente aparece, la recepcionista los hará esperar en una fila cuya capacidad máxima es de 2 pacientes. En cualquier otro caso, dicho paciente será enviado a otro centro de salud.

Por otra parte, si llega un paciente con una emergencia respiratoria, lo cual ocurre a una tasa de λ_e emergencias por día, ambos médicos le darán prioridad en simultáneo. Esto significa que dejarán en espera cualquier atención regular que estuvieran realizando hasta finalizar con la emergencia. En promedio, el tiempo que les toma resolver una emergencia es de $1/\mu_e$ días. Si durante la resolución de una emergencia llega otra similar, los médicos se sentirán abrumados por no poder atenderla y pedirán al recepcionista que cancele todos los registros de atenciones actuales, de modo que cualquier consulta regular que estuviera en espera será enviada a otro centro de salud.

a) **(8 pts.)** Construya una Cadena de Markov en Tiempo Continuo que modele el estado de ocupación del centro médico. Indique claramente qué representa cada estado y las tasas de transición instantánea entre ellos.

b) **(4 pts.)** Construya el sistema de ecuaciones que permite calcular las probabilidades de largo plazo.

Asumiendo conocidas las probabilidades límite:

c) **(4pts.)** Indique la tasa de entrada efectiva al centro de salud.

d) **(4pts.)** Indique la cantidad promedio de casos que se encuentran resolviendo en un instante cualquiera de tiempo.

e) **(4pts.)** Entregue una expresión para el tiempo medio de espera de pacientes en la cola.

Problema 2 (10 puntos)

En un jardín infantil un niño quiere construir una torre de bloques. El niño cuenta con un total de 10 bloques idénticos y para hacer la torre coloca cada bloque encima del otro. Como el niño es pequeño tiene una cierta probabilidad de que al poner un bloque la torre se caiga. La probabilidad de que se caiga la torre depende del número de bloques que lleva puestos, es decir, si el niño va a poner el i-ésimo bloque la probabilidad de que la torre se caiga es $p(i) = (i-1) \cdot 0.05$. Considere que si la torre se cae esto equivale a tener 1 bloque en la torre. El niño continuara con su juego hasta que la torre contenga todos los bloques. Considere que X_n es el número de bloques colocados exitosamente después de n movimientos. Además considere que en caso que la torre se caiga, el resultado es equivalente a que quede un solo bloque en su torre.

a) **(5 pts.)** Utilizando X_n como variable de estados, modele el problema como una CMTD definiendo el espacio de estados posibles y las probabilidades de transición entre estados.

b) **(3 pts.)** Una parvularia ha visto jugar al niño varias veces y este siempre se toma un descanso después de haber botado la torre. ¿Cuál es la probabilidad de que después de 5 turnos el niño se haya tomado solo un descanso?

c) **(2 pts.)** La mamá del niño llega al jardín infantil después de un largo tiempo. En ese tiempo el niño ha hecho un número muy grande de movimientos ($n \to \infty$). ¿Cuál es la probabilidad de que el niño no haya terminado la torre? Justifique su respuesta.

Problema 3 (26 puntos)

Considere una Cadena de Markov en Tiempo Discreto con estados 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 dada por la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & u & 0 & 0.7 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & w & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) **(2 pts.)** Suponga que $f^{(0)} = (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$. ¿Cuántas etapas tardará el sistema en promedio para visitar el estado 1 por primera vez?

b) **(2 pts.)** Suponga que $f^{(0)} = (0\ 0\ 0\ 0.7\ 0\ 0\ 0.3)$. ¿Qué es más probable, visitar el estado 5 o visitar el estado 1?

c) **(2 pts.)** Suponga que $f^{(0)} = (0\ 0\ 0\ 0.7\ 0\ 0\ 0.3)$. Calcule $\mathbb{P}(X_3 = 2, X_4 = 5)$

d) **(5 pts.)** Suponga que $f^{(0)} = (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$. Calcule $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}$

Las siguientes preguntas son independientes de los apartados anteriores.

e) **(3 pts.)** A una CMTD con N estados donde se cumple que $\sum_i \sum_j P_{ij} = N$, se le conoce como cadena doblemente estocástica. Utilizando un ejemplo de al menos tres estados que contenga al menos un loop, verifique que la distribución estacionaria corresponde a una distribución uniforme (i.e. $\pi_i = 1/N \quad \forall i$)

f) **(3 pts.)** ¿Qué ocurre si no se cumple la condición $\lambda < \mu$ en un sistema $M/M/\infty$?

g) **(3 pts.)** Considerando el desarrollo visto en clases, ¿por qué no existen las probabilidades límite en un sistema con capacidad infinita donde la tasa de atención es exactamente igual a la de llegada de clientes?

h) **(3 pts.)** Considere un sistema $M/G/\infty$ en que la llegada de clientes es a tasa $\lambda > 0$ y que los tiempos de atención tienen distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$, con $0 < a < b$. Determine el valor de las medidas de desempeño L_q y W para este sistema.

i) **(3 pts.)** Considere un sistema $M/M/1$ con tasa de llegada λ y tasa de atención μ. Obtenga la proporción de clientes que al terminar de ser atendidos dejan menos de m personas en el sistema, sin contar dicho cliente. Su respuesta puede quedar en función de probabilidades límite.

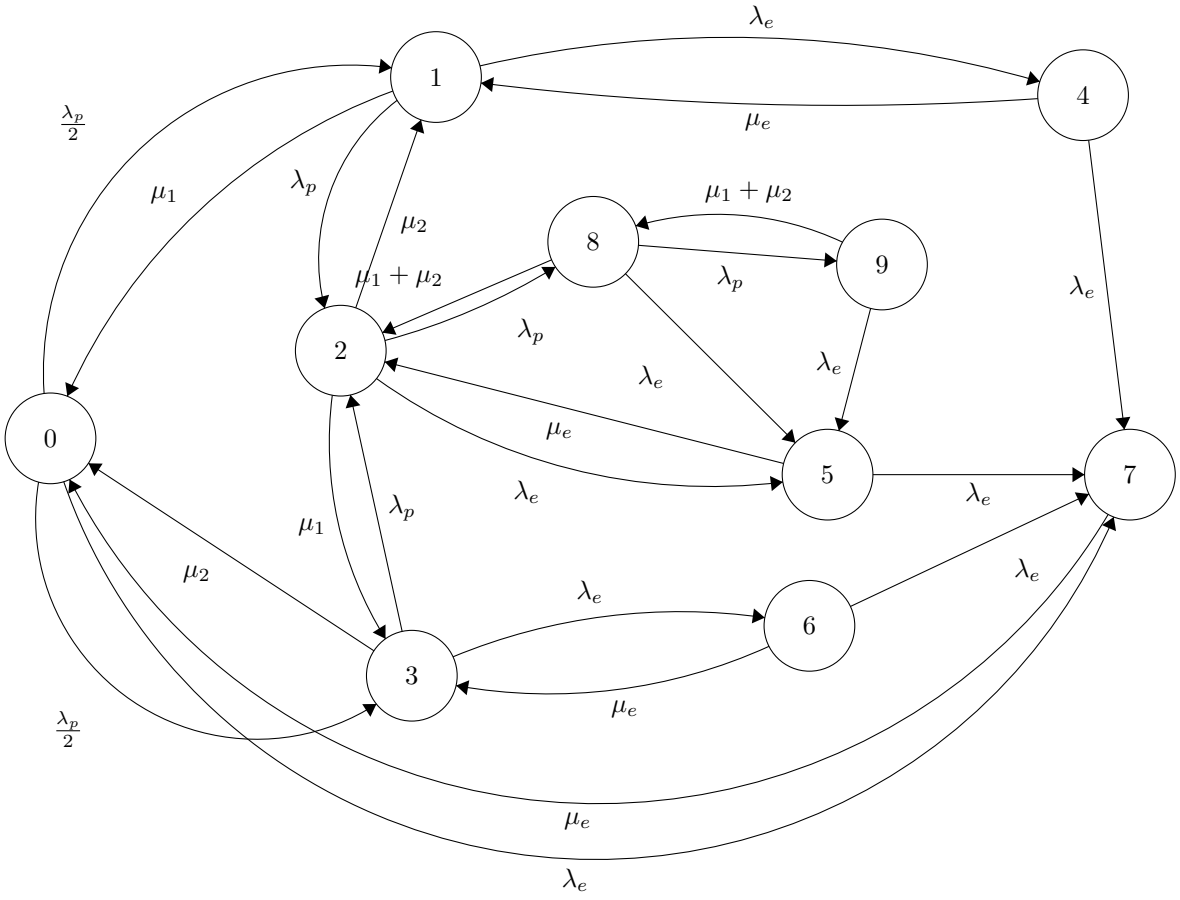
Sistema	**Probabilidades límite**	**Cálculo de L**	**Ec de Little**
M/M/1	$P_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_0}{\mu_n \cdot \ldots \cdot \mu_1} P_0$	$L = \sum_{i=0}^{\infty} n \cdot P_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	$L = \lambda_e \cdot W$

Solución problema 1

(a) Una forma de resolverlo es la que describe a continuación.
Definimos los siguientes estados:

- (0): Ambos médicos se encuentran desocupados.
- (1): Médico 2 ocupado atendiendo un paciente normal y médico 1 desocupado.
- (2): Ambos médicos atendiendo paciente normal.
- (3): Médico 1 atendiendo paciente normal y médico 2 desocupado.
- (4): Ambos médicos atienden una emergencia, el médico 2 deja su paciente normal en pausa y el médico 1 no tiene otros pacientes en pausa.
- (5): Ambos médicos atienden una emergencia y dejan sus pacientes normales en pausa.
- (6): Ambos médicos atienden una emergencia, el médico 1 deja su paciente normal en pausa y el médico 2 no tiene otros pacientes en pausa.
- (7): Ambos médicos atienden una emergencia y no tienen otros pacientes en pausa.
- (8): Ambos médicos atendiendo paciente normal y un paciente en la cola.
- (9): Ambos médicos atendiendo paciente normal y dos pacientes en la cola.

[4 puntos] por definir estados que logren modelar el problema



[4 puntos] por definir correctamente las tasas de transición

(b) La condición es que la tasa de salida de un estado es igual a la suma de las tasas de entrada de los estados distintos.

$$
\begin{aligned}
(\lambda_p + \lambda_e)P_0 &= \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \mu_e P_7 \\
(\mu_1 + \lambda_p + \lambda_e)P_1 &= \mu_2 P_2 + \frac{\lambda_p}{2} P_0 + \mu_2 P_2 + \mu_e P_4 \\
(\mu_2 + \mu_1 + \lambda_p + \lambda_e)P_2 &= \lambda_p P_1 + (\mu_1 + \mu_2)P_8 + \mu_e P_5 + \lambda_p P_3 \\
(\mu_2 + \lambda_p + \lambda_e)P_3 &= \frac{\lambda_p}{2} P_0 + \mu_1 P_2 + \mu_e P_6 \\
(\mu_e + \lambda_e)P_4 &= \lambda_e P_1 \\
(\mu_e + \lambda_e)P_5 &= \lambda_e P_2 + \lambda_e P_8 + \lambda_e P_9 \\
(\mu_e + \lambda_e)P_6 &= \lambda_e P_3 \\
\lambda_e P_7 &= \lambda_e (P_5 + P_6 + P_4 + P_0) \\
(\lambda_p + \mu_1 + \mu_2 + \mu_e)P_8 &= \lambda_p P_2 + (\mu_1 + \mu_2)P_9 \\
(\mu_1 + \mu_2 + \mu_e)P_9 &= \lambda_p P_8 \\
\sum_{i=0}^{9} P_i &= 1
\end{aligned}
$$

[4 puntos] se resta 0.25 puntos por cada ecuación faltante

(c) Para obtener la tasa de entrada efectiva necesitamos considerar cuando cada tipo de paciente podrá o no ingresar al sistema. En particular, un paciente **no podrá ingresar** en los siguientes estados:

- λ_p: Estados donde hay emergencia o hay fila de espera llena.
- λ_e: Estados donde hay una emergencia siendo atendida.

$$\lambda_{eff} = \lambda_p(1 - P_4 - P_5 - P_6 - P_7 - P_9) + \lambda_e(1 - P_4 - P_5 - P_6 - P_7)$$

[2 puntos por parte clientes regulares]
[2 puntos por parte clientes emergencia]

(d) Para obtener dicha cantidad, que llamaremos C, calculamos la suma ponderada por cada estado

$$C = (P_1 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7) + 2 \cdot (P_2 + P_8 + P_9)$$

[4 puntos]

(e)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{efectiva}} \text{[1 punto]}$$

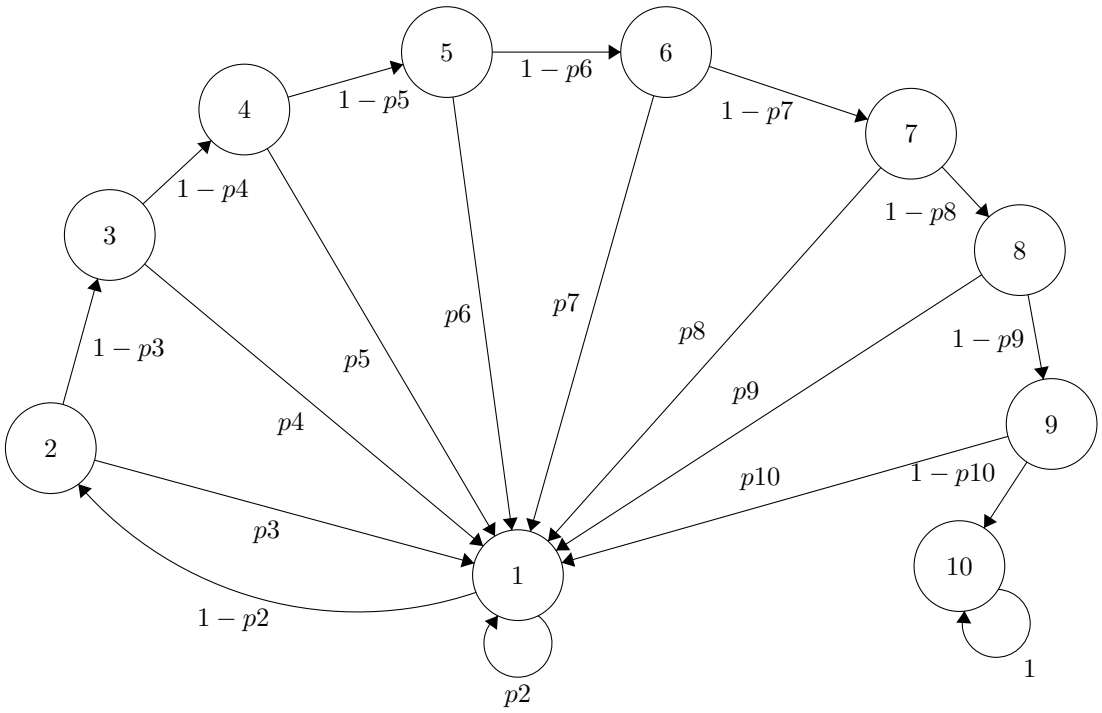
Donde $L_q = P_8 + 2 \cdot P_9$ [1 punto] y $\lambda_{efectiva}$ corresponde a la tasa de entrada a la cola de espera solamente.

$$W_q = \frac{P_8 + 2 \cdot P_9}{\lambda_p(P_2 + P_8)} \text{[2 puntos]}$$

Solución problema 2

Se consideran correctos los modelos que parten de 0 bloques y también los que parten de 1 bloque.

(a) X_n: Cantidad de bloques colocados exitosamente después de n movimientos.
$\Omega = \{1, 2, \dots 10\}$ [1 punto]



[4 puntos]

(b) Queremos que después de 5 turnos sólo se haya caído la torre una vez. Consideramos:

- ◇ Caída en turno 1 $= 0.05 \cdot 0.95 \cdot 0.9 \cdot 0.85 \cdot 0.8 = 0.02907$
- ◇ Caída en turno 2 $= 0.95 \cdot 0.1 \cdot 0.95 \cdot 0.9 \cdot 0.85 = 0.069$
- ◇ Caída en turno 3 $= 0.95 \cdot 0.9 \cdot 0.15 \cdot 0.95 \cdot 0.9 \cdot = 0.11$
- ◇ Caída en turno 4 $= 0.95 \cdot 0.9 \cdot 0.85 \cdot 0.2 \cdot 0.95 = 0.138$
- ◇ Caída en turno 5 $= 0.95 \cdot 0.9 \cdot 0.85 \cdot 0.8 \cdot 0.25 = 0.145$

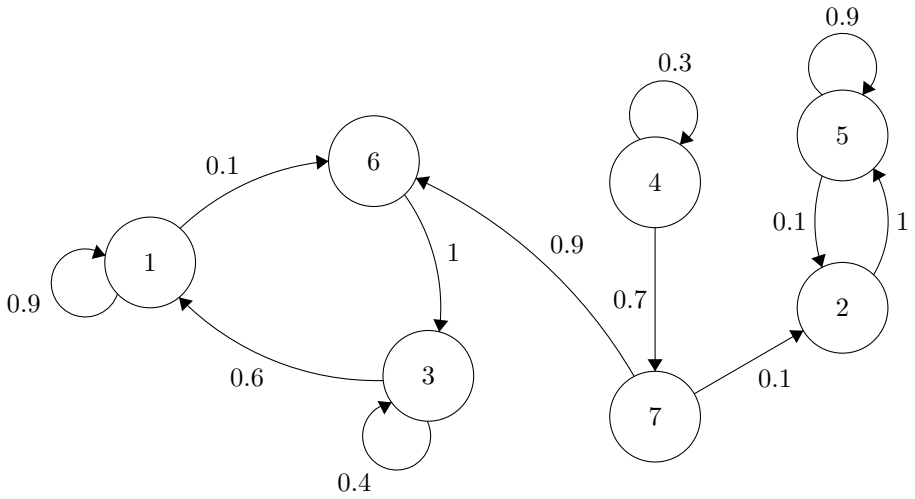
[2 puntos]

Finalmente sumamos todos los casos y obtenemos 0.49107 [1 punto]

(c) Como el estado 10 es el único estado recurrente positivo y además es aperiódico, en el largo plazo nos encontraremos en este estado con probabilidad igual a 1. Por lo tanto, la probabilidad de que el niño no haya terminado la torre es igual a 0. [2 puntos]

Solución problema 3

Se presenta un grafo para visualizar las preguntas con mayor facilidad:



(a) $E(T(4,1)) = 1 + 0,3E(T(4,1)) + 0,7E(T(7,1))$[1 punto]

$E(T(7,1)) = 1 + 0,3E(T(2,1)) + E(T(6,1))$[0.5 puntos]

Sin embargo, $E(T(2,1)) = \infty$ por lo tanto $E(T(4,1)) = \infty$[0.5 puntos]

(b) Lo que se quiere calcular es:$F(4,5), F(4,1), F(7,5)$ y $F(7,1)$.

$F(4,5) = P_{45} + P_{47}F(7,5) + P_{44}F(4,5)$ lo que es equivalente a $0.7F(4,5) = 0.7F(7,5)$[0.5 puntos]

Por otro lado, $F(7,5) = P_{75} + P_{72}F(2,5) + P_{76}F(6,5) = 0 + 0,1 + 0.9F(6,5) = 0 + 0.1 + 0 = 0.1$ [0.5 puntos]

Como $F(4,5) = F(7,5)$ se tiene lo siguiente:
$F(4,5) = 0.1$
$F(7,5) = 0.1$

Ahora se calcula:
$F(7,1) = P_{71} + P_{72}F(2,1) + P_{76}F(6,1) = 0 + 0.1F(2,1) + 0.9F(6,1) = 0 + 0 + 0.9P_{76} = 0.9$[0.5 puntos]
$F(4,1) = 0.3F(4,1) + 0.7F(7,1) = 0.9$ [0.5 puntos]

La probabilidad de visitar el estado 1 es: $0.7F(4,1) + 0.3F(7,1) = 0.9$
La probabilidad de visitar el estado 5 es: $0.7F(4,5) + 0.3F(7,5) = 0.1$
Por lo tanto, es más probable visitar el estado 1 que el estado 5.

(c) Si $X_3 = 2$, entonces X_4 será 5 con probabilidad 1, debido a que $P_{2,5} = 1$. Por lo tanto, la probabilidad que se busca es $P(X_3 = 2)$

$$P(X_3 = 2) = 0.7 \cdot P^3_{4,2} + 0.3 \cdot P^3_{7,2}$$[0.5*puntos*]

Notamos que $P^3_{4,2}$ tiene una única forma de suceder, equivalente a $P_{44} \cdot P_{47} \cdot P_{72}$. La probabilidad asociada es entonces 0.021

Luego, de manera similar $P^3_{7,2}$ también tiene una única manera de ocurrir, equivalente a $P_{72} \cdot P_{25} \cdot P_{52}$, cuyo valor es 0.01.

Finalmente, $P(X_3 = 2) = 0.0147 + 0.003 = 0.0177$

(d) Sabemos que los estados 4 y 7 son transientes, por lo que el sistema con certeza no se encontrará en dichos estados en el largo plazo. Así, calculamos entonces la probabilidad de estar en cada estado recurrente, por la probabilidad de que el sistema efectivamente visite esa sub-cadena alguna vez.

De b) ya sabemos que $F(4,i) = 0.1$ para $i \in \{2,5\}$ y que $F(4,j) = 0.9$ para $j \in \{1,3,6\}$ [0.5 puntos]
Ahora se obtiene la distribución estacionaria para cada clase recurrente.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\pi_2 = 0.1\pi_5$$
$$\pi_5 = \pi_2 + 0.9\pi_5$$
Por lo tanto se tiene que $\pi_5 = \frac{10}{11}$ y $\pi_2 = \frac{1}{11}$[1.5 puntos]

Ahora para los estados 1, 3 y 6 se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\pi_1 = 0.9\pi_1 + 0.6\pi_3$$
$$\pi_3 = 0.4\pi_3 + \pi_6$$
$$\pi_6 = 0.1\pi_1$$
Por lo tanto se obtiene que $\pi_1 = \frac{60}{76}$, $\pi_3 = \frac{10}{76}$ y $\pi_6 = \frac{6}{76}$[1.5 puntos]

Finalmente se obtiene la distribución de probabilidades en el largo plazo:

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)} = \begin{pmatrix} 0.9 \cdot \frac{60}{76} \\ 0.1 \cdot \frac{1}{11} \\ 0.9 \cdot \frac{10}{76} \\ 0 \\ 0.1 \cdot \frac{10}{11} \\ 0.9 \cdot \frac{6}{76} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{54}{76} \\ \frac{1}{110} \\ \frac{9}{76} \\ 0 \\ \frac{1}{11} \\ \frac{54}{760} \\ 0 \end{pmatrix}$$ [1 punto]

(e) En una Cadena de Markov en Tiempo Discreto (CMTD) con N estados, si la suma de todas las probabilidades de transición es igual a N, o equivalentemente la suma de las columnas es 1, la cadena se conoce como doblemente estocástica.

Ejemplo 1:

En un ejemplo simple con tres estados (A, B, C) y la matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} [2puntos] \tag{4}$$

cada fila y columna suma 1. Para encontrar la distribución estacionaria, verificamos que el vector $\pi = [1/3, 1/3, 1/3]$ se multiplica por la matriz de transición para dar el mismo vector π, lo que demuestra que la distribución estacionaria es uniforme[1 punto].

Ejemplo 2:

Supongamos una cadena de Markov con tres estados y la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Cada fila y cada columna suman 1, cumpliendo la condición de ser doblemente estocástica. Para encontrar la distribución estacionaria π, necesitamos que $\pi P = \pi$. Supongamos que $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. Entonces,

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

Esto se convierte en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0.5\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.25\pi_3 = \pi_1$$
$$0.25\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.25\pi_3 = \pi_2$$

$$0.25\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.5\pi_3 = \pi_3$$

Dado que la suma de las probabilidades debe ser 1 ($\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$), podemos ver que $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{3}$.

(f) En un sistema M/M/∞, si la tasa de llegada λ es igual o mayor que la tasa de servicio μ, significa que los clientes llegan más rápido de lo que demoran en ser atendidos. Sin embargo, como el sistema tiene un número infinito de servidores este no se va a saturar, puesto que siempre que llegue un cliente, se podrá atender inmediatamente.[3 puntos]

(g) Si $\lambda = \mu$ se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\lambda}{\mu})^n$ diverge (suma de infinitos 1's) y no se puede determinar $P_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\lambda}{\mu})^n\right)^{-1}$. Luego, al no existir P_0, no se puede calcular ningún P_n.

(h) Si consideramos un sistema $M/G/\infty$, tenemos un sistema con infinitos servidores, lo que significa que ningún cliente tiene que esperar ya que es inmediatamente atendido. Luego, la cantidad de clientes promedio en la cola es $L_q = 0$ [1 punto]. Por otro lado, el tiempo medio que tardará cada cliente en el sistema, corresponderá únicamente al tiempo que tarda en ser atendido [1 punto], luego, sea U la variable aleatoria que distribuye Uniforme[a,b], tenemos que $W = E[U] = \frac{b-a}{2} + a$[1 punto].

(i) Podemos determinar la proporción a través de la cantidad de clientes promedio que hay en el sistema, L, y la cantidad de clientes promedio que al terminar de ser atendidos dejan a k o menos personas en el sistema, L_k:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n$$

$$L_k = \sum_{n=1}^{k+1} n \cdot P_n [2puntos]$$

L_k debe considerarse desde el índice 1, para asegurar que al menos haya un cliente atendiéndose, hasta $k+1$, porque el cliente $k+1$, al terminar de atenderse, deja k clientes en el sistema.

La proporción pedida corresponde a:

$$p = \frac{L_k}{L} [1punto]$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 Modelos Estocásticos
Profesor Maximiliano González R.
Primer Semestre 2024

Interrogación 2

Tiempo total: 2 horas

Problema 1 (24 puntos)

Nuevamente, este año el sistema de salud en Chile se ve desafiado por una fuerte ola de infecciones respiratorias. Esto afecta particularmente a centros médicos de pequeñas localidades, los cuales cuentan con recursos bastante limitados. Suponga un pequeño centro de salud, en el cual dos médicos se dedican a atender consultas regulares y emergencias respiratorias. El primer médico atiende consultas a una tasa de μ_1 consultas por día, mientras que el segundo atiende a una tasa de μ_2 consultas por día. Suponga que los pacientes llegan al centro de salud según un proceso de Poisson de media λ_p pacientes por día. Cada médico puede atender a un solo paciente a la vez, por lo que si ambos están ocupados en una atención regular y un nuevo cliente aparece, la recepcionista los hará esperar en una fila cuya capacidad máxima es de 2 pacientes. En cualquier otro caso, dicho paciente será enviado a otro centro de salud.

Por otra parte, si llega un paciente con una emergencia respiratoria, lo cual ocurre a una tasa de λ_e emergencias por día, ambos médicos le darán prioridad en simultáneo. Esto significa que dejarán en espera cualquier atención regular que estuvieran realizando hasta finalizar con la emergencia. En promedio, el tiempo que les toma resolver una emergencia es de $1/\mu_e$ días. Si durante la resolución de una emergencia llega otra similar, los médicos se sentirán abrumados por no poder atenderla y pedirán al recepcionista que cancele todos los registros de atenciones actuales, de modo que cualquier consulta regular que estuviera en espera será enviada a otro centro de salud.

a) **(8 pts.)** Construya una Cadena de Markov en Tiempo Continuo que modele el estado de ocupación del centro médico. Indique claramente qué representa cada estado y las tasas de transición instantánea entre ellos.

b) **(4 pts.)** Construya el sistema de ecuaciones que permite calcular las probabilidades de largo plazo.

Asumiendo conocidas las probabilidades límite:

c) **(3pts.)** Indique la tasa de entrada efectiva al centro de salud.

d) **(3pts.)** Indique la cantidad promedio de casos que se encuentran resolviendo en un instante cualquiera de tiempo.

e) **(3pts.)** Entregue una expresión para el tiempo medio de espera de pacientes en la cola.

f) **(3pts.)** Si en el instante t los médicos están resolviendo una emergencia, indique el tiempo esperado que transcurrirá antes de comenzar a resolver otra emergencia.

Problema 2 (10 puntos)

En un jardín infantil un niño quiere construir una torre de bloques. El niño cuenta con un total de 10 bloques idénticos y para hacer la torre coloca cada bloque encima del otro. Como el niño es pequeño tiene una cierta probabilidad de que al poner un bloque la torre se caiga. La probabilidad de que se caiga la torre depende del número de bloques que lleva puestos, es decir, si el niño va a poner el i-ésimo bloque la probabilidad de que la torre se caiga es $p(i) = (i-1) \cdot 0.05$. Considere que si la torre se cae esto equivale a tener 1 bloque en la torre. El niño continuara con su juego hasta que la torre contenga todos los bloques. Considere que X_n es el número de bloques colocados exitosamente después de n movimientos. Además considere que en caso que la torre se caiga, el resultado es equivalente a que quede un solo bloque en su torre.

a) **(5 pts.)** Utilizando X_n como variable de estados, modele el problema como una CMTD definiendo el espacio de estados posibles y las probabilidades de transición entre estados.

b) **(3 pts.)** Una parvularia ha visto jugar al niño varias veces y este siempre se toma un descanso después de haber botado la torre. ¿Cuál es la probabilidad de que después de 5 turnos el niño se haya tomado solo un descanso?

c) **(2 pts.)** La mamá del niño llega al jardín infantil después de un largo tiempo. En ese tiempo el niño ha hecho un número muy grande de movimientos ($n \to \infty$). ¿Cuál es la probabilidad de que el niño no haya terminado la torre? Justifique su respuesta.

Problema 3 (26 puntos)

Considere una Cadena de Markov en Tiempo Discreto con estados 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 dada por la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & u & 0 & 0.7 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & w & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) **(2 pts.)** Suponga que $f^{(0)} = (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$. ¿Cuántas etapas tardará el sistema en promedio para visitar el estado 1 por primera vez?

b) **(2 pts.)** Suponga que $f^{(0)} = (0\ 0\ 0\ 0.7\ 0\ 0\ 0.3)$. ¿Qué es más probable, visitar el estado 5 o visitar el estado 1?

c) **(2 pts.)** Suponga que $f^{(0)} = (0\ 0\ 0\ 0.7\ 0\ 0\ 0.3)$. Calcule $\mathbb{P}(X_3 = 2, X_4 = 5)$

d) **(5 pts.)** Suponga que $f^{(0)} = (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$. Calcule $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}$

Las siguientes preguntas son independientes de los apartados anteriores.

e) **(3 pts.)** A una CMTD con N estados donde se cumple que $\sum_i \sum_j P_{ij} = N$, se le conoce como cadena doblemente estocástica. Utilizando un ejemplo de al menos tres estados que contenga al menos un loop, verifique que la distribución estacionaria corresponde a una distribución uniforme (i.e. $\pi_i = 1/N \quad \forall i$)

f) **(3 pts.)** ¿Qué ocurre si no se cumple la condición $\lambda < \mu$ en un sistema $M/M/\infty$?

g) **(3 pts.)** Considerando el desarrollo visto en clases, ¿por qué no existen las probabilidades límite en un sistema con capacidad infinita donde la tasa de atención es exactamente igual a la de llegada de clientes?

h) **(3 pts.)** Considere un sistema $M/G/\infty$ en que la llegada de clientes es a tasa $\lambda > 0$ y que los tiempos de atención tienen distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$, con $0 < a < b$. Determine el valor de las medidas de desempeño L_q y W para este sistema.

i) **(3 pts.)** Considere un sistema $M/M/1$ con tasa de llegada λ y tasa de atención μ. Obtenga la proporción de clientes que al terminar de ser atendidos dejan menos de m personas en el sistema, sin contar dicho cliente. Su respuesta puede quedar en función de probabilidades límite.

Sistema	**Probabilidades límite**	**Cálculo de L**	**Ec de Little**
M/M/1	$P_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_0}{\mu_n \cdot \ldots \cdot \mu_1} P_0$	$L = \sum_{i=0}^{\infty} n \cdot P_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	$L = \lambda_e \cdot W$