Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesores Maximiliano González, Nicolás Vargas y Andrés Navarro
Segundo Semestre 2024

Examen

Duración: 2 horas y 30 minutos

Resuelva 5 de las siguientes 6 preguntas. Marque claramente con una X toda la hoja de la pregunta que no contestará. En caso de no descartar una pregunta, no se contará el problema con mayor puntaje para el cálculo de la nota.

Problema 1 (12 puntos)

Un laboratorio realiza pruebas en tres máquinas diferentes: A, B y C. Las probabilidades de que una prueba sea asignada a cada máquina son las siguientes: $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.2$. Cada máquina tiene una probabilidad diferente de producir un resultado incorrecto: $P(I|A) = 0.02$, $P(I|B) = 0.08$, $P(I|C) = 0.12$. Además, cuando una prueba es incorrecta, el laboratorio realiza una revisión adicional para identificar la causa del error. Las probabilidades de que la causa sea un error humano (H) o técnico (T) dependen de la máquina utilizada:

$$P(H|I,A) = 0.6,\ P(T|I,A) = 0.4, \quad P(H|I,B) = 0.4,\ P(T|I,B) = 0.6, \quad P(H|I,C) = 0.3,\ P(T|I,C) = 0.7.$$

a) **(2 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que una prueba sea incorrecta?

Solución: La probabilidad de que una prueba sea incorrecta, $P(I)$, se calcula usando la ley de probabilidades totales:

$$P(I) = P(I|A)P(A) + P(I|B)P(B) + P(I|C)P(C)$$

Sustituyendo los valores:

$$P(I) = (0.02)(0.5) + (0.08)(0.3) + (0.12)(0.2)$$

$$P(I) = 0.01 + 0.024 + 0.024 = 0.058$$

Por lo tanto, la probabilidad de que una prueba cualquiera sea incorrecta es:

$$P(I) = 0.058$$

b) **(7 puntos)** ¿Qué es más probable?

i) Que una prueba cuyo resultado fue incorrecto, haya sido realizada en la máquina C.

ii) Que una prueba cuyo resultado fue incorrecto, haya sido causado por un error humano.

Solución: La probabilidad de que una prueba incorrecta haya sido realizada en la máquina C se calcula usando el teorema de Bayes:

$$P(C|I) = \frac{P(I|C)P(C)}{P(I)}$$

Sustituyendo los valores:

$$P(C|I) = \frac{(0.12)(0.2)}{0.058}$$

$$P(C|I) = \frac{0.024}{0.058} \approx 0.414$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la prueba incorrecta provenga de la máquina C es:

$$P(C|I) \approx 0.414$$

Luego, la probabilidad de que un error sea causado por un error humano, $P(H|I)$, se calcula con la ley de probabilidades totales:

$$P(H|I) = P(H|I,A)P(A|I) + P(H|I,B)P(B|I) + P(H|I,C)P(C|I).$$

Primero, calculamos $P(A|I)$, $P(B|I)$ y usamos $P(C|I)$ de la solución anterior:

$$P(A|I) = \frac{P(I|A)P(A)}{P(I)} = \frac{(0.02)(0.5)}{0.058} = \frac{0.01}{0.058} \approx 0.172$$

$$P(B|I) = \frac{P(I|B)P(B)}{P(I)} = \frac{(0.08)(0.3)}{0.058} = \frac{0.024}{0.058} \approx 0.414$$

Ahora calculamos $P(H|I)$:

$$P(H|I) = (0.6)(0.172) + (0.4)(0.414) + (0.3)(0.414)$$

$$P(H|I) = 0.1032 + 0.1656 + 0.1242 = 0.393$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un error sea causado por un error humano es:

$$P(H|I) = 0.393$$

Así, finalmente notamos que es más probable que una prueba cuyo resultado fue incorrecto, haya sido realizada en la máquina C.

c) **(3 puntos)** Sea X una variable aleatoria que representa el número de errores humanos observados en 2000 pruebas realizadas. Calcule su valor esperado.

Solución: La probabilidad de que un error sea humano en una prueba cualquiera es:

$$P(\text{error humano por prueba}) = P(H|I)P(I)$$

Sustituyendo los valores:

$$P(\text{error humano por prueba}) = (0.393)(0.058) = 0.022794$$

El número esperado de errores humanos en 2000 pruebas es:

$$\mathbb{E}[X] = 2000 \cdot P(\text{error humano por prueba})$$

$$\mathbb{E}[X] = 2000 \cdot 0.022794 \approx 46$$

Problema 2 (12 puntos)

Suponga que debe tomar una decisión importante para este verano: decidir entre realizar su práctica profesional o posponerla para el próximo año y disfrutar de unas merecidas vacaciones en un destino paradisíaco. Dado que está indeciso/a, decide recurrir al azar para dejar que las probabilidades definan su decisión. Con el objetivo de ser 'justo/a', establece que:

- Con probabilidad $\frac{1}{2}$, realizará la práctica profesional.
- Con probabilidad $\frac{1}{2}$, se irá de vacaciones.

Cuando está a punto de realizar este experimento lanzando una moneda, se da cuenta de que no tiene ninguna a mano. Como alternativa (y siendo muy astuto/a), decide aplicar los conceptos aprendidos en Simulación para generar valores de una variable aleatoria que le permita 'imitar' el lanzamiento de la moneda.

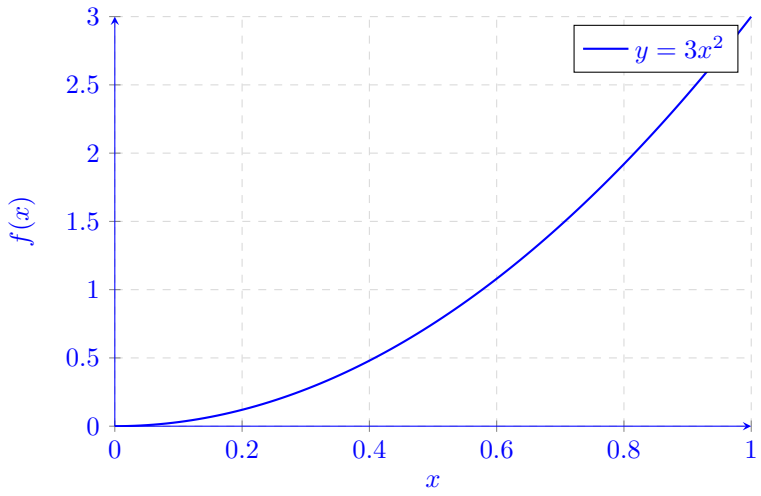
Así, su objetivo será generar una instancia de una variable aleatoria cuya función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, si la instancia generada es $\leq 1/2$, realizará la práctica, mientras que en caso contrario, se irá de vacaciones.

a) **(2 puntos)** ¿La propuesta alternativa es equivalente al planteamiento original de lanzar una moneda? Argumente.

Solución: Para responder esta pregunta es útil realizar un bosquejo de la función de densidad propuesta $f(x) = 3x^2$



Es fácil ver que la densidad es mayor a medida que los valores de x se acercan a 1, por lo tanto, al obtener instancias de esta variable aleatoria, debiese ser más probable que estas sean mayores a 0.5 que menores a 0.5. Así, con la nueva propuesta usted tiene mayores posibilidades de determinar irse de vacaciones.

b) **(10 puntos)** Resuelva la encrucijada respondiendo cuál es la decisión que finalmente 'el azar' le hizo tomar. Para ello, en caso de ser necesario, utilice un método congruencial lineal para obtener instancias uniformes con $a = 65$, $c = 1$, $m = 2^8$ y $X_0 = 66$.

Solución: Sustituyendo los valores de los parámetros en la fórmula del MCL para obtener X_1 se tiene:

$$X_1 = (65 \cdot 66 + 1) \mod 256 = 195$$

Así, la primera instancia uniforme es:

$$U = \frac{X_1}{m} = \frac{195}{256} \approx 0.7617$$

Luego, aplicamos el método de la transformada inversa. Para ello, primero obtenemos la función de distribución acumulada para $0 \leq x \leq 1$:

$$F_X(x) = \int_0^x 3t^2\, dt = \left[t^3\right]_0^x = x^3$$

Por lo tanto:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Luego, la función inversa de la acumulada es

$$F_X(x) = u \implies x^3 = u \implies x = u^{1/3}, \quad u \in [0, 1]$$

Con ello, generamos una instancia de X evaluando el valor uniforme en la función $F_X^{-1}(x)$

$$X = F_X^{-1}(U) = (0.7617)^{1/3} \approx 0.916$$

De este modo, como $0.916 > 0.5$, usted decide irse de vacaciones. ¡Que disfrute!

Problema 3 (12 puntos)

Considere un proceso de Poisson $\{N(t),\ t \geq 0\}$ con tasa λ. Calcule:

a) (7 puntos) $P(N(25) - N(15) = 8 \mid N(20) - N(10) = 5)$.

Solución: Se pide calcular $P(N(25) - N(15) = 8 \mid N(20) - N(10) = 5)$, esto es:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{P(N(25) - N(15) = 8,\ N(20) - N(10) = 5)}{P(N(20) - N(10) = 5)} \\
&= \frac{P(N(25) - N(15) = 8,\ N(20) - N(10) = 5)}{P(N(10) = 5)} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{5} P(N(25) - N(15) = 8,\ N(20) - N(10) = 5 \mid N(20) - N(15) = k) \cdot P(N(20) - N(15) = k)}{P(N(10) = 5)} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{5} P(N(25) - N(20) = 8 - k,\ N(15) - N(10) = 5 - k) \cdot P(N(5) = k)}{P(N(10) = 5)} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{5} P(N(5) = 8 - k) \cdot P(N(5) = 5 - k) \cdot P(N(5) = k)}{P(N(10) = 5)} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{5} \left(\frac{(5\lambda)^{8-k} e^{-5\lambda}}{(8-k)!} \cdot \frac{(5\lambda)^{5-k} e^{-5\lambda}}{(5-k)!} \cdot \frac{(5\lambda)^{k} e^{-5\lambda}}{k!} \right)}{\frac{(10\lambda)^5 e^{-10\lambda}}{5!}} \\
&= e^{-5\lambda} \cdot \frac{5!}{2^5} \cdot \sum_{k=0}^{5} \frac{(5\lambda)^{8-k}}{(8-k)!} \cdot \frac{1}{(5-k)!k!}
\end{aligned}
$$

b) (5 puntos) $P(S_{10} \leq 15 \mid N(20) = 30)$.

Solución: Como $P(S_{10} \leq 15 \mid N(20) = 30) = P(N(15) \geq 10 \mid N(20) = 30)$, se puede calcular la probabilidad pedida como:

Alternativa 1:

$$
\begin{aligned}
P(N(15) \geq 10 \mid N(20) = 30) &= 1 - P(N(15) \leq 9 \mid N(20) = 30) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{9} P(N(15) = i \mid N(20) = 30) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{9} \binom{30}{i} \left(\frac{15}{20}\right)^{i} \left(1 - \frac{15}{20}\right)^{30-i} \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{9} \binom{30}{i} \left(\frac{3}{4}\right)^{i} \left(\frac{1}{4}\right)^{30-i}
\end{aligned}
$$

Alternativa 2:

$$
P(N(15) \geq 10 \mid N(20) = 30) = \sum_{i=10}^{30} P(N(15) = i \mid N(20) = 30)
$$

$$= \sum_{i=10}^{30} \binom{30}{i} \left(\frac{15}{20}\right)^i \left(1 - \frac{15}{20}\right)^{30-i}$$
$$= \sum_{i=10}^{30} \binom{30}{i} \left(\frac{3}{4}\right)^i \left(\frac{1}{4}\right)^{30-i}$$

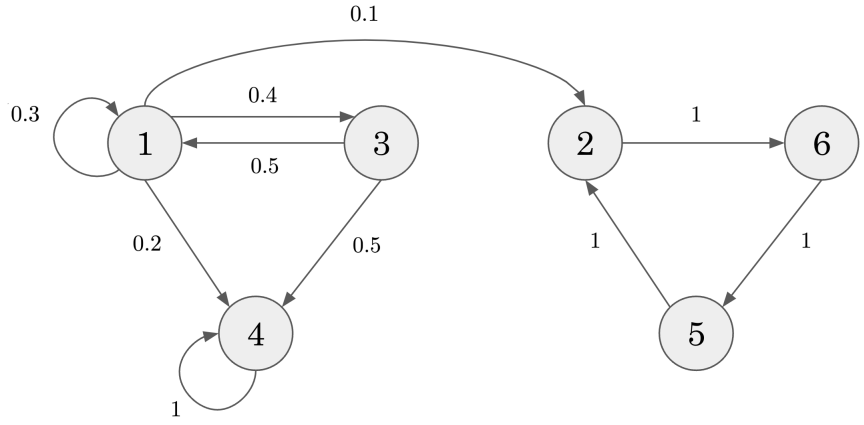
Problema 4 (12 puntos)

Considere una Cadena de Markov en Tiempo Discreto con espacio de estados $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (2 puntos) Determine las clases de estados y clasifique todos los estados en transientes, recurrentes positivos o nulos, y determine si son aperiódicos o periódicos, y el valor del período si es que corresponde.

   Solución:



   Las clases de estado son:

   - {1, 3}: Transiente aperiódica.
   - {2, 5, 6}: Recurrente positiva periódica, con período 3.
   - {4}: Recurrente positiva aperiódica.

2. (2 puntos) ¿Existe $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ para todo (i, j)? Justifique.

   Solución: Como existe una clase recurrente positiva periódica, no existe $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ para todo (i, j).

3. (3 puntos) ¿Existe alguna distribución estacionaria? Si su respuesta es afirmativa, especifique al menos una distribución estacionaria y verifique que cumple con su correspondiente sistema de ecuaciones.

Solución: Para determinar si existe alguna distribución estacionaria, debemos encontrar un vector π tal que $\pi^\intercal = \pi^\intercal P$ con $\pi \geq 0$ y $\pi_1 + \ldots + \pi_6 = 1$. Analizando la cadena, se aprecia que si partimos en el estado 4, una solución estacionaria es $\pi = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$. Por otro lado, si partimos desde un estado de la clase $\{2, 5, 6\}$, otra solución estacionaria es $\pi = (0, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

4. (3 puntos) Asumiendo que el estado inicial es el estado 1, calcule la probabilidad de eventualmente visitar el estado 4.

Solución: Nos piden calcular $F(1,4)$, luego:

$$
\begin{aligned}
F(1,4) &= P_{1,4} + P_{1,3}F(3,4) + P_{1,1}F(1,4) \\
F(1,4) &= 0.2 + 0.4F(3,4) + 0.3F(1,4) \\
F(3,4) &= P_{3,4} + P_{3,1}F(1,4) \\
F(3,4) &= 0.5 + 0.5F(1,4) \\
\Rightarrow F(1,4) &= 0.2 + 0.4\left(0.5 + 0.5F(1,4)\right) + 0.3F(1,4) \\
F(1,4) &= 0.2 + 0.2 + 0.2F(1,4) + 0.3F(1,4) \\
F(1,4) &= 0.4 + 0.5F(1,4) \\
F(1,4) - 0.5F(1,4) &= 0.4 \\
0.5F(1,4) &= 0.4 \\
F(1,4) &= \frac{0.4}{0.5} = 0.8
\end{aligned}
$$

5. (2 puntos) Calcule $\mathbb{E}(T(3,4))$.

Solución: Nos piden calcular $\mathbb{E}(T(3,4))$, luego:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(T(3,4)) &= 1 + \sum_{l \neq 4} P_{3l} \cdot \mathbb{E}(T(l,4)) \\
&= 1 + P_{3,1} \cdot \mathbb{E}(T(1,4)) \\
&= 1 + 0.5 \cdot \mathbb{E}(T(1,4)) \\
\mathbb{E}(T(1,4)) &= 1 + \sum_{l \neq 4} P_{1l} \cdot \mathbb{E}(T(l,4)) \\
&= 1 + P_{1,1} \cdot \mathbb{E}(T(1,4)) + P_{1,2} \cdot \mathbb{E}(T(2,4)) + P_{1,3} \cdot \mathbb{E}(T(3,4)) \\
&= 1 + 0.3 \cdot \mathbb{E}(T(1,4)) + 0.1 \cdot \infty + 0.4 \cdot \mathbb{E}(T(3,4)) \\
&= \infty \\
\mathbb{E}(T(3,4)) &= 1 + 0.5 \cdot \infty \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

Problema 5 (12 puntos)

Considere un cajero automático al cual llegan clientes de acuerdo a un proceso de Poisson a tasa λ. En el lugar donde se encuentra el cajero hay espacio para dos personas, una utilizando el cajero y la otra esperando su turno. Si llega un cliente cuando ya hay 2 personas ahí se ve obligado a buscar otro cajero (no entra al sistema).

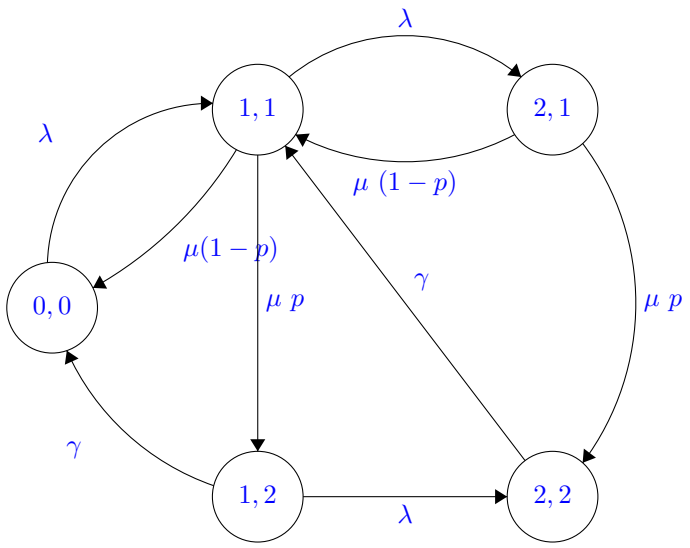
Cuando un cliente accede al cajero, realiza alguna operación financiera que toma un tiempo con distribución exponencial de **media** $\frac{1}{\mu}$. Además, una fracción $(1-p)$ de ellos se retira al terminar su primera operación, mientras que una fracción p requiere una operación adicional, lo cual toma un tiempo con distribución exponencial de **media** $\frac{1}{\gamma}$. Nadie realiza más de 2 operaciones.

a) **(5 puntos)** Modele la situación descrita como una cadena de Markov en tiempo continuo, definiendo claramente los estados y las transiciones posibles.

Solución:

Definimos estados $(X(t), Y(t))$, donde:

- $X(t)$: Cantidad de clientes en el sistema (cajero + espera)
- $Y(t)$: Número de operación que realiza la persona que está en el cajero (0, 1 o 2). Esta variable sólo puede tomar el valor 0 cuando no hay nadie en el sistema.



b) **(4 puntos)** Escriba las ecuaciones de equilibrio del sistema.

Solución:

$$\begin{aligned}
\lambda P_{0,0} &= \mu(1-p)P_{1,1} + \gamma P_{1,2}, \\
(\lambda+\mu)P_{1,1} &= \mu(1-p)P_{2,1} + \gamma P_{2,2} + \lambda P_0, \\
(\lambda+\gamma)P_{1,2} &= \mu p P_{1,1}, \\
\mu P_{2,1} &= \lambda P_{1,1}, \\
\gamma P_{2,2} &= \lambda P_{1,2} + \mu p P_{2,1}, \\
P_{0,0} + P_{1,1} + P_{1,2} + P_{2,1} + P_{2,2} &= 1
\end{aligned}$$

c) **(3 puntos)** Asumiendo qua ya conoce probabilidades de largo plazo determine:

(a) La fracción de clientes perdidos en el largo plazo porque el cajero está lleno. **(1 pto)**

(b) La cantidad promedio de clientes en el largo plazo. **(1 pto)**

(c) El tiempo de permanencia promedio de un cliente en el sistema, en el largo plazo. **(1 pto)**

Solución:

$$(a) \quad P_{2,1} + P_{2,2}$$
$$(b) \quad L = 1 \cdot (P_{1,1} + P_{1,2}) + 2 \cdot (P_{2,1} + P_{2,2})$$
$$(c) \quad W = \frac{1}{\lambda_e} L \quad \text{donde} \quad \lambda_e = \lambda(P_0 + P_{1,1} + P_{1,2})$$

Problema 6 (12 puntos)

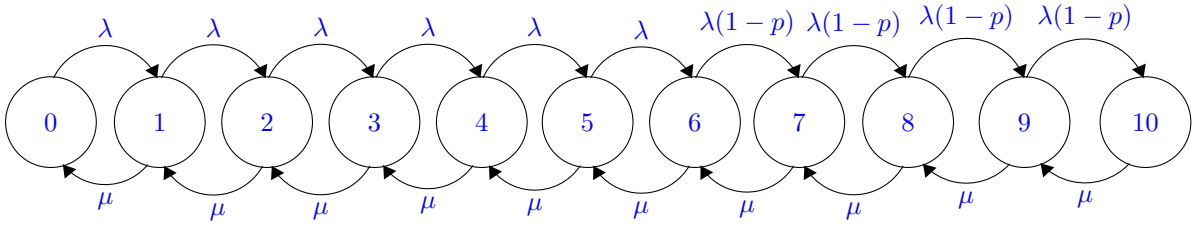
Un pequeño gimnasio tiene capacidad para un máximo de 10 personas (incluyendo a quienes están siendo atendidos y a quienes esperan). Los clientes llegan al gimnasio siguiendo un proceso de Poisson con tasa λ. Sin embargo, los clientes son menos propensos a entrar si el gimnasio está muy lleno. En particular:

- Si hay 5 personas o menos en el gimnasio, los clientes ingresan sin restricciones.
- Si hay más de 5 personas, los clientes que llegan deciden no entrar con una probabilidad p.

Dentro del gimnasio, hay un único entrenador que atiende a los clientes uno a uno. Los tiempos de atención son exponenciales con tasa μ.

a) **(4 puntos)** Modele el problema como un sistema de espera indicando claramente las tasas de transición entre cada estado.

Solución: Sea $\{X(t), t \geq 0\} \in \mathbb{N}_0$ la cantidad de personas en el gimnasio en el instante $t \geq 0$ (sin contar al entrenador). Así, el grafo de la CMTC es



Donde se desprenden las tasas de transición instantáneas de este sistema de espera.

b) **(4 puntos)** Calcule la probabilidad de que el gimnasio esté lleno (10 personas) en estado estacionario. Puede dejar la respuesta en expresiones matemáticas.

Solución:

- **Tasa de llegada:** $\lambda_n = \lambda$ si $n \leq 5$, y $\lambda_n = \lambda(1-p)$ si $6 \leq n \leq 9$, con $\lambda_{10} = 0$.

- **Tasa de salida:** $\mu_n = \mu$.

La probabilidad de que el gimnasio esté lleno, P_{10}, se obtiene resolviendo las probabilidades estacionarias mediante la relación:

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1}, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots, 10.$$

Con esto, las probabilidades P_n se calculan recursivamente:

$$P_n = P_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}.$$

El valor de P_0 se determina normalizando la suma de probabilidades a 1:

$$P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{10} = 1.$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{10} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}}.$$

Finalmente, la probabilidad de que el gimnasio esté lleno es:

$$P_{10} = P_0 \prod_{k=1}^{10} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}.$$

c) **(4 puntos)** Calcule la cantidad promedio de clientes en el sistema y el tiempo promedio de permanencia. Para esta pregunta considere que conoce las probabilidades estacionarias.

Solución: La cantidad promedio de clientes en el gimnasio se calcula como:

$$L = \sum_{n=0}^{10} n P_n,$$

donde P_n son las probabilidades estacionarias calculadas previamente.

Tiempo promedio de permanencia (W)

Por la **Ley de Little**, el tiempo promedio que un cliente pasa en el gimnasio se puede calcular como:

$$W = \frac{L}{\lambda_{\text{efectiva}}},$$

donde $\lambda_{\text{efectiva}}$ es la tasa efectiva de llegada al sistema en estado estacionario. La tasa efectiva de llegada se obtiene como:

$$\lambda_{\text{efectiva}} = \sum_{n=0}^{9} \lambda_n P_n,$$

donde:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{si } n \leq 5, \\ \lambda(1-p), & \text{si } 6 \leq n \leq 9, \\ 0, & \text{si } n = 10. \end{cases}$$

En esta fórmula, λ_n representa la tasa efectiva de llegada al sistema en función del número de clientes n, y P_n es la probabilidad estacionaria asociada a cada estado n.

Distribución	**PDF** $(f(x))$	**CDF** $(F(x))$	**Esperanza**	**Varianza**
Poisson(λ)	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Binomial(n, p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Uniforme(a, b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Geométrica(p)	$(1-p)^{x-1} p$	$1 - (1-p)^x$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Gamma(k, λ)	$\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$	$\int_0^x \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)}\, dt$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$

Sistema	P_0	P_n	**L**	$\mathbf{L_q}$
M/M/1	$1 - \frac{\lambda}{\mu}$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad \forall i \in \{1, 2, ...\}$	$\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$
M/M/1/K	$\frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad \forall i \in \{1, 2, ..., K\}$	$\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K - K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K + K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}\right)}\right)$	$L - \frac{\lambda(1-P_K)}{\mu}$
M/M/c	$\left[\sum_{n=0}^{c} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{\lambda^c}{c!\mu^c} \cdot \frac{\frac{\lambda}{c\mu}}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}}\right]^{-1}$	$\frac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0 \quad \forall i \in \{1, 2, ..., c\}$ $\frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} P_0 \quad \forall i \in \{c+1, ...\}$	$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!(1-\frac{\lambda}{c\mu})^2}\frac{\lambda}{\mu}$	$L - \frac{\lambda}{\mu}$
M/M/c/K	$\left[\sum_{n=0}^{c} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{\lambda^c}{c!\mu^c} \cdot \frac{\lambda}{c\mu} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c}}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}}\right]^{-1}$	$\frac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0 \quad \forall i \in \{1, 2, ..., c\}$ $\frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} P_0 \quad \forall i \in \{c+1, ..., K\}$	$\sum_{n=0}^{K} nP_n$	$L - \frac{\lambda(1-P_K)}{\mu}$