Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesor Andrés Navarro
Primer Semestre 2026

Interrogación 1

Duración: 2 horas

Problema 1 (15 puntos)

Responda las siguientes preguntas de manera independiente:

(a) **(5 puntos)** En un remate industrial, se presentan **6 bodegas** cerradas y visualmente idénticas, donde sólo se distinguen por un número en su puerta. Se tiene la certeza de que solo una de ellas contiene un lote de maquinaria de alto valor, mientras que las otras 5 están vacías. Sólo tiene dinero para adquirir una de las bodegas.

Usted, como ingeniero a cargo de la adquisición, selecciona inicialmente la **Bodega 1**. El martillero del remate, quien conoce con exactitud el contenido de cada bodega, decide añadir tensión al proceso: de las 5 bodegas que usted **no** eligió, el martillero abre **4 bodegas** y muestra que están vacías. Tras este acto, solo quedan cerradas la **Bodega 1** (su elección original) y la **Bodega 6** (una de las que usted no eligió). Su socio comercial le susurra: *"No cambies de decisión, ahora hay solo dos bodegas y la probabilidad de ganar es 50/50, así que no nos conviene el riesgo del cambio"*.

¿Su compañero está en lo correcto? Justifique con cálculo de probabilidades.

Solución:

Para evaluar la afirmación del socio, definimos C_1 como el evento de que el premio esté en la bodega elegida inicialmente. La probabilidad a priori es $P(C_1) = 1/6$, por lo que la probabilidad de que el premio **no** esté en la Bodega 1 es $P(C_1^c) = 5/6$.

Al observar que el administrador abre las bodegas 2, 3, 4 y 5 (evento M), notamos que el administrador no actúa al azar, sino que descarta deliberadamente bodegas vacías dentro del grupo que usted no eligió. Esto implica que si el premio estaba originalmente en el conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, después del descarte el premio **sí o sí** debe estar en la Bodega 6.

Por lo tanto, la probabilidad de ganar cambiando a la Bodega 6 es equivalente a la probabilidad de no haber acertado inicialmente:

$$P(C_6|M) = P(C_1^c) = \frac{5}{6} \approx 83,3\%$$

Mientras que la probabilidad de ganar manteniendo la decisión sigue siendo:

$$P(C_1|M) = P(C_1) = \frac{1}{6} \approx 16,7\%$$

Conclusión: El socio está equivocado. La probabilidad no es 50/50 porque el administrador "traspasa" toda la probabilidad del grupo no elegido (5/6) a la única bodega que dejó cerrada (Bodega 6). La decisión óptima es cambiar.

(b) **(5 puntos)** Sean A, B y C tres eventos definidos en un mismo espacio de probabilidad tal que $A \subseteq B$. Suponga que el evento C es independiente de A y también independiente de B, y que $P(C) > 0$. ¿es posible afirmar que $P(A|C) < P(B|C)$? Justifique su respuesta.

Solución:

Sabemos que $A \subseteq B$, lo cual implica que $P(A) \leq P(B)$

Por definición de independencia, sabemos que la ocurrencia de C no altera la probabilidad de A ni de B, lo cual se expresa matemáticamente como:

$$P(A|C) = P(A) \quad \text{y} \quad P(B|C) = P(B)$$

Esta igualdad se deriva directamente de la definición de probabilidad condicional y la propiedad de independencia ($P(A \cap C) = P(A)P(C)$):

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C)}{P(C)} = P(A)$$

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B)P(C)}{P(C)} = P(B)$$

Considerando lo anterior, sólo es posible afirmar que $P(A|C) \leq P(B|C)$ y **no** que $P(A|C) < P(B|C)$

(c) **(5 puntos)** el tiempo de ejecución (en horas) de un proceso de optimización en un servidor se comporta como una variable aleatoria continua X con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

donde a y b son constantes reales. Además, se sabe que el valor esperado del tiempo de ejecución es $E[X] = \frac{7}{6}$.

I) Determine los valores de las constantes a y b. Justifique detalladamente las condiciones que deben cumplir estas constantes para que $f_X(x)$ sea una fdp válida.

II) Suponga que el costo de operación del servidor es $C = 10X + 5$. Calcule el costo esperado del proceso.

Solución: a) Para que $f_X(x)$ sea una fdp válida, debe cumplir dos condiciones:

(a) $f_X(x) \geq 0$ para todo x en su dominio.

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.

Aplicando la segunda condición:

$$\int_0^2 (ax + b)dx = \left[\frac{ax^2}{2} + bx\right]_0^2 = 2a + 2b = 1 \implies a + b = \frac{1}{2} \quad \text{(Ecuación 1)}$$

Usando el dato del valor esperado $E[X] = 7/6$:

$$\int_0^2 x(ax + b)dx = \int_0^2 (ax^2 + bx)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{3}a + 2b = \frac{7}{6} \quad \text{(Ecuación 2)}$$

Multiplicando la Ecuación 1 por 2, tenemos $2a + 2b = 1$. Restando esta a la Ecuación 2:

$$\left(\frac{8}{3} - 2\right)a = \frac{7}{6} - 1 \implies \frac{2}{3}a = \frac{1}{6} \implies a = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo a en la Ecuación 1: $\frac{1}{4} + b = \frac{1}{2} \implies b = \frac{1}{4}$.

b) Usando la propiedad de linealidad de la esperanza:

$$E[C] = E[10X + 5] = 10E[X] + 5$$

Sustituyendo el valor dado $E[X] = 7/6$:

$$E[C] = 10\left(\frac{7}{6}\right) + 5 = \frac{70}{6} + \frac{30}{6} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3} \approx 16,67$$

Problema 2 (20 puntos)

A un centro de distribución regional llegan solicitudes de despacho de fruta siguiendo un **Proceso de Poisson** con una tasa de $\lambda = 8$ solicitudes por hora. Cada solicitud puede pedir una carga de 2, 3 o 4 unidades de fruta, con probabilidades 0,2; 0,5 y 0,3, respectivamente. El tamaño de cada pedido es independiente entre sí e independiente del proceso de llegada.

(a) **(5 puntos)** Si se registra que durante la primera hora de operación se despachó un total de 20 unidades, determine el valor esperado de unidades que se solicitarán en la **siguiente media hora** de funcionamiento.

Solución:

Sea $S(t)$ el total de unidades solicitadas hasta el tiempo t. Se busca determinar $E[S(1,5) - S(1) \mid S(1) = 20]$.

Por la propiedad de **incrementos independientes** del proceso de Poisson, lo ocurrido en la primera hora no afecta el futuro del proceso. Por lo tanto:

$$E[S(1,5) - S(1) \mid S(1) = 20] = E[S(1,5) - S(1)]$$

Debido a la **estacionariedad**, el valor esperado en un intervalo de media hora ($\Delta t = 0,5$) es simplemente:

$$E[S(0,5)] = E[N(0,5)] \cdot E[D]$$

Donde:

- $E[N(0,5)] = \lambda \cdot t = 8 \cdot 0,5 = 4$ solicitudes.
- $E[D] = (2 \cdot 0,2) + (3 \cdot 0,5) + (4 \cdot 0,3) = 0,4 + 1,5 + 1,2 = 3,1$ unidades/solicitud.

Finalmente:

$$E[S(0,5)] = 4 \cdot 3,1 = \mathbf{12,4} \text{ unidades}$$

(b) **(5 puntos)** ¿Cuál es la distribución de probabilidades del tiempo que debe transcurrir desde el inicio del proceso hasta que se observe una orden por 4 frutas?

Solución: Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ el proceso de llegada de órdenes con tasa $\lambda = 8$ [órdenes/hora]. Definimos el evento de interés como la llegada de una orden de tipo 4 (4 fruta), cuya probabilidad es $p_4 = 0,3$.

Por la propiedad de **descomposición** de un proceso de Poisson, el flujo de órdenes de 4 artículos, $\{N_4(t), t \geq 0\}$, es también un proceso de Poisson con tasa:

$$\lambda_4 = \lambda \cdot p_4 = 8 \cdot 0,3 = 2,4 \text{ [órdenes/hora]}$$

Sea T_4 el tiempo hasta la primera orden de 4 artículos. Por la relación entre el proceso de Poisson y los tiempos entre arribos:

$$T_4 \sim \text{Exponencial}(\lambda_4 = 2,4)$$

Su función de densidad es:

$$f_{T_4}(t) = 2,4 \cdot e^{-2,4t}, \quad t \geq 0$$

Suponga ahora que, por problemas de logística, un día en particular se limita la cantidad de despachos a un máximo de 50 despachos por jornada. Todas las solicitudes que se reciban posteriormente deberán ser rechazadas.

(c) **(5 puntos)** Calcule el valor esperado de la cantidad de solicitudes que serán rechazadas durante una jornada de 8 horas.

Solución: Sea $N(t)$ el número de solicitudes recibidas en un intervalo de tiempo de t horas. Para una jornada de 8 horas, $t = 8$. Por las propiedades del proceso de Poisson, $N(8)$ se distribuye según una variable de Poisson con parámetro $\alpha = \lambda \cdot t = 8 \cdot 8 = 64$ solicitudes. Es decir, $N(8) \sim \text{Poisson}(64)$.

Definimos R como la cantidad de solicitudes rechazadas en la jornada. Luego,

$$R = \max(0, N(8) - 50)$$

Utilizando la definición de esperanza ,

$$\mathbb{E}[R] = \sum_{k=51}^{\infty} (k - 50)\mathbb{P}(N(8) = k)$$

Reordenando,

$$\mathbb{E}[R] = \sum_{k=51}^{\infty} k\mathbb{P}(N(8) = k) - 50 \sum_{k=51}^{\infty} \mathbb{P}(N(8) = k)$$

Con lo cual,

$$\mathbb{E}[R] = \sum_{k=51}^{\infty} k\, e^{-64} \frac{64^k}{k!} - 50 \sum_{k=51}^{\infty} e^{-64} \frac{64^k}{k!}.$$

(d) **(5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que se tengan que rechazar más de 2 solicitudes durante una jornada de 8 horas?

Solución: Siguiendo la definición de la parte anterior, tenemos que $N(8) \sim \text{Poisson}(64)$ representa el número total de solicitudes que llegan durante la jornada de 8 horas.

Se requiere calcular la probabilidad de que se tengan que rechazar más de 2 solicitudes. Para que esto ocurra, el total de solicitudes recibidas en el día debe superar la capacidad máxima de la jornada (50) en estrictamente más de 2 unidades. Es decir, el sistema debe recibir más de 52 solicitudes.

Luego, buscamos la probabilidad del evento $\mathbb{P}(R > 2)$:

$$\mathbb{P}(R > 2) = \mathbb{P}(N(8) - 50 > 2) = \mathbb{P}(N(8) > 52)$$

Por simplicidad calcularemos,

$$\mathbb{P}(N(8) > 52) = 1 - \mathbb{P}(N(8) \leq 52)$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(R > 2) = 1 - \sum_{k=0}^{52} \frac{e^{-64}64^k}{k!}$$

Problema 3 (25 puntos)

Una empresa de retail ha decidido clasificar a sus clientes en clientes **tipo A** y **tipo B**. La razón de aquello es que se pretende hacer una discriminación de precios para la venta de una nueva línea de camisas.

- Para los clientes de tipo A existen Q_A camisas en stock.
- Para los clientes de tipo B existen Q_B camisas en stock.

Cada cliente, independiente del tipo que sea, comprará solo una camisa. El precio cobrado a los clientes tipo A será fijo e igual a P. En cambio, para los clientes de tipo B se cobrará un precio creciente B_i si se trata de la i-ésima camisa vendida dentro de las Q_B almacenadas.

Se ha estudiado el comportamiento de llegada para ambos tipos de clientes, determinando que siguen procesos de Poisson independientes con los siguientes parámetros:

- λ_A [clientes/hora] para los clientes de tipo A.
- λ_B [clientes/hora] para los clientes de tipo B.

(a) **(4 puntos)** ¿A qué hora se espera que se agoten las camisas tipo A?

Solución:

Sea $N_A(t)$ el proceso de Poisson que describe la llegada de clientes tipo A con tasa λ_A clientes por hora.

Las camisas tipo A se agotan cuando llega el cliente número Q_A. El tiempo hasta la Q_A-ésima llegada en un proceso de Poisson corresponde al tiempo de arribo T_{Q_A}.

Sabemos que

$$T_{Q_A} = \sum_{i=1}^{Q_A} T_i$$

donde $T_i \sim \text{Exp}(\lambda_A)$ son los tiempos entre llegadas, independientes.

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[T_{Q_A}] = \sum_{i=1}^{Q_A} \mathbb{E}[T_i] = Q_A \cdot \frac{1}{\lambda_A}$$

(b) **(5 puntos)** Si en las primeras 6 horas han llegado M clientes en total, ¿cuál es la probabilidad que k de ellos hayan sido de tipo A?

Solución:

$$\begin{aligned} P(N_A(6) = k | N_T(6) = M) &= \frac{P(N_A(6) = k \wedge N_T(6) = M)}{P(N_T(6) = M)} \\ &= \frac{P(N_A(6) = k) \cdot P(N_B(6) = M - k)}{P(N_T(6) = M)} \\ &= \frac{\frac{(6\lambda_A)^k \cdot e^{-6\lambda_A}}{k!} \cdot \frac{(6\lambda_B)^{M-k} \cdot e^{-6\lambda_B}}{(M-k)!}}{\frac{(6(\lambda_A+\lambda_B))^M \cdot e^{-6(\lambda_A+\lambda_B)}}{M!}} \\ &= \binom{M}{k} \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}\right)^k \cdot \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}\right)^{M-k} \end{aligned}$$

(c) **(8 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que se vendan exactamente k camisas para los clientes de tipo B, antes de que se agoten las camisas para los clientes de tipo A?

Hint: al momento de vender la última camisa para cliente tipo A se han vendido exactamente k camisas del tipo B

Solución:

Sean $N_A(t)$ y $N_B(t)$ procesos de Poisson independientes. La probabilidad b de que un cliente que llega sea de tipo B es:

$$b = \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}$$

Para que se vendan exactamente k camisas de tipo B antes de agotar las Q_A de tipo A, debe ocurrir que entre los primeros $(Q_A + k - 1)$ clientes, exactamente k sean de tipo B, y que el cliente número $(Q_A + k)$ sea obligatoriamente de tipo A.

Definiendo ρ_k como esta probabilidad:

$$\rho_k = \binom{Q_A - 1 + k}{k} b^k (1-b)^{Q_A - 1} \cdot (1-b)$$

Sustituyendo b:

$$\rho_k = \binom{Q_A + k - 1}{k} \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}\right)^k \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}\right)^{Q_A}$$

Ahora suponga que la empresa no quiere que sus clientes se vayan con las manos vacías, por lo que decide entregarles un regalo a cualquier cliente que haya llegado, hayan comprado una camisa o no. Los clientes que llegan se ordenan en una fila para recibir el obsequio, el cual es entregado por un promotor en un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu$ horas, no importando el tipo de cliente de que se trata. Asuma que los clientes llegan donde el promotor según el mismo proceso de llegada a la tienda de la empresa y que el promotor atiende a un cliente a la vez.

(d) **(8 puntos)** Si el promotor está atendiendo a un cliente de tipo A y cuando comenzó a atender a dicho cliente había solo un tipo de cliente B (y nadie más de tipo A) en la fila. ¿Cuál es la distribución de probabilidades del número de clientes (totales) en la cola al finalizar la atención del cliente de tipo A?

Solución: Llamemos $P(n)$ a la probabilidad de que hayan n clientes en la fila justo al finalizar la atención del cliente tipo A. Llamaremos T al tiempo de atención de la persona que está en la fila. Condicionando en la duración de la atención de este cliente se tiene:

$$P(n) = \int_0^\infty P(n|\text{atención dura } t) f_T(t) dt = \int_0^\infty P(n|\text{atención dura } t) \mu e^{-\mu t} dt$$

Además, ya que hay 1 cliente esperando, para que hayan n clientes en la fila al finalizar la atención, deben llegar $n-1$ clientes durante la misma. Así:

$$P(n|\text{atención dura } t) = \frac{e^{-t(\lambda_A + \lambda_B)} (t(\lambda_A + \lambda_B))^{n-1}}{(n-1)!}$$

Luego,

$$\begin{aligned} P(n) &= \int_0^\infty \frac{e^{-t(\lambda_A + \lambda_B)} (t(\lambda_A + \lambda_B))^{n-1}}{(n-1)!} \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \frac{(\lambda_A + \lambda_B)^{n-1} \mu}{(\lambda_A + \lambda_B + \mu)^n} \int_0^\infty \frac{e^{-t(\lambda_A + \lambda_B + \mu)} (\lambda_A + \lambda_B + \mu)^n t^{n-1}}{(n-1)!} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{(\lambda_A + \lambda_B)^{n-1}\mu}{(\lambda_A + \lambda_B + \mu)^n}$$

Ya que dentro de la integral queda la densidad de una distribución gamma de parámetros n y $\lambda_A + \lambda_B + \mu$.

Formulario Distribuciones

Distribución	**PDF**	**CDF**	**Esperanza**	**Varianza**
Poisson(λ)	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Binomial(n, p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Uniforme(a, b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Geométrica(p)	$(1-p)^{x-1} p$	$1 - (1-p)^x$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Gamma(k, λ)	$\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$	$\int_0^x \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)}\, dt$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$
Normal(μ, σ^2)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	μ	σ^2