Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos 1-2026
Profesora: Verónica Godoy

Interrogación 1

Duración: 2 horas

Problema 1 (15 puntos)

a) **(4 puntos) Urnas de Pólya**. Una urna contiene inicialmente N bolas azules y M bolas blancas. Se realizan extracciones sucesivas de la siguiente forma: se extrae una bola y se anota su color, se devuelve la bola a la urna y se agrega otra bola del mismo color. ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera bola extraída sea azul?.

Solución: Se definen los siguientes eventos:
A_i la i-ésima bola extraída es azul
B_i la i-ésima bola extraída es blanca

Se pide calcular $\mathrm{P}(A_3) = \mathrm{P}(A_1,A_2,A_3) + \mathrm{P}(A_1,B_2,A_3) + \mathrm{P}(B_1,A_2,A_3) + \mathrm{P}(B_1,B_2,A_3)$

Se evalúa cada probabilidad conjunta:

$\mathrm{P}(A_1,A_2,A_3) = \frac{N}{N+M} \cdot \frac{N+1}{N+M+1} \cdot \frac{N+2}{N+M+2}$
$\mathrm{P}(A_1,B_2,A_3) = \frac{N}{N+M} \cdot \frac{M}{N+M+1} \cdot \frac{N+1}{N+M+2}$
$\mathrm{P}(B_1,A_2,A_3) = \frac{M}{N+M} \cdot \frac{N}{N+M+1} \cdot \frac{N+1}{N+M+2}$
$\mathrm{P}(B_1,B_2,A_3) = \frac{M}{N+M} \cdot \frac{M+1}{N+M+1} \cdot \frac{N}{N+M+2}$

Resultado:

$$\frac{N(N+1)(N+2) + NM(N+1) + MN(N+1) + M(M+1)(N)}{(N+M)(N+M+1)(N+M+2)}$$

Puntaje:
2 puntos por planteamiento de la probabilidad
2 puntos por evaluación de la probabilidad
Obs: se puede utilizar también diagrama de árbol y probabilidades condicionales

b) **(5 puntos)** Sean A y B dos eventos definidos en un mismo espacio muestral. Determine qué condiciones deben cumplir estos eventos para que

$$\mathbb{P}(A|B) = 1$$

Solución: Las condiciones que deben cumplir los eventos A y B son:

- Deben ser conjuntos no vacíos $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ lo que equivale a que $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$
- $B \subseteq A$, es decir, todos los elementos que pertenecen a B también pertenecen a A, por lo que cuando ocurre el evento B, tenemos la certeza que también ocurrió el evento A.

Puntaje:
1 punto por primera condición (expresada en cualquiera de sus formas)
4 puntos por segunda condición (incluyendo el caso en que los conjuntos sean iguales)
Obs: También se puede explicar mediante análisis de probabilidades o diagrama de Venn

c) **(6 puntos)** La función de densidad conjunta de las variables X e Y viene dada por:
$f_{XY}(x,y) = ke^{-x}e^{-y}$ para $0 \leq x < y \leq \infty$.

i. Calcule el valor de k.

ii. Determine el valor esperado de Y.

Solución:
Se obtiene función densidad de probabilidad marginal de Y
$f_Y(y) = \int_0^y f_{XY}(x,y)\,dx = \int_0^y ke^{-y}e^{-x}\,dx = -ke^{-y}e^{-x}|_0^y = -ke^{-y}(e^{-y}-1) = k(e^{-y}-e^{-2y})$

Para que sea función densidad de probabilidad se verifica que: $\int_0^\infty f_Y(y)\,dy = 1$
$\int_0^\infty f_Y(y)\,dy = \int_0^\infty k(e^{-y}-e^{-2y})\,dy = k\int_0^\infty e^{-y}\,dy - k\int_0^\infty e^{-2y}\,dy = k - \frac{k}{2} = \frac{k}{2} = 1$

i. $k = 2$

Obs: k también se puede obtener resolviendo: $\int_0^\infty \int_y^\infty f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = 1$

Con la $f_Y(y)$ se calcula el valor esperado de Y : E(Y)=$\int_0^\infty y f_Y(y)\,dy$
$2\int_0^\infty ye^{-y}\,dy - \int_0^\infty 2ye^{-2y}\,dy = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

ii. $\mathrm{E}(Y) = \frac{3}{2}$ Obs: Se sabe que $\int_0^\infty cy \cdot\ e^{-cy}\,dy = \frac{1}{c}$ (por distribución exponencial)

Puntaje:
3 puntos por cálculo de k
3 puntos por cálculo de E(Y)

Problema 2 (20 puntos)

En Halloween muchos niños visitan las casas del vecindario para pedir dulces. A una casa en particular los niños llegan en grupos de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 15$ grupos/hora desde las 17:00 hasta las 22:00. Cada grupo i está formado por X_i niños. Los X_i son v.a. independientes entre sí e independientes de t con función de probabilidad:
$\Pr[X_i = 3] = 0.4$; $\Pr[X_i = 4] = 0.5$; $\Pr[X_i = 5] = 0.1$

a) **(6 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que entre las 18:00 y las 18.30 hayan pasado 10 niños por la casa?.

Solución:

Sea $N(t)$: cantidad de grupos que pasa por la casa en un tiempo t

Sea $N_k(t)$: cantidad de grupos integrados por k niños que pasa por la casa en un tiempo t (k = 3,4,5)

$N_k(t)$ es proceso de Poisson($\lambda_k = \lambda p_k$) por propiedad de desagregación.

Por propiedad de incrementos estacionarios, entre 18:00 y 18:30 equivale a t = 0,5 horas.

Para que 10 niños pasen por la casa en ese intervalo, pueden pasar:

- 2 grupos, cada uno de 5 niños: $\frac{e^{-\lambda t}\cdot\ (\lambda t)^2}{2!}\ \cdot p_5^2$
- 3 grupos, 2 de 3 niños y 1 de 4 niños: $\frac{e^{-\lambda t}\cdot\ (\lambda t)^3}{3!}\ \cdot p_3^2 \cdot\ p_4 \cdot \binom{3}{2}$

  Obs: la combinatoria corresponde a las diferentes formas de ordenar 2 grupos de 3 niños y 1 grupo de 4 niños.

También se puede resolver como:

- 2 grupos, cada uno de 5 niños: $\mathrm{P[N}_5(t) = 2, N_4(t) = 0, N_3(t) = 0] = \frac{e^{-\lambda_5 t}\cdot\ (\lambda_5 t)^2}{2!}\cdot\ \mathrm{e}^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_3 t}$
- 3 grupos, 2 de 3 niños y 1 de 4 niños: $\mathrm{P[N}_3(t) = 2, N_4(t) = 1, N_5(t) = 0] = \frac{e^{-\lambda_3 t}\cdot\ (\lambda_3 t)^2}{2!}\ \cdot\ e^{-\lambda_4 t}\cdot \lambda_4 t \cdot\ \mathrm{e}^{-\lambda_5 t}$

Resultado:

$$\frac{e^{-7,5}\cdot\ (7,5)^2}{2!}\ \cdot\ 0,1^2 + \frac{e^{-7,5}\cdot\ (7,5)^3}{2!}\ \cdot\ 0,4^2 \cdot\ 0,5$$

Puntaje:
2 puntos por identificar los dos casos posibles
2 puntos por desarrollar probabilidad caso 1 (en cualquiera de sus formas)
2 puntos por desarrollar probabilidad caso 2 (en cualquiera de sus formas)

b) **(6 puntos)** Los dueños de casa tienen dulces para darle a 35 grupos. ¿Cuál es la probabilidad de que se les hayan acabado los dulces antes de las 19:00 si solo se sabe que hasta las 19:00 pasaron tres grupos de 5 niños por la casa? (o sea, no se sabe cuántos grupos de 3 y 4 niños han pasado)

Solución: Si se acabaron los 35 paquetes de dulces antes las 19:00 horas significa que hasta las 19:00 pasaron al menos 35 grupos por la casa. (19:00 equivale a t=2). Como se sabe que en ese tiempo pasaron 3 grupos de 5 niños, la probabilidad pedida se traduce a:

$$\mathrm{P[N}(2) \geq\ 35 | N_5(2) = 3] = \frac{P[N_3(2)+N_4(2)+N_5(2) \geq\ 35, N_5(2)=3]}{P[N_5(2)=3]} = \frac{P[N_3(2)+N_4(2) \geq\ 32, N_5(2)=3]}{P[N_5(2)=3]} = P[N_3(2) + N_4(2) \geq\ 32]$$

puesto que $N(t) = N_3(t) + N_4(t) + N_5(t)$, por propiedades se puede saltar los pasos intermedios.

$\mathrm{P[N}_3(2) + N_4(2) \geq\ 32] = [N_{3,4}(2) \geq\ 32] = \sum_{j=32}^{\infty} \frac{e^{-30\cdot\ 0,9}\cdot\ (30\cdot\ 0,9)^j}{j!}$ por agregación

También puede quedar expresado como:
$P[N_3(2) + N_4(2) \geq 32] = 1 - P[N_3(2) + N_4(2) \leq 31] = 1 - \sum_{j=0}^{31} \sum_{i=0}^{j} P[N_3(2) = i, N_4(2) = j - i] =$

1 - $\sum_{j=0}^{31} \sum_{i=0}^{j} \frac{e^{-30 \cdot 0,4} \cdot (30 \cdot 0,4)^i}{i!} \cdot \frac{e^{-30 \cdot 0,5} \cdot (30 \cdot 0,5)^{j-i}}{(j-i)!}$

Puntaje:
2 puntos por planteamiento de probabilidad inicial
2 puntos por desarrollo de la probabilidad aplicando propiedades
2 puntos por evaluación de probabilidad en cualquiera de sus formas

c) **(8 puntos)** Considere ahora que la tasa de llegada de los grupos de niños a la casa varía según la siguiente función $\lambda(t) = 2(t+1)(5-t)$ (t en horas), entre las 17:00 (t=0) y las 22:00. Si se sabe que entre las 20:00 y las 21:00 llegaron 30 niños ¿Cuál es el valor esperado del número de niños que visitó dicha casa durante toda la celebración?.

Solución: Sea $M(r, s)$: cantidad de niños que llegan a la casa en el intervalo $[r, s]$

Se pide: $E[M(5)|M(3,4) = 30] = E[M(3)] + 30 + E[M(4,5)]$ por incrementos independientes

Se tiene que: $E[M(r,s)] = E[N(r,s)] \cdot E(X_i)$ y $E[N(r,s)] = m(r,s) = \int_r^s \lambda(t)\, dt = m(s) - m(r)$

Se calcula $E(X_i) = 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 + 5 \cdot p_5 = 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,1 = 3,7$ niños por grupo.

Se calcula $m(r) = \int_0^r \lambda(t) = 2(t+1)(5-t)\, dt = \int_0^r \lambda(t) = \int_0^r 2(5 + 4t - t^2)\, dt = 10r + 2r^2 - \frac{2r^3}{3}$

Se evalúa el valor esperado:
$E[M(3)] + 30 + E[M(4,5)] = 30 + E(X_i) \cdot [E[N(3) + N(4,5)] = 30 + 3,7 \cdot [m(3) + m(5) - m(4)]$
$= 30 + 3,7 \cdot [10 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 - \frac{2 \cdot 3^3}{3} + 10 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 - \frac{2 \cdot 5^3}{3} - 10 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 + \frac{2 \cdot 4^3}{3}] = 30 + 3,7 \cdot [40 + 36 - 58,67] = 94,13$

Puntaje:
2 puntos por planteamiento del valor esperado
3 puntos por cálculo del número esperado de niños por grupo
3 puntos por desarrollo del valor esperado por tramos y resultado final

Problema 3 (25 puntos)

En un paradero de la ciudad los buses pasan de acuerdo a un proceso de Poisson a tasas α y β (buses/hora), para las líneas azul y verde respectivamente. Las personas llegan al paradero de acuerdo a un proceso de Poisson a tasa λ (personas/hora).

A una fracción p de las personas les sirve solo la línea azul, a una fracción q de las personas les sirve solo la línea verde, mientras que a las restantes les sirve cualquiera de las dos líneas de buses ($p + q < 1$).

Suponga que la subida de personas a un bus no toma tiempo y que cada bus tiene la suficiente capacidad para llevar a todas las personas que lo necesiten. Todos los procesos son independientes entre sí.

A usted le interesa contar y registrar el número de personas que hay en el paradero y el número de buses que sale del paradero. Inicia la observación a las 8:00 am cuando no hay personas en el paradero.

a) **(6 puntos)** Determine la probabilidad de que haya n personas en el paradero (sin incluirse usted) cuando pase el primer bus.

Solución: Hay dos tipos de evento:
- llegada de persona $\sim Poisson(\lambda)$
- llegada de bus $\sim Poisson(\alpha + \beta)$

La probabilidad que el próximo evento que ocurra sea del tipo persona es $\frac{tasa-personas}{tasa-total} = \frac{\lambda}{\lambda+\alpha+\beta}$

Para que haya exactamente n personas en el paradero cuando llega el primer bus, los primeros n eventos deben ser del tipo "persona", y el evento n+1 debe ser de tipo "bus".

$= (\frac{\lambda}{\lambda+\alpha+\beta})^n \cdot \frac{\alpha+\beta}{\lambda+\alpha+\beta}$

Otra forma:
Sea W: tiempo que falta para que llegue el próximo bus $\sim exponencial(\alpha + \beta)$ (por agregación)

Se pide $P[N(W) = n]$, es decir, que la cantidad de personas que llega al paradero en el tiempo que llega el primer bus sea n

$P[N(W) = n] = \int_0^\infty P[N(W) = n|W = t] f_W(t) dt = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^n}{n!} \cdot (\alpha + \beta) e^{-(\alpha+\beta)t} \, dt$

$= (\alpha + \beta) \cdot \lambda^n \int_0^\infty \frac{e^{-(\lambda+\alpha+\beta)t} \cdot t^n}{n!} \, dt = \frac{(\alpha+\beta) \cdot \lambda^n}{(\lambda+\alpha+\beta)^{(n+1)}} \int_0^\infty \frac{e^{-(\lambda+\alpha+\beta)t} \cdot (\lambda+\alpha+\beta)^{(n+1)} \cdot t^n}{n!} \, dt$

La expresión dentro de la integral corresponde a la densidad de una distribución gamma de parámetros $n + 1$ y $\lambda + \alpha + \beta$

Puntaje:
2 puntos por planteamiento la probabilidad inicial
4 puntos por el desarrollo de la probabilidad y resultado final

b) **(6 puntos)** A las 8:30 pasa el primer bus y es de la línea verde. ¿cuál es la probabilidad de que se suban 7 personas al bus?

Solución:

Como el paradero a las 8:00 está vacío, para que 7 personas se suban al primer bus, en 30 minutos tienen que haber llegado 7 personas a las que les sirve el bus verde.

A una persona le sirve el bus verde si le sirve sólo el bus verde (fracción q) o le sirve cualquiera de los buses (fracción 1 - p - q). Por tanto, a una fracción q + (1 - p - q) = (1 - p) les sirve el bus verde.

Sea $N_V(t)$: llegada de personas a las que les sirve el bus verde $\sim Poisson(\lambda \cdot\ (1-p))$

Se pide $P[N_V(8:00, 8:30) = 7]$ =P[$N_V(0,5) = 7$] = $\frac{e^{-\lambda \cdot\ (1-p) \cdot\ 0{,}5} \cdot\ (\lambda \cdot 1-p) \cdot\ 0{,}5)^7}{7!}$

Puntaje:
2 puntos por cálculo de fracción de clientes que se sube a bus verde
4 puntos por el desarrollo de la probabilidad y resultado final

c) **(6 puntos)** Si se han subido 7 personas al primer bus (8:30, verde), ¿cuál es la probabilidad de que a lo más una de ellas haya esperado menos de 10 minutos en el paradero?

Solución:

Si una persona ha esperado menos de 10 minutos significa que llegó después de las 8:20. Se pide que a lo más 1 de las 7 personas que se subió al bus (o sea que le sirve la línea verde) haya llegado entre las 8:20 y las 8:30.

Se pide $P[N_V(8:20, 8:30) \leq 1 | N_V(8:00, 8:30) = 7]$ =P[$N_V(\frac{1}{6}) \leq 1 | N_V(\frac{1}{2}) = 7$] =

Por propiedades se sabe que: $N_V(s)|N_V(t) = n$ distribuye binomial $(n, \frac{s}{t})$, con $n = 7, s = \frac{1}{6}, t = \frac{1}{2}$

P[$N_V(\frac{1}{6}) = 0 | N_V(\frac{1}{2}) = 7$] + $P[N_V(\frac{1}{6}) = 1 | N_V(\frac{1}{2}) = 7] = \binom{7}{0}(\frac{1}{3})^0 \cdot (\frac{2}{3})^7 + \binom{7}{1}(\frac{1}{3})^1 \cdot (\frac{2}{3})^6$

También se puede desarrollar como:

$$\mathbb{P}\left[N_V\left(\frac{1}{6}\right) = 0 | N_V\left(\frac{1}{2}\right) = 7\right] + P\left[N_V\left(\frac{1}{6}\right) = 1 | N_V\left(\frac{1}{2}\right) = 7\right] =$$

$$\frac{P\left[N_V\left(\frac{1}{6}\right) = 0, N_V\left(\frac{1}{3}\right) = 7\right] + P\left[N_V\left(\frac{1}{6}\right) = 1, N_V\left(\frac{1}{3}\right) = 6\right]}{P\left[N_V\left(\frac{1}{2}\right) = 7\right]} =$$

Cada probabilidad se desarrolla de la siguiente forma:

$P\left[N_V\left(\frac{1}{6}\right) = 0, N_V\left(\frac{1}{3}\right) = 7\right] = e^{-\lambda_V \cdot\ s} \cdot \frac{e^{-\lambda_V \cdot\ (t-s)} \cdot (\lambda_V (t-s))^7}{7!}$

$P\left[N_V\left(\frac{1}{6}\right) = 1, N_V\left(\frac{1}{3}\right) = 6\right] = e^{-\lambda_V \cdot\ s} \cdot\ (\lambda_V \cdot\ s) \cdot \frac{e^{-\lambda_V \cdot\ (t-s)} \cdot (\lambda_V (t-s))^6}{6!}$

$P\left[N_V\left(\frac{1}{2}\right) = 7\right] = \frac{e^{-\lambda_V \cdot\ t} \cdot (\lambda_V \cdot\ t)^7}{7!}$

donde $t = 1/2, s = 1/6, (t-s) = 1/3, \lambda_V = \lambda(1-p)$

Puntaje:

2 puntos por cálculo de fracción de clientes que se sube a bus verde

4 puntos por el desarrollo de la probabilidad y resultado final

d) **(7 puntos)** A las 14:00 da por concluido su trabajo y decide retornar a su hogar. A usted le sirve cualquiera de las líneas. El tiempo (en horas) que demora en llegar a su casa es una v.a. exponencial de tasa μ_A si se va en un bus de la línea azul y μ_B si se va en un bus de la línea verde. ¿A qué hora usted espera llegar a su casa?

Solución: Sea:

X : tiempo que falta para que llegue el próximo bus azul $\sim exponencial(\alpha)$

Y : tiempo que falta para que llegue el próximo bus verde $\sim exponencial(\beta)$

W : tiempo que falta para que llegue el próximo bus $\sim exponencial(\alpha + \beta)$ (por agregación)

A: tiempo que tarda en llegar a su casa si se va en bus azul $\sim exponencial(\mu_A)$

B: tiempo que tarda en llegar a su casa si se va en bus verde $\sim exponencial(\mu_B)$

Tiempo total = tiempo de espera + tiempo de traslado.

Tiempo de espera = Tiempo que falta para que llegue el próximo bus.

Tiempo de traslado = depende del bus que tome.

$T = W + A \cdot\ P(X < Y) + B \cdot\ P(Y < X)$

$E(T) = E(W) + E(A) \cdot\ P(X < Y) + E(B) \cdot\ P(Y < X)$

$E(W) = \frac{1}{\alpha+\beta}$, $E(A) = \frac{1}{\mu_A}$, $E(B) = \frac{1}{\mu_B}$, $P(X < Y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $P(Y < X) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$

$E(T) = \frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\mu_A} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\mu_B} \cdot \frac{\beta}{\alpha+\beta}$

Obs: $W = min(X, Y)$

Resultado: Usted espera llegar a su casa a las 14:00 + E(T) horas.

Puntaje:

2 puntos por planteamiento inicial del valor esperado

1 punto por cálculo del valor esperado del tiempo de espera

4 puntos por el cálculo del valor esperado del tiempo de traslado y resultado final

Formulario Distribuciones

Distribución	**PDF**	**CDF**	**Esperanza**	**Varianza**
Poisson(λ)	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Binomial(n, p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Uniforme(a, b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Geométrica(p)	$(1-p)^{x-1} p$	$1 - (1-p)^x$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Gamma(k, λ)	$\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$	$\int_0^x \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)}\, dt$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$
Normal(μ, σ^2)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	μ	σ^2