Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesores Maximiliano González, Nicolás Vargas y Andrés Navarro
Segundo Semestre 2025

Interrogación 1

Duración: 2 horas y 30 minutos

Problema 1 (20 puntos)

Responda las siguientes preguntas de manera independiente:

(a) **(4 puntos)** Sean A y B dos eventos independientes, muestre que tanto A y $\bar{B}$ como $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son independientes.

Solución: Para el primer caso

$$\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\bar{B}|A) = \mathbb{P}(A) \cdot (1 - \mathbb{P}(B|A)) = \mathbb{P}(A) \cdot (1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\bar{B})$$

Para el segundo caso

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B}|\bar{A}) = \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot (1 - \mathbb{P}(B|\bar{A})) = \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot (1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B})$$

Distribución de Puntaje:

- **(2 puntos)** Demostrar que A y $\bar{B}$ son independientes.
- **(2 puntos)** Demostrar que $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son independientes.

(b) **(3 puntos)** Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de tasa $\lambda > 0$. Desarrolle una expresión explícita para $\mathbb{E}[X|X \geq 1]$.

Solución: Se tiene

$$\mathbb{E}[X \mid X \geq 1] = \frac{\mathbb{E}\left[X \cdot \mathbf{1}_{\{X \geq 1\}}\right]}{\mathbb{P}(X \geq 1)} = \frac{\mathbb{E}[X]}{1 - \mathbb{P}(X = 0)} = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Por utilizar esperanza condicional.
- **(1 punto)** Por desarrollo del numerador.
- **(1 punto)** Por desarrollo del denominador y resultado final.

(c) **(6 puntos)** Obtenga una expresión explícita para la probabilidad para una carrera de múltiples exponenciales independientes. Es decir, suponga que $T_1, T_2, T_3 \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ con $\lambda_i > 0$ para todo $i = 1, 2, 3$. Calcule la probabilidad de que T_1 sea menor a T_2 y T_3.

Solución: Se busca la probabilidad de que la variable aleatoria T_1 sea la menor, es decir,

$$\mathbb{P}(T_1 < T_2,\ T_1 < T_3) = \mathbb{P}(T_1 < T_2 < T_3) + \mathbb{P}(T_1 < T_3 < T_2).$$

Primero, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 < T_2 < T_3) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(T_1 < T_2 < T_3 \mid T_2 = t)\, f_{T_2}(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(T_1 < t,\ t < T_3)\, f_{T_2}(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(T_1 < t)\, \mathbb{P}(t < T_3)\, f_{T_2}(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right) e^{-\lambda_3 t}\, \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt \\
&= \lambda_2 \int_0^\infty e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t}\, dt \ - \ \lambda_2 \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}\, dt \\
&= \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}.
\end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene que

$$\mathbb{P}(T_1 < T_3 < T_2) = \frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 < T_2,\ T_1 < T_3) &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \\
&= \frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3} - \frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \\
&= 1 - \frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}.
\end{aligned}$$

Distribución de Puntaje:

- **(2 puntos)** Por obtener expresión para $\mathbb{P}(T_1 < T_3 < T_2)$.
- **(2 puntos)** Por obtener expresión para $\mathbb{P}(T_1 < T_2 < T_3)$.
- **(2 puntos)** Por resultado final.

(d) **(7 puntos) [Para el estrellato]** La distribución Geométrica modela el número de experimentos independientes Bernoulli (cada uno con probabilidad de éxito $p \in (0,1)$) requeridos hasta lograr el primer éxito. Por tanto, es una distribución discreta cuya función de densidad de probabilidad es $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$ con $k = \{1, 2, \ldots\}$. Sea $X \sim \text{Geom}(p)$, calcule una expresión explícita para la esperanza de X, dado que X es par.

Hint: *Recuerde que si $k = \{1, 2, \ldots\}$, entonces $2k$ será siempre un número par. Además, las siguientes sumas pueden ser de utilidad (para $|r| < 1$):*

$$\sum_{k\geq 1} r^{k-1} = \frac{1}{1-r}, \quad \sum_{k\geq 1} k r^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

Solución: Se tiene:

$$\mathbb{E}[X \mid X \text{ par}] = \frac{\sum_{k \text{ pares}} k \cdot \mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X \text{ es par})}.$$

Para el denominador tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \text{ es par}) &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2m) = \sum_{m=1}^{\infty} (1-p)^{2m-1} p \\ &= p(1-p) \sum_{m=1}^{\infty} \left((1-p)^2\right)^{m-1}\end{aligned}$$

Haciendo $r = (1-p)^2$:

$$= \frac{p(1-p)}{1-[(1-p)^2]} = \frac{1-p}{2-p}.$$

Luego, para el numerador:

$$\begin{aligned}\sum_{k \text{ par}} k\,\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{m=1}^{\infty} (2m)(1-p)^{2m-1} p \\ &= 2p(1-p) \sum_{m=1}^{\infty} m\left((1-p)^2\right)^{m-1}.\end{aligned}$$

Haciendo $r = (1-p)^2$

$$\sum_{k \text{ par}} k\,\mathbb{P}(X = k) = \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p)^2)^2} = \frac{2(1-p)}{p(2-p)^2}.$$

Finalmente, uniendo los resultados para el numerador y denominador se tiene

$$\mathbb{E}[X \mid X \text{ par}] = \frac{\frac{2(1-p)}{p(2-p)^2}}{\frac{1-p}{2-p}} = \frac{2}{p(2-p)}.$$

Distribución de Puntaje:

- **(2 puntos)** Por aplicar esperanza condicional.
- **(2 puntos)** Por desarrollo del numerador.
- **(2 puntos)** Por desarrollo del denominador.
- **(1 punto)** Por resultado final.

Problema 2 (20 puntos)

Suponga que usted es el encargado de determinar el volumen de abastecimiento de combustible de una bencinera. Con el propósito de estimar la cantidad de combustible que se utiliza en un día cualquiera, usted desea modelar el proceso de llegada de vehículos y compra de combustible en la bencinera.

La llegada de vehículos puede ser modelado como un Proceso de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ con tasa $\lambda > 0$, donde $N(t)$ representa el número de vehículos que han llegado a la bencinera en t horas. A la bencinera llegan 2 tipos de vehículos, autos y camiones. Las probabilidades de que un vehículo que llega a la bencinera sea un auto o un camión son p_A y p_C, respectivamente y con $p_A, p_C \in (0,1)$ y $p_A + p_C = 1$.

Responda las siguientes preguntas, considerando que la bencinera abre a las 6 de la mañana y cierra a las 12 de la noche (18 horas de funcionamiento).

(a) **(6 puntos)** Calcule una expresión para la probabilidad de lleguen exactamente 10 camiones en las primeras 10 horas (6am a 4pm) si en las últimas 10 horas (2pm a 12pm) llegaron exactamente 50 vehículos.

Solución: Sea $\{N_C(t), t \geq 0\}$ el Proceso de Poisson (con tasa λp_C) que representa la cantidad de camiones que han llegado desde las 6 de la mañana hasta el tiempo t.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_C(10) = 10 \mid N(18) - N(8) = 50) &= \frac{\mathbb{P}(N_C(10) = 10,\ N(18) - N(8) = 50)}{\mathbb{P}(N(18) - N(8) = 50)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_C(10) = 10,\ N(18) - N(8) = 50)}{\mathbb{P}(N(10) = 50)} \\
&= \frac{\sum_{i=50}^{\infty} \mathbb{P}(N_C(10) = 10,\ N(10) - N(8) = i,\ N(18) - N(10) = 50 - i)}{\mathbb{P}(N(10) = 50)} \\
&= \frac{\sum_{i=50}^{\infty} \mathbb{P}(N_C(10) = 10,\ N(10) - N(8) = i)\, \mathbb{P}(N(18) - N(10) = 50 - i)}{\mathbb{P}(N(10) = 50)} \\
&= \frac{\sum_{i=50}^{\infty} \mathbb{P}(N_C(10) = 10 |\ N(10) - N(8) = i)\, \mathbb{P}(N(10) - N(8) = i)\, \mathbb{P}(N(18) - N(10) = 50 - i)}{\mathbb{P}(N(10) = 50)} \\
&= \frac{\sum_{i=50}^{\infty} \mathbb{P}(N_C(10) = 10 |\ N(10) - N(8) = i)\, \mathbb{P}(N(2) = i)\, \mathbb{P}(N(8) = 50 - i)}{\mathbb{P}(N(10) = 50)}
\end{aligned}$$

Se resuelve la probabilidad condicional del numerador

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_C(10) = 10 \mid N(10) - N(8) = i) &= \sum_{k=0}^{10} \mathbb{P}(N_C(8) = k, N_C(10) - N_C(8) = 10 - k \mid N(10) - N(8) = i) \\
&= \sum_{k=0}^{10} \mathbb{P}(N_C(8) = k \mid N(10) - N(8) = i) \underbrace{\mathbb{P}(N_C(10) - N_C(8) = 10 - k \mid N(10) - N(8) = i)}_{\sim \text{Bin}(i, p_C)} \\
&= \sum_{k=0}^{10} \mathbb{P}(N_C(8) = k) \binom{i}{10-k} p_C^{10-k} (1 - p_C)^{i-10+k} \\
&= \sum_{k=0}^{10} \frac{e^{-8\lambda}(8\lambda)^k}{k!} \binom{i}{10-k} p_C^{10-k} (1 - p_C)^{i-10+k}
\end{aligned}$$

Así, reemplazando

$$\mathbb{P}(N_C(10) = 10 \mid N(18) - N(8) = 50) = \frac{\sum_{i=50}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{e^{-8\lambda}(8\lambda)^k}{k!} \binom{i}{j-k} p_C^{j-k} (1 - p_C)^{i-j+k} \right) \mathbb{P}(N(2) = i)\, \mathbb{P}(N(8) = 50 - i)}{\mathbb{P}(N(10) = 50)}$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{i=50}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{j}\frac{e^{-8\lambda}(8\lambda)^k}{k!}\binom{i}{j-k}p_C^{j-k}(1-p_C)^{i-j+k}\right)\frac{e^{-2\lambda}(2\lambda)^i}{i!}\frac{e^{-8\lambda}(8\lambda)^{50-i}}{(50-i)!}}{\dfrac{e^{-10\lambda}(10\lambda)^{50}}{50!}}$$

Distribución de Puntaje:

- **(1.5 puntos)** Planteamiento probabilidad inicial.
- **(1.5 puntos)** Aplicar probabilidades totales en el numerador.
- **(1.5 puntos)** Resolución correcta de probabilidad condicional del numerador.
- **(1.5 puntos)** Reemplazo en expresión original y resultado final.

(b) **(5 puntos)** Suponga que la cantidad de combustible Y_i que compra cada vehículo i, independiente de si es un auto o un camión, distribuye Normal(μ, σ^2), con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Considere que el proceso de carga de combustible es independiente del proceso de llegada de vehículos, y que además cada carga se realiza de manera independiente. Desarrolle una expresión para la probabilidad de que en un día se vendan al menos $r \geq 0$ litros de bencina.

Indicación: Deje su respuesta escrita en función de $\Phi(\cdot)$, donde $\Phi(\cdot)$ denota la función de distribución acumulada (CDF) de una variable aleatoria normal estándar $(0, 1)$.

Hint: *Si* $N_i \sim \text{Normal}(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, \ldots, k$ *independientes, entonces* $M_k := \sum_{i=1}^{k} N_i \sim \text{Normal}\left(\sum_{i=1}^{k}\mu_i, \sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2\right)$

Solución: Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ el proceso de conteo que representa la cantidad de combustible que se vende hasta el tiempo t. Así, $X(18)$ representa cantidad de combustible que se vende en un día. Como la cantidad de combustible que se vende en un día corresponde a un proceso poisson compuesto, se tiene que:

$$X(18) = \sum_{i=1}^{N(18)} Y_i$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(X(18) \geq r\big) &= \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}\Big(X(18) \geq r \;\Big|\; N(18) = j\Big)\,\mathbb{P}\big(N(18) = j\big) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{N(18)} Y_i \geq r \;\Big|\; N(18) = j\Big)\,\mathbb{P}\big(N(18) = j\big) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{j} Y_i}_{\sim N(j\mu, \sqrt{j}\sigma)} \geq r\Big)\,\mathbb{P}\big(N(18) = j\big) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\left[1 - \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{j} Y_i \leq r\Big)\right]\,\mathbb{P}\big(N(18) = j\big) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\left[1 - \Phi\left(\frac{r - j\mu}{\sigma\sqrt{j}}\right)\right]\,\mathbb{P}\big(N(18) = j\big) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\left[1 - \Phi\left(\frac{r - j\mu}{\sigma\sqrt{j}}\right)\right]\,\frac{e^{-18\lambda}(18\lambda)^j}{j!}
\end{aligned}$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Identificación y planteamiento inicial de Proceso de Poisson Compuesto.
- **(3 puntos)** Desarrollo de la probabilidad.
- **(1 punto)** Resultado final.

(c) **(3 puntos)** Desarrolle una expresión explícita para el valor esperado de litros de combustible que se vende en un día.

Solución: Lo anterior es simplemente

$$\mathbb{E}[X(18)] = \mathbb{E}[N(18)] \cdot \mathbb{E}[Y] = 18\lambda\,\mu$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Planteamiento del valor esperado.
- **(1 punto)** Desarrollo del valor esperado.
- **(1 punto)** Resultado final.

(d) **(6 puntos)** Revisando datos históricos de la bencinera usted se da cuenta que la tasa a la cual llegan vehículos a la bencinera cambia a lo largo del día, por lo que no corresponde modelar este proceso como uno poisson homogéneo. Utilizando los mismos datos usted determina que la tasa a la cual llegan vehículos es $\lambda(t) = a + b\sin(\omega t)$, con $a \geq |b|$ y $\omega \in \mathbb{R}$. Con esta nueva información, vuelva a desarrollar una expresión para la probabilidad de que en un día se vendan al menos $r \geq 0$ litros de bencina.

Solución: El desarrollo es el mismo que en el inciso (b), la única diferencia es que ahora debemos utilizar la función de probabilidad del proceso poisson no homogeneo para calcular $\mathbb{P}(N(18) = j)$. Esto es:

$$\mathbb{P}(N(18) - N(0) = j) = \mathbb{P}(N(18) = j) = e^{-m(18)}\frac{m(18)^j}{j!}$$

Donde

$$\begin{aligned} m(18) &= \int_0^{18} \lambda(s)ds \\ &= \int_0^{18} a + b\sin(\omega s)ds \\ &= \left(as - \frac{b}{\omega}\cos(\omega s)\right)\Big|_{s=0}^{s=18} \\ &= 18a - \frac{b}{\omega}\cos(18\omega) + \frac{b}{\omega} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(X(18) \geq r\big) &= \sum_{j=0}^{\infty}\left[1 - \Phi\left(\frac{r - j\mu}{\sigma\sqrt{j}}\right)\right] e^{-m(18)}\frac{m(18)^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\left[1 - \Phi\left(\frac{r - j\mu}{\sigma\sqrt{j}}\right)\right] e^{-(18a - \frac{b}{\omega}\cos(18\omega) + \frac{b}{\omega})}\frac{(18a - \frac{b}{\omega}\cos(18\omega) + \frac{b}{\omega})^j}{j!} \end{aligned}$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Planeamiento inicial.
- **(3 puntos)** Cálculo correcto de la tasa acumulada $m(18)$.
- **(1 punto)** Desarrollo de la probabilidad.
- **(1 punto)** Resultado final.

Problema 3 (20 puntos)

Parte 1 (10 puntos)

Suponga un dado cargado que se comporta del siguiente modo: si en el lanzamiento anterior salió el número i (con $i = 1, 2, 3, 4, 5$) es imposible que obtengamos el número $i + 1$ en el lanzamiento actual. Además, cada vez que se lanza el dado existe un 50% de probabilidades de que salga el mismo número que salió en el lanzamiento anterior y un 50% de probabilidades de que salga cualquiera de los otros posibles números (en forma equiprobable). Por último, cuando obtuvimos el número 6 en el lanzamiento anterior, es posible obtener solo tres resultados equiprobables en el lanzamiento actual, pudiendo sacar los números 1, 3 y 6.

A partir de lo anterior, responda:

(a) **(3 puntos)** Argumente por qué la situación anterior se puede modelar como una CMTD.

Solución: Si definimos $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ como el proceso estocástico que representa el número del dado (X_n) que salió en el lanzamiento n, es posible notar que el sistema cumple con la propiedad markoviana (sólo depende el último lanzamiento) y con la propiedad estacionaria (no importa cuantos lanzamientos se han realizado). Considerando esto, la situación se puede modelar como una CMTD. Notar que el conjunto de estados viene dado por $S := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Distribución de Puntaje:

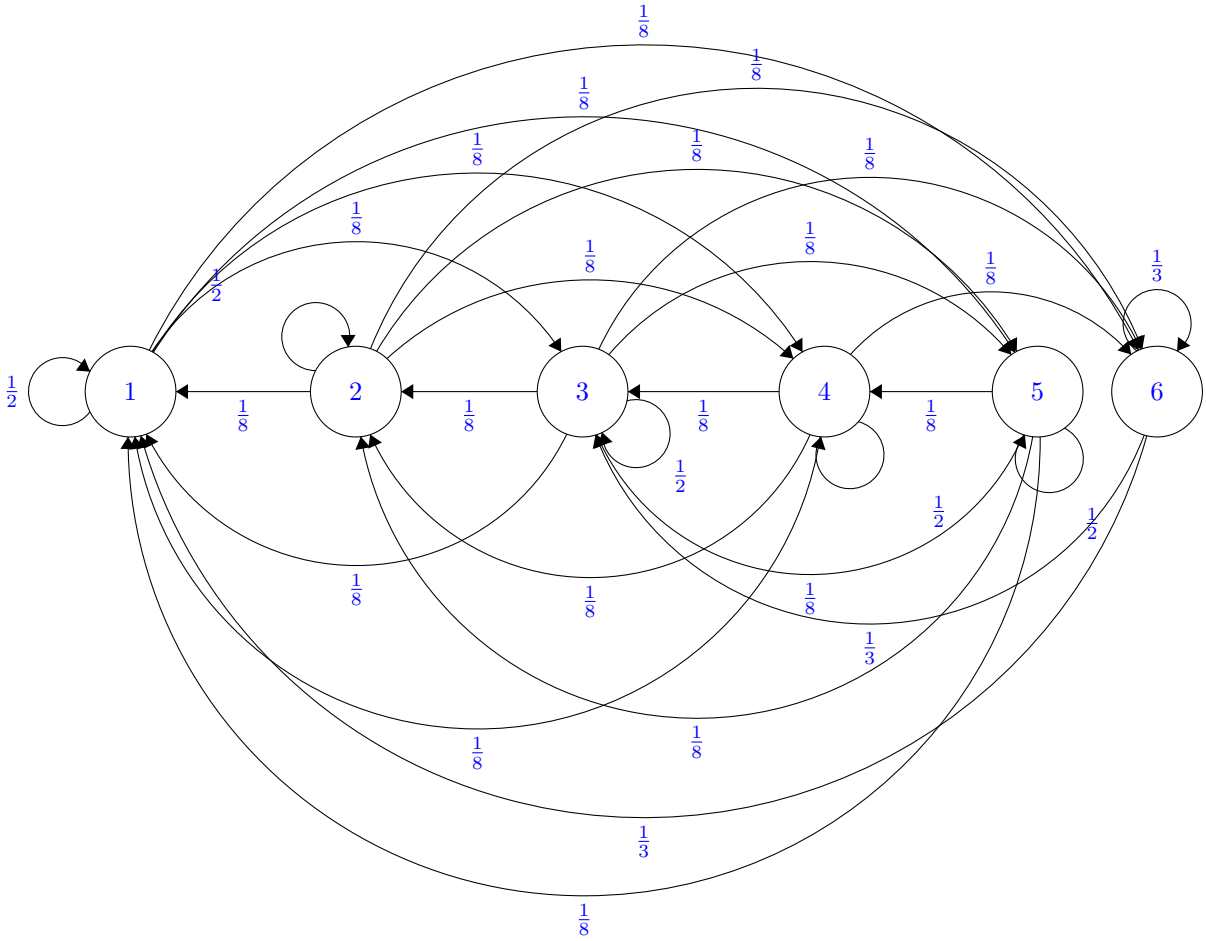
- **(1.5 puntos)** Por explicar propiedad estacionaria.
- **(1.5 puntos)** Por explicar propiedad markoviana.

(b) **(4 puntos)** Construya el diagrama (o la matriz de probabilidades de transición en una etapa) de la CMTD asociada a la situación anterior. Luego, identifique las clases de estados y clasifíquelas como transientes, recurrentes positivas o nulas, indicando además si son aperiódicas o periódicas (y el período, si corresponde).

Solución: Se tiene

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

El diagrama que representa esta CMTD es



La cadena está compuesta por una única clase ($\{1,2,3,4,5,6\}$), la cual es recurrente positiva, y aperiódica.

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Por conjunto de estados.
- **(2 puntos)** Por probabilidades de transición (matriz o diagrama).
- **(1 punto)** Por clasificación correcta.

(c) **(3 puntos)** Determine la probabilidad explícita de que si en cierto lanzamiento salió un 1, en 2 lanzamientos más salga un 3 (no es necesario que sea por primera vez).

Solución: Utilizando la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$P_{ij}^{m+n} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{m}\, P_{kj}^{n}$$

Se tiene

$$P_{1,3}^{(2)} = P_{1,3}^{(1+1)} = \sum_{k=1}^{6} P_{1k}^{1}\, P_{k3}^{1} = \sum_{k=1}^{6} P_{1k}\, P_{k3}$$

Resultando

$$\begin{aligned} P_{1,3}^{(2)} &= P_{11}P_{13} + P_{12}P_{23} + P_{13}P_{33} + P_{14}P_{43} + P_{15}P_{53} + P_{16}P_{63} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cdot 0 + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} \\ &= \frac{19}{96} \approx 0.1979. \end{aligned}$$

Distribución de Puntaje:

- **(1.5 puntos)** Por ecuación de Chapman-Kolmogorov.
- **(1.5 puntos)** Por resultado correcto.

Parte 2 (10 puntos)

Un **Jugador** de *Pokemon GO* está intentando capturar a un *pokemon legendario*. En el juego existen sólo dos zonas: Zona 1 y Zona 2. Tanto el **Jugador** como el **Pokemon** que se está buscando capturar cambian de zona cada hora según las siguientes matrices probabilidades de transición:

$$\textbf{Jugador} = P^{(j)} := \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\textbf{Pokémon} = P^{(p)} := \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

A modo de ejemplo, la componente $P_{12}^{(j)}$ representa la probabilidad de que el **Jugador**, estando en la Zona 1 en una hora determinada, se traslade a la Zona 2 en la hora siguiente.

Al inicio de cada hora, una vez que tanto el **Jugador** como el **Pokémon** han quedado definidos en sus respectivas posiciones (independientemente de si cambiaron de zona o no), si ambos coinciden en la misma zona, existe un 40% de probabilidad de que el **Jugador** capture al **Pokémon**. A partir de lo anterior, responda:

(d) **(10 puntos)** Si el **Jugador** está actualmente en la Zona 1 y el **Pokémon** está en la Zona 2, desarrolle un procedimiento explícito para determinar la cantidad de horas esperadas que pasarán hasta que el jugador logre capturar al **Pokémon**.

Indicación: No es necesario obtener el valor numérico final de la esperanza.

Solución: Para resolver este problema se plantea como una CMTD. Sea $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ el proceso estocástico que representa la situación del **Jugador** con el **Pokemon**, en la hora $n \in \mathbb{N}_0$. Se define $S := \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),C\}$, donde los primeros 4 estados representan la ubicación del **Jugador** y el **Pokemon** cuando este último aún no ha sido capturado, y el quinto estado representa cuando ya el **Pokemon** ya fue capturado.

La matriz de probabilidades de transición se construye de la siguiente manera: Se calculan las probabilidades individuales, donde $r = 2/5$ representa la probabilidad de captura. Por ejemplo, para el caso donde tanto el **Jugador**

como el **Pokemon** están en la zona 1:

$$P_{(1,1)\to C} = r \ = \ \frac{2}{5}.$$

$$P_{(1,1)\to(1,1)} = (1-r)\, P^{(j)}_{1,1}\, P^{(p)}_{1,1} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{40}.$$

$$P_{(1,1)\to(1,2)} = (1-r)\, P^{(j)}_{1,1}\, P^{(p)}_{1,2} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{40}.$$

$$P_{(1,1)\to(2,1)} = (1-r)\, P^{(j)}_{1,2}\, P^{(p)}_{1,1} = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{40}.$$

$$P_{(1,1)\to(2,2)} = (1-r)\, P^{(j)}_{1,2}\, P^{(p)}_{1,2} = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{40}.$$

El resto de probabilidades se obtiene de manera análoga. Así:

$$P = \begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{40} & \frac{3}{40} & \frac{9}{40} & \frac{9}{40} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{20} & \frac{3}{20} & \frac{3}{20} & \frac{3}{20} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ahora, para calcular la cantidad de horas esperadas para capturar al **Pokemon** planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbb{E}[T((1,1),C))] = 1 \ + \ \tfrac{3}{40}\mathbb{E}[T((1,1),C))] \ + \ \tfrac{3}{40}\mathbb{E}[T((1,2),C))] \ + \ \tfrac{9}{40}\mathbb{E}[T((2,1),C))] \ + \ \tfrac{9}{40}\mathbb{E}[T((2,2),C))],$$

$$\mathbb{E}[T((1,2),C))] = 1 \ + \ \tfrac{1}{8}\mathbb{E}[T((1,1),C))] \ + \ \tfrac{1}{8}\mathbb{E}[T((1,2),C))] \ + \ \tfrac{3}{8}\mathbb{E}[T((2,1),C))] \ + \ \tfrac{3}{8}\mathbb{E}[T((2,2),C))],$$

$$\mathbb{E}[T((2,1),C))] = 1 \ + \ \tfrac{1}{4}\mathbb{E}[T((1,1),C))] \ + \ \tfrac{1}{4}\mathbb{E}[T((1,2),C))] \ + \ \tfrac{1}{4}\mathbb{E}[T((2,1),C))] \ + \ \tfrac{1}{4}\mathbb{E}[T((2,2),C))],$$

$$\mathbb{E}[T((2,2),C))] = 1 \ + \ \tfrac{3}{20}\mathbb{E}[T((1,1),C))] \ + \ \tfrac{3}{20}\mathbb{E}[T((1,2),C))] \ + \ \tfrac{3}{20}\mathbb{E}[T((2,1),C))] \ + \ \tfrac{3}{20}\mathbb{E}[T((2,2),C))],$$

Donde definimos $\mathbb{E}[T(i,j)]$ como el tiempo esperado en llegar al estado $j = C$ desde el estado $i \in S$.
Resolviendo el sistema de ecuaciones, y recordando que se inició desde el estado $(1,2)$, la cantidad de horas esperadas hasta que se capture el **Pokemon** es la siguiente:

$$\mathbb{E}[T((1,2),C))] = 6.$$

Distribución de Puntaje:

- **(2 puntos)** Por conjunto de estados.
- **(3 puntos)** Por probabilidades de transición.
- **(5 puntos)** Por procedimiento explícito con valor esperado.

Formulario Distribuciones

Distribución	**PDF**	**CDF**	**Esperanza**	**Varianza**
Poisson(λ)	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Binomial(n, p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Uniforme(a, b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Geométrica(p)	$(1-p)^{x-1} p$	$1 - (1-p)^x$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Gamma(k, λ)	$\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$	$\int_0^x \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)}\, dt$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$
Normal(μ, σ^2)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	μ	σ^2