Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 Modelos Estocásticos
Profesor Maximiliano González R.
Segundo Semestre 2023

Interrogación 2

Problema 1 (20 puntos)

a) **(2 puntos)** En el contexto de Cadenas de Markov en Tiempo Discreto, explique de manera clara y concisa a qué corresponde la ecuación $\pi = \pi \cdot P$ y cuál es su interpretación.

b) Considere la siguiente variante del problema clásico de inventario con política (s, S) discutido en clases.

Suponga una tienda que comercializa un único producto y abre de lunes a viernes. El nivel de inventario se revisa el viernes luego de la hora de cierre y en caso de haber menos de s unidades, se encarga la diferencia para completar S. Estas unidades están disponibles el lunes a primera hora. La cantidad de clientes que llegan una semana cualquiera con intenciones de comprar este producto es una variable aleatoria discreta i.i.d. entre semanas. Sea α_k la probabilidad que lleguen k clientes. La probabilidad que lleguen más de S clientes es nula y si un cliente llega a la tienda y no hay producto esa venta se pierde, en caso contrario, con certeza, compra una unidad.

i) **(4 puntos)** Modele el número de unidades en inventario **al final de la semana** como una Cadena de Markov en Tiempo Discreto. Especifique claramente los estados y las probabilidades de transición.

ii) **(2 puntos)** Justifique por qué la cadena del punto anterior admite probabilidades estacionarias. Expliqué qué condiciones deberían cumplirse para que esto suceda.

Asumiendo conocido el vector π:

iii) **(4 puntos)** Entregue una expresión para el número esperado de ventas en una semana en el largo plazo.

iv) **(4 puntos)** Entregue una expresión para el número esperado de ventas perdidas en una semana en el largo plazo.

v) **(4 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de realizar un pedido para reponer stock en una semana cualquiera en el largo plazo?

Problema 2 (20 puntos)

Considere el siguiente experimento. Usted lanza una moneda desbalanceada (P(cara)=p) múltiples veces de forma independiente y desea encontrar el valor esperado del número de lanzamientos requeridos para obtener el patrón de resultados Cara-Sello-Sello-Cara (CSSC). Teniendo este objetivo en cuenta:

a) **(5 puntos)** Modele el problema como una CMTD: indique los estados, las probabilidades de transición y clasifique los estados de la cadena.

b) **(5 puntos)** Suponga que $p = 0.6$. Obtenga el valor esperado del número de lanzamientos requeridos para obtener el patrón de resultados CSSC.

c) **(5 puntos)** Suponga que $p = 0.6$. Calcule la probabilidad de obtener el patrón CSSC por primera vez al 5to lanzamiento.

d) **(5 puntos)** ¿Qué condición debiese cumplir p para que la probabilidad de obtener el patrón CSSC por primera vez al 5to lanzamiento se maximice?¿Cuánto vale dicha probabilidad máxima?

Problema 3 (20 puntos)

En un laboratorio existe un sofisticado equipo electrónico con 2 componentes, que llamaremos A y B, y que pueden estar encendidas (ON) o apagadas (OFF). Para que este equipo funcione correctamente es necesario que una y solo una de las componentes se encuentre encendida (si se encienden ambas se produce un alza de voltaje que destruye el equipo, mientras que si ambas están apagadas el sistema suspende sus actividades). El comportamiento de encendido y apagado es aleatorio e independiente para ambas componentes, pudiendo cambiar al comienzo de cada día. Las probabilidades de transición entre estos estados para ambas componentes se muestran a continuación:

Componente A

	ON	OFF
ON	0.4	0.6
OFF	0.6	0.4

Componente B

	ON	OFF
ON	0.3	0.7
OFF	0.7	0.3

a) **(4 puntos)** Modele el estado del equipo como una Cadena de Markov en tiempo discreto. Determine si existen probabilidades estacionarias y escriba la matriz de probabilidades de transición.

b) **(4 puntos)** Si la componente A está actualmente en ON y la componente B en OFF, ¿Cuál será la duración esperada del equipo antes de fallar?

Suponga ahora que cada vez que el equipo deja de funcionar porque ambas componentes se encuentran encendidas se incurre en un costo de $\$C$ porque hay que realizar reparaciones mayores producto del alza de voltaje. Estas reparaciones demoran exactamente dos días (el día en que falla y uno adicional), luego de los cuales la máquina comenzará a operar con la componente A en ON y la B en OFF. Sin embargo, si el equipo ha dejado de funcionar porque ambas componentes están en OFF el encargado del laboratorio al inicio del día siguiente interviene y pone en ON a la componente A, incurriendo en un costo $\$k$ con $k < C$ asociados a no tener el equipo funcionando un día.

c) **(4 puntos)** Modele la nueva situación como una cadena de Markov en tiempo discreto. Identifique y describa los estados. Luego determine las probabilidades de transición.

d) **(4 puntos)** ¿Cuál es la fracción del tiempo en el largo plazo que la máquina no estará operativa?

e) **(4 puntos)** ¿Cuál es el costo promedio diario en el largo plazo de mantener el equipo operando?

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesor Maximiliano González
Segundo Semestre 2023

Pauta I2

Problema 1

a) La ecuación $\pi = \pi \cdot P$ expresa que el vector de probabilidad estacionaria π es igual al producto de π por la matriz de transición P. Esto significa que cuando la cadena de Markov alcanza un estado de equilibrio a largo plazo, las probabilidades de estar en cada estado no cambian con el tiempo.

b) i) Los estados para este problema es:

$$\Omega = \{0, 1, 2, ..., s, ..., S\}$$

El modelo para este problema de inventario es el siguiente:

- X_n : Representa el inventario al final de la semana n
- D_n : Representa la demanda de la semana n

$$X_{n+1} = \begin{cases} max(X_n - D_{n+1}, 0) & \text{si } X_n \geq s \\ max(S - D_{n+1}, 0) & \text{si } X_n < s \end{cases}$$

Las probabilidades de transición están dado de la siguiente manera:

$$P_{ij} = \begin{cases} \alpha_{S-j} & \text{si } s < i \\ 0 & \text{si } i \geq s \text{ y } j > i \\ \alpha_{i-j} & \text{si } i \geq s \text{ y } 1 \leq j \leq i \\ \sum_{k=i}^{S} \alpha_k & \text{si } i \geq s \text{ y } j = 0 \end{cases}$$

ii) Para este problema existe distribución estacionaria siempre y cuando $\alpha_k > 0$ ya que:

- La cadena tiene un número finito de estados
- La cadena es irreductible (una sola clase recurrente)
- La cadena es aperiódica (al menos un loop en el mismo estado)

Debe ser $\alpha_k > 0$ debido a que si se tiene $(s, S) = (2, 6)$ y $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_k = 0$ para todo k la cadena será periódica

iii) Si el inventario fue i y en la semana siguiente llegan k clientes, se vende k si $i < s$, o se vende $min\{i, k\}$ si $i \geq s$

$$E[ventas] = \sum_{k=0}^{S} \alpha_k \left[\sum_{j=0}^{s-1} \pi_i \cdot k + \sum_{i=s}^{S} \pi_i \cdot min\{i, k\} \right]$$

iv) Si inventario fue i y en la semana siguiente llegan k clientes, se pierden $k - j$ ventas si $i \leq s$ y $k > j$. En cualquier otro caso, no se pierden.

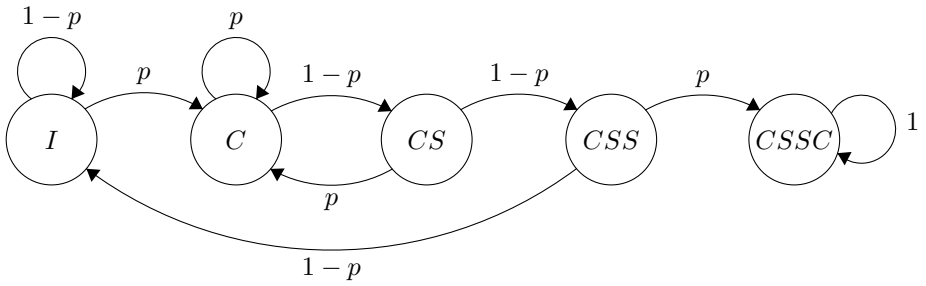
$$E[ventaperdida] = \sum_{j=s}^{S-1} \sum_{k=i+1}^{S} \alpha_k \pi_i (k - i)$$

v) Para reponer el inventario basta que hayan menos de s productos, por lo que la probabilidad es de:

$$\sum_{i=0}^{s-1} \pi_i$$

Problema 2

a) Consideramos la cadena con estados $S = \{I, C, CS, CSS, CSSC\}$ y probabilidades de transición dadas por la matriz P.
Se considera el nodo de inicio auxiliar I para comenzar la cadena. Si se obtiene C, se avanza al siguiente estado y si no, se permanece en el nodo de inicio. Una vez en el nodo C, si nuevamente sale C, se permanece en el nodo, y si no, se avanza al nodo CS. Si se obtiene S en el nodo CS, se avanza al nodo CSS, y si no, se vuelve al nodo C. Finalmente, si se obtiene C en el nodo CSS, se avanza al nodo $CSSC$ quedándose en el nodo con probabilidad 1, y si no, se vuelve al nodo I.
En el siguiente grafo se puede visualizae la cadena de Markov con sus respectivas probabilidades de transición:



Clases:

- Conjunto de estados $\{I, C, CS, CSS\}$ es transiente aperiódico.
- $\{CSSC\}$ es recurrente positivo aperiódico.

b) Se nos pide $E[T(I, CSSC)]$

Sabemos que $E[T(i,j)] = 1 + \sum_{l \neq j} P_{il} E[T(l,j)]$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
A := E[T(I,CSSC)] &= 1 + P_{I,I}E[T(I,CSSC)] + P_{I,C}E[T(C,CSSC)] \\
&= 1 + 0.4E[T(I,CSSC)] + 0.6E[T(C,CSSC)] \\
B := E[T(C,CSSC)] &= 1 + P_{C,C}E[T(C,CSSC)] + P_{C,CS}E[T(CS,CSSC)] \\
&= 1 + 0.6E[T(C,CSSC)] + 0.4E[T(CS,CSSC)] \\
C := E[T(CS,CSSC)] &= 1 + P_{CS,C}E[T(C,CSSC)] + P_{CS,CSS}E[T(CSS,CSSC)] \\
&= 1 + 0.6E[T(C,CSSC)] + 0.4E[T(CSS,CSSC)] \\
D := E[T(CSS,CSSC)] &= 1 + P_{CSS,I}E[T(I,CSSC)] \\
&= 1 + 0.4E[T(I,CSSC)]
\end{aligned}$$

Nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A = 1 + 0.4A + 0.6B \tag{1}$$
$$B = 1 + 0.6B + 0.4C \tag{2}$$
$$C = 1 + 0.6B + 0.4D \tag{3}$$
$$D = 1 + 0.4A \tag{4}$$

Con (1) y (4) podemos determinar que $D = \frac{5}{3} + \frac{2}{5}B$.
Reemplazamos en (3) obteniendo que $C = \frac{5}{3} + \frac{19}{25}B$.
Finalmente reemplazamos en (2) obteniendo que $B = \frac{625}{36} \approx 17.3611$.

Por lo tanto, $A = E[T(I,CSSC)] \approx 19.0278$.

c) Queremos calcular $F_5(I, CSSC)$, es decir, la probabilidad de que la cadena pase por el estado $CSSC$ por primera vez en el quinto paso, dado que partió en I.
Al observar los nodos de la cadena, podemos ver que la única forma de llegar a $CSSC$ en el quinto paso es:

- $I \to I \to C \to CS \to CSS \to CSSC$
- $I \to C \to C \to CS \to CSS \to CSSC$

Luego:

- P1 $= P_{I,I}P_{I,C}P_{C,CS}P_{CS,CSS}P_{CSS,CSSC} = 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = \frac{72}{3125} \approx 0.023$
- P2 $= P_{I,C}P_{C,C}P_{C,CS}P_{CS,CSS}P_{CSS,CSSC} = 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = \frac{108}{3125} \approx 0.035$

Por lo tanto, $F_5(I, CSSC) = P1 + P2 = \frac{180}{3125} \approx 0.058$.

d) Para esto calcularemos $F_5(I, CSSC)$ en función de p.

- $$\begin{aligned} P1 = (1-p)p(1-p)(1-p)p &= (p-p^2)(1-2p+p^2)p \\ &= p^2 - 3p^3 + 3p^4 - p^5 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} P2 = p \cdot p(1-p)(1-p)p &= p^2(1-2p+p^2)p \\ &= p^3 - 2p^4 + p^5 \end{aligned}$$

Luego, $F_5(I, CSSC) = P1 + P2 = p^2 - 2p^3 + p^4$.
Las condiciones de p para que $F_5(I, CSSC)$ se maximice:

$$\frac{d}{dp}F_5(I, CSSC) = 2p - 6p^2 + 4p^3 = 0$$

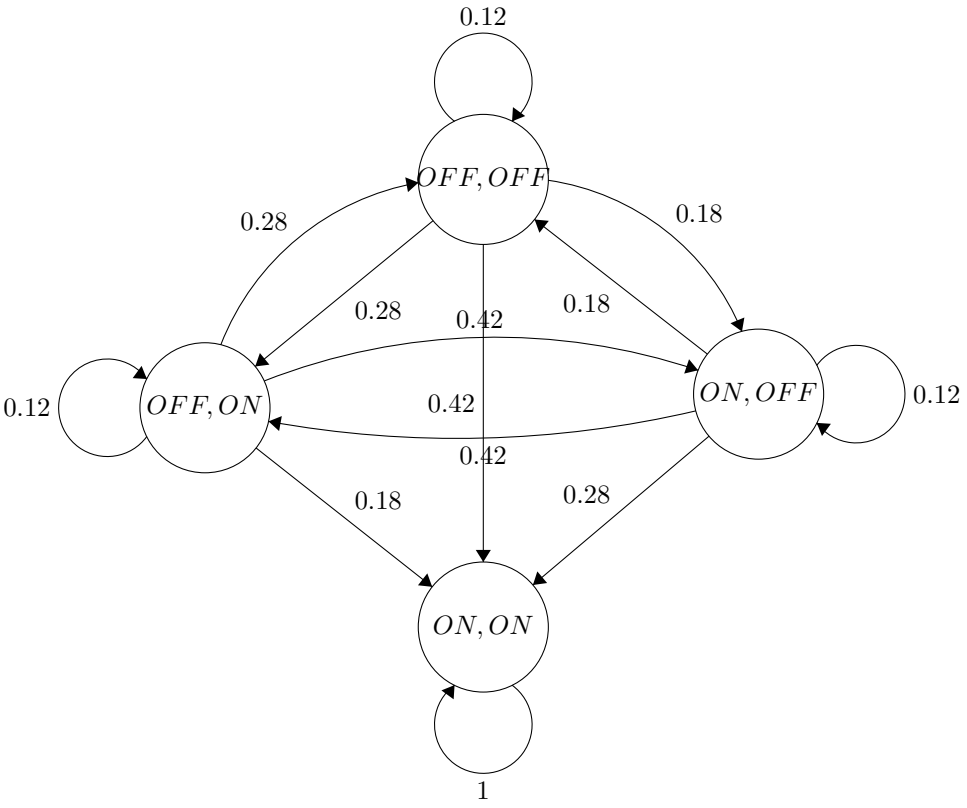
Luego determinamos el valor de p:

$$\begin{aligned} 2p - 6p^2 + 4p^3 &= 0 \\ 2p(1 - 3p + 2p^2) &= 0 \\ 2p(1-p)(1-2p) &= 0 \\ p = 0 \vee p = 1 \vee p &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Evaluamos en cada valor y nos damos cuenta que $p = \frac{1}{2}$ maximiza $F_5(I, CSSC)$.
Luego $F_5(I, CSSC) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} \approx 0.1875$.

Problema 3

a) Para esta cadena de Markov en tiempo discreto tiene dos parte que le vamos a llamar $X = (A, B)$, donde en A representa si está en ON u OFF, de la misma manera para B. El modelo representado en grafos es el siguiente:



Los estados que se representan en este modelo son:

$$\Omega = \{(ON, ON), (ON, OFF), (OFF, ON), (OFF, OFF)\}$$

La matriz de transición es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} Estados & (ON,ON) & (ON,OFF) & (OFF,ON) & (OFF,OFF) \\ (ON,ON) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (ON,OFF) & 0.4 \cdot 0.7 & 0.4 \cdot 0.3 & 0.6 \cdot 0.7 & 0.6 \cdot 0.3 \\ (OFF,ON) & 0.6 \cdot 0.3 & 0.6 \cdot 0.7 & 0.4 \cdot 0.3 & 0.4 \cdot 0.7 \\ (OFF,OFF) & 0.6 \cdot 0.7 & 0.3 \cdot 0.6 & 0.4 \cdot 0.7 & 0.3 \cdot 0.4 \end{pmatrix}$$

Finalmente, queda como:

$$\begin{pmatrix} Estados & (ON,ON) & (ON,OFF) & (OFF,ON) & (OFF,OFF) \\ (ON,ON) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (ON,OFF) & 0.28 & 0.12 & 0.42 & 0.18 \\ (OFF,ON) & 0.18 & 0.42 & 0.12 & 0.28 \\ (OFF,OFF) & 0.42 & 0.18 & 0.28 & 0.12 \end{pmatrix}$$

Como hay una clase recurrente aperiódica (ON, ON) y una clase transiente $(ON, OFF), (OFF, ON)$,(OFF, OFF) existe una única distribución estacionaria.

b) Para calcular la duración esperada se ocupará $E[T((ON, OFF), (ON, ON))]$

Para simplificar la notación del desarrollo,llamaremos los estados de la siguiente manera:

- (ON,ON) = 1
- (OFF,ON) = 2
- (ON,OFF) = 3
- (OFF,OFF) = 4

Sabemos que $E[T(i,j)] = 1 + \sum_{l \neq j} P_{il} E[T(l,j)]$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} E(T((ON,OFF),(ON,ON))) &= E(T(3,1)) \\ &= 1 + P_{33}E(T(3,1)) + P_{34}\underbrace{E(T(4,1))}_{i} + P_{32}\underbrace{E(T(2,1))}_{ii} \end{aligned}$$

$$0.88E(T(3,1)) = 1 + 0.18\underbrace{E(T(4,1))}_{i} + 0.42\underbrace{E(T(2,1))}_{ii}$$

$$\begin{aligned} \textbf{i)} E(T(4,1)) &= 1 + P_{44}E(T(4,1)) + P_{43}E(T(3,1)) + P_{42}E(T(2,1)) \\ 0.88E(T(4,1)) &= 1 + 0.18E(T(3,1)) + 0.28E(T(2,1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{ii)} E(T(2,1)) &= 1 + P_{22}E(T(2,1)) + P_{23}E(T(3,1)) + P_{24}E(T(4,1)) \\ 0.88E(T(2,1)) &= 1 + 0.42E(T(3,1)) + 0.28E(T(4,1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.88E(T(3,1)) &= 1 + 0.18E(T(4,1)) + 0.42E(T(2,1)) \\ 0.88E(T(4,1)) &= 1 + 0.18E(T(3,1)) + 0.28E(T(2,1)) \\ 0.88E(T(2,1)) &= 1 + 0.42E(T(3,1)) + 0.28E(T(4,1)) \end{aligned}$$

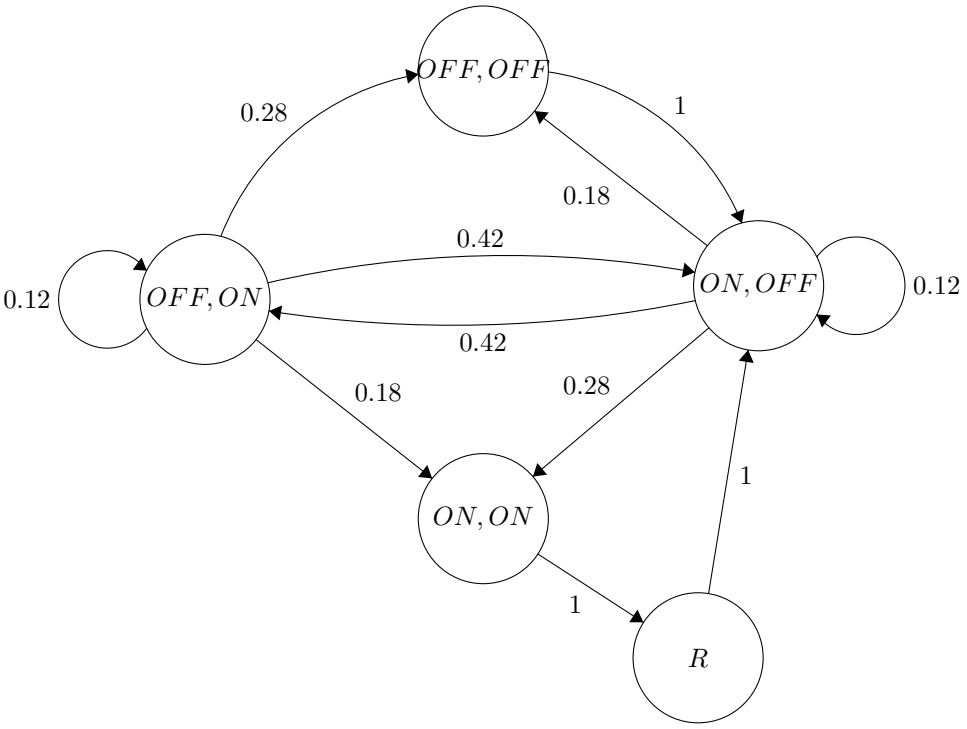
Al resolver el sistema de ecuaciones para $E(T(3,1))$, $E(T(4,1))$ y $E(T(2,1))$, los valores son los siguientes:

$$\begin{aligned} E(T(3,1) &= 3.60 \\ E(T(4,1)) &= 3.10 \\ E(T(2,1)) &= 3.84 \end{aligned}$$

Por lo tanto el tiempo esperado hasta falle es:

$$E(T(3,1)) = E(T((ON,OFF),(ON,ON))) = 3.60$$

c) Para esta situación la cadena de Markov en tiempo discreto se representa de la siguiente manera:



Se agrega un nuevo estado llamado R. Como se menciona en el enunciado, cuando falla el dispositivo durante todo ese día estará destruido y el día siguiente se repara, lo cual se representa con una R.

La matriz de transición para esta situación es:

$$\begin{pmatrix} Estados & (ON,ON) & (ON,OFF) & (OFF,ON) & (OFF,OFF) & R \\ (ON,ON) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (ON,OFF) & 0.28 & 0.12 & 0.42 & 0.18 & 0 \\ (OFF,ON) & 0.18 & 0.42 & 0.12 & 0.28 & 0 \\ (OFF,OFF) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ R & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) En esta nueva situación exististe distribución estacionaria debido a que:

- La cadena tiene un número finito de estados
- La cadena es irreductible (una sola clase recurrente)
- La cadena es aperiódica (al menos un loop en el mismo estado)

Entonces se puede puede sacar la proporción de tiempo que pertenecería cada estado en largo plazo. Ocupamos la misma notación que la primera parte para simplificar el desarrollo.

- (ON,ON) = 1
- (OFF,ON) = 2
- (ON,OFF) = 3
- (OFF,OFF) = 4
- (R) = 5

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0.18\pi_2 + 0.28\pi_3 \\ \pi_2 &= 0.12\pi_2 + 0.42\pi_3 \\ \pi_3 &= 0.42\pi_2 + 0.12\pi_3 + \pi_4 + \pi_5 \\ \pi_4 &= 0.28\pi_2 + 0.18\pi_3 \\ \pi_5 &= \pi_1 \end{aligned}$$

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene los siguientes proporciones de tiempo en el largo plazo:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \pi_{(ON,ON)} = 0.145 \\
\pi_2 &= \pi_{(OFF,ON)} = 0.189 \\
\pi_3 &= \pi_{(ON,OFF)} = 0.396 \\
\pi_4 &= \pi_{(OFF,OFF)} = 0.124 \\
\pi_5 &= \pi_R = 0.145
\end{aligned}$$

Los estados en que la máquina no se encuentre operativa será en (ON, ON), (OFF, OFF) y R lo que basta sumar sus tiempos para determinar aquella fracción de tiempo:

$$\pi_{(ON,ON)} + \pi_{(OFF,OFF)} + \pi_R = 0.145 + 0.124 + 0.145 = 0.414$$

e) Ocupando las distribuciones estacionarias del inciso anterior.Sabemos que para mantener el equipo operando se tiene que realizar un costo de $C\$$ para dos días si el equipo falla, y si se apaga el equipo el costo es de $k\$$.

$$\begin{aligned}
E[costo] &= \pi_{(ON,ON)} \cdot C\left[\frac{\$}{dia}\right] \cdot 1[dias] + \pi_{(OFF,OFF)} \cdot k[\frac{\$}{dia}] \cdot 1[dia] \\
E[costo] &= 0.145 \cdot C\$ + 0.124 \cdot k\$ \\
E[costo] &= 0.145C\$ + 0.124k\$
\end{aligned}$$

El costo promedio diario para mantener la máquina en funcionamiento en el largo plazo es $0.145C\$ + 0.154k\$$