Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesores Maximiliano González, Nicolás Vargas y Andrés Navarro
Segundo Semestre 2025

Examen

Duración: 2 horas y 30 minutos

Resuelva 4 de las siguientes 6 preguntas. Escriba *en la primera página de su desarrollo (la hoja que usted escribe y escanea)* la frase:

"Respondí las preguntas . . . "

En caso de no descartar explícitamente dos preguntas, **no se contarán los dos problemas con mayor puntaje obtenido para el cálculo final de la nota**.

Problema 1 (15 puntos): Probabilidades

(a) **(4 puntos)** Sea $n \in \{2, 3, \dots\}$, y sean $T_1, \dots, T_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cada una con distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$, es decir, $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Demuestre que

$$\mathbb{P}\big(T_1 > \min\{T_2, \dots, T_n\}\big) = \frac{n-1}{n}.$$

Solución: Procedemos calculando el complemento de la probabilidad anterior. Definamos el mínimo de todos los tiempos:

$$S := \min\{T_1, \dots, T_n\}.$$

Primero, calculemos la distribución de S. Para $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(S > t) = \mathbb{P}(T_1 > t, \dots, T_n > t).$$

Como las variables son independientes e idénticamente distribuidas,

$$\mathbb{P}(S > t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i > t) = \left(e^{-\lambda t}\right)^n = e^{-n\lambda t}.$$

Por lo tanto, S es exponencial con parámetro $n\lambda$:

$$S \sim \text{Exp}(n\lambda).$$

Ahora usamos la idea de la "carrera de exponenciales", podemos pensar que cada T_i es el tiempo de llegada del primer "evento" de un Proceso de Poisson independiente de tasa λ. Entonces, el mínimo S es el tiempo del *primer* evento entre los n procesos, y su tasa total es $\lambda + \cdots + \lambda = n\lambda$.

La probabilidad de que ese primer evento provenga específicamente del proceso 1 (es decir, de T_1) es la tasa de ese proceso dividida por la suma de todas las tasas:

$$\mathbb{P}\big(T_1 = S\big) = \frac{\lambda}{\lambda + \cdots + \lambda} = \frac{\lambda}{n\lambda} = \frac{1}{n}.$$

Como el evento $\{T_1 \leq \min\{T_2, \ldots, T_n\}\}$ es exactamente el evento "el mínimo lo alcanza T_1", es decir $\{T_1 = S\}$, concluimos que

$$\mathbb{P}\big(T_1 \leq \min\{T_2, \ldots, T_n\}\big) = \frac{1}{n}.$$

Aplicando la ley del complemento, se tiene,

$$\mathbb{P}\big(T_1 > \min\{T_2, \ldots, T_n\}\big) = 1 - \mathbb{P}\big(T_1 \leq \min\{T_2, \ldots, T_n\}\big) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

Distribución de Puntaje:

- **(2 puntos)** Determinar correctamente la distribución del mínimo $S = \min\{T_1, \ldots, T_n\}$, mostrando que $S \sim \text{Exp}(n\lambda)$.
- **(1 punto)** Argumentar adecuadamente (vía interpretación como "carrera de exponenciales" o Procesos de Poisson) que la probabilidad de que el mínimo lo alcance T_1 es $\lambda/(n\lambda)$.
- **(1 punto)** Concluir explícitamente que $\mathbb{P}\big(T_1 > \min\{T_2, \ldots, T_n\}\big) = (n-1)/n$ utilizando ley del complemento.

En la consulta del psiquiatra Dr. Bayes, de la clínica *Kolmogorov & Asociados*, se agendan sesiones en dos bloques horarios: mañana y tarde. Cada día se realizan 10 sesiones en total, de las cuales 4 corresponden al bloque de la mañana y 6 al bloque de la tarde. A partir de datos históricos, se sabe que los pacientes con hora en la mañana asisten con probabilidad 0.95, mientras que quienes tienen hora en la tarde lo hacen con probabilidad 0.90. Se asume que los pacientes no tienen preferencia por un bloque u otro y que las asistencias son independientes entre sí.

(b) **(3 puntos)** Se selecciona al azar uno de los 10 pacientes agendados para ese día. Determine la probabilidad de que dicho paciente asista a su sesión.

Solución: Sean

- M: "el paciente tenía bloque en la mañana",
- T: "el paciente tenía bloque en la tarde",
- A: "el paciente asistió a su sesión",
- NA: "el paciente no asistió a su sesión".

La probabilidad de que el paciente tenga una hora en la mañana es

$$\mathbb{P}(M) = \frac{4}{10} = 0.4,$$

y la probabilidad de que su hora sea en la tarde es

$$\mathbb{P}(T) = \frac{6}{10} = 0.6.$$

Dado el enunciado

$$\mathbb{P}(A \mid M) = 0.95, \qquad \mathbb{P}(A \mid T) = 0.90.$$

Aplicando la ley de probabilidad total

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(M)\,\mathbb{P}(A \mid M) + \mathbb{P}(T)\,\mathbb{P}(A \mid T)\\ &= 0.4 \cdot 0.95 + 0.6 \cdot 0.90\\ &= 0.38 + 0.54\\ &= 0.92.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(A) = 0.92.$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Identificar correctamente las probabilidades de tener hora en la mañana y en la tarde: $\mathbb{P}(M) = 4/10$, $\mathbb{P}(T) = 6/10$.
- **(1 punto)** Utilizar adecuadamente las probabilidades condicionales de asistencia $\mathbb{P}(A \mid M) = 0.95$ y $\mathbb{P}(A \mid T) = 0.90$.
- **(1 punto)** Plantear correctamente la expresión mediante la ley de probabilidad total para $\mathbb{P}(A)$ y obtener valor numérico $\mathbb{P}(A) = 0.92$.

(c) **(4 puntos)** Se sabe que ayer hubo exactamente un paciente que no asistió a su hora, pero no se recuerda si estaba agendado en la mañana o en la tarde. Un compañero afirma que "lo más probable es que ese paciente tuviera una hora en la mañana". ¿Es correcta esta afirmación? Justifique rigurosamente su respuesta calculando las probabilidades de que el ausente haya sido de mañana o de tarde. Suponga que todos los cupos estaban efectivamente agendados.

Solución: Primero calculamos la probabilidad total de inasistencia:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(NA) &= \mathbb{P}(M)\,\mathbb{P}(NA \mid M) + \mathbb{P}(T)\,\mathbb{P}(NA \mid T)\\ &= 0.4 \cdot 0.05 + 0.6 \cdot 0.10\\ &= 0.02 + 0.06\\ &= 0.08.\end{aligned}$$

Ahora buscamos la probabilidad de que el paciente estuviera en la mañana dado que no asistió:

$$\mathbb{P}(M \mid NA) = \frac{\mathbb{P}(M)\,\mathbb{P}(NA \mid M)}{\mathbb{P}(NA)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.08} = \frac{0.02}{0.08} = 0.25.$$

Análogamente,

$$\mathbb{P}(T \mid NA) = 1 - \mathbb{P}(M \mid NA) = 0.75.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(M \mid NA) = 0.25,$$

lo que muestra que es más probable que la hora hubiese sido en la tarde.

El compañero no está en lo correcto. Lo más probable es que la persona tuviera una hora durante la tarde.

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Calcular correctamente $\mathbb{P}(NA)$ usando la ley de probabilidad total.
- **(1 punto)** Aplicar correctamente la fórmula de Bayes para obtener $\mathbb{P}(M \mid NA)$.

- **(1 punto)** Determinar y comparar $\mathbb{P}(T \mid NA)$ con $\mathbb{P}(M \mid NA)$ (explícitamente o vía complemento).
- **(1 punto)** Concluir explícitamente si la afirmación del compañero es correcta o no, justificando con las probabilidades obtenidas.

(d) **(4 puntos)** Ayer usted tuvo atenciones en dos bloques: en la mañana había siempre 4 pacientes agendados y, en la tarde, no recuerda si había 5 o 6 pacientes agendados; ambas opciones son igualmente probables. Calcule la probabilidad de que, en total, al menos una persona no haya asistido a su sesión durante el día de ayer.

Solución: Sea NA el evento "al menos un paciente no asistió". Durante la mañana siempre hubo 4 pacientes, cada uno con probabilidad de asistencia 0.95. En la tarde, en cambio, pudo haber 5 o 6 pacientes con igual probabilidad 1/2, y cada uno asiste con probabilidad 0.90.

Si en la tarde hubo 5 pacientes (T_5), el total del día fue de 9 pacientes. La probabilidad de que todos hayan asistido es

$$\mathbb{P}(\text{todos asisten} \mid T_5) = 0.95^4\, 0.90^5,$$

por lo que

$$\mathbb{P}(NA \mid T_5) = 1 - 0.95^4\, 0.90^5.$$

Si en la tarde hubo 6 pacientes (T_6), el total fue de 10 pacientes. En este caso,

$$\mathbb{P}(\text{todos asisten} \mid T_6) = 0.95^4\, 0.90^6,$$

y por tanto,

$$\mathbb{P}(NA \mid T_6) = 1 - 0.95^4\, 0.90^6.$$

Aplicando la ley de probabilidad total:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(NA) &= \frac{1}{2}\left(1 - 0.95^4 0.90^5\right) + \frac{1}{2}\left(1 - 0.95^4 0.90^6\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\, 0.95^4 \left(0.90^5 + 0.90^6\right) \\ &\approx 0.543.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que al menos una persona no haya asistido es

$$\mathbb{P}(NA) \approx 0.543.$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Distinguir correctamente los dos escenarios de la tarde (T_5 y T_6) y asignarles probabilidad 1/2 a cada uno.
- **(1 punto)** Plantear correctamente las probabilidades de "todos asisten" en cada caso: $0.95^4 0.90^5$ y $0.95^4 0.90^6$.
- **(2 puntos)** Usar la ley de probabilidad total para obtener una expresión correcta para $\mathbb{P}(NA)$ (por ejemplo $1 - \frac{1}{2} 0.95^4 (0.90^5 + 0.90^6)$) y entregar el valor numérico aproximado, indicando claramente que corresponde a la probabilidad de "al menos una inasistencia".

Problema 2 (15 puntos): Proceso de Poisson

Considere la llegada de pedidos en la aplicación de *delivery MarkovEats*, modelada como un Proceso de Poisson con tasa $\lambda > 0$ pedidos/minuto. Cada pedido permanece en el sistema un tiempo aleatorio $T > 0$ con función de densidad de probabilidad (PDF) $f(t)$, $t > 0$. Diremos que un pedido se encuentra activo en el instante t si aún permanece en el sistema en ese momento.

(a) **(3 puntos)** Obtenga una expresión explícita para la probabilidad de que entre los minutos 3 y 17 se hayan registrado exactamente 15 pedidos, sabiendo que entre los minutos 6 y 12 se registraron al menos 10 pedidos.

Solución: Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ la cantidad de pedidos que han llegado hasta el minuto t. Se solicita

$$\mathbb{P}(N(17) - N(3) = 15 | N(12) - N(6) \geq 10)$$

Se procede con Teorema de Bayes,

$$\mathbb{P}(N(17) - N(3) = 15 | N(12) - N(6) \geq 10) = \frac{\mathbb{P}(N(12) - N(6) \geq 10 | N(17) - N(3) = 15)}{\mathbb{P}(N(12) - N(6) \geq 10)} \cdot \mathbb{P}(N(17) - N(3) = 15).$$

Notemos que la variable aleatoria $N(12) - N(6) | N(17) - N(3) = 15 \sim \text{Binomial}(15, \frac{12-6}{17-3} = \frac{3}{7})$. Así, lo solicitado corresponde a,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(17) - N(3) = 15 | N(12) - N(6) \geq 10) &= \frac{\mathbb{P}(N(12) - N(6) \geq 10 | N(17) - N(3) = 15)}{\mathbb{P}(N(12) - N(6) \geq 10)} \cdot \mathbb{P}(N(17) - N(3) = 15). \\ &= \frac{\sum_{i=10}^{15} \binom{15}{i} (\frac{3}{7})^i (1 - \frac{3}{7})^{15-i}}{\sum_{k=10}^{\infty} \frac{(6\lambda)^k e^{-6\lambda}}{k!}} \cdot \frac{(14\lambda)^{15} e^{-14\lambda}}{15!}\end{aligned}$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Plantear correctamente la probabilidad condicional (definición o Teorema de Bayes).
- **(1 punto)** Usar bien las propiedades del Proceso de Poisson y la construcción condicional (p.ej., binomial por repartición uniforme).
- **(1 punto)** Obtener una expresión final coherente para la probabilidad pedida.

(b) **(4 puntos)** Sabiendo que ocurrió exactamente un pedido en $[0, t]$, obtenga, en términos de t y $f(t)$, la probabilidad de que dicho pedido siga en el sistema en el instante t. Denote esta probabilidad por $\bar{p}_t$.

Solución: Sea S_1 el tiempo de llegada del único pedido observado. Buscamos

$$\mathbb{P}(S_1 + T \geq t \mid N(t) = 1).$$

Para un Proceso de Poisson, se cumple la propiedad clásica

$$S_1 \mid N(t) = 1 \sim \text{Uniforme}(0, t).$$

Condicionando en el valor de S_1:

$$\mathbb{P}(S_1 + T \geq t \mid N(t) = 1) = \int_0^t \mathbb{P}(T \geq t - u)\, f_{S_1 | N(t)=1}(u)\, du.$$

Como $S_1 \mid N(t) = 1$ es uniforme en $(0, t)$, se tiene $f_{S_1|N(t)=1}(u) = \frac{1}{t}$ para $0 < u < t$. Entonces

$$\mathbb{P}(S_1 + T \geq t \mid N(t) = 1) = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}(T \geq t - u)\, du = \frac{1}{t} \int_0^t \int_{t-u}^{\infty} f(s)\, ds\, du.$$

Por definición, denotamos

$$\bar{p}_t := \mathbb{P}(S_1 + T \geq t \mid N(t) = 1) = \frac{1}{t} \int_0^t \int_{t-u}^{\infty} f(s)\, ds\, du.$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Identificar que se requiere $\mathbb{P}(S_1 + T \geq t \mid N(t) = 1)$ y definir adecuadamente S_1.
- **(1 punto)** Usar la propiedad de ordenamiento del Proceso de Poisson para indicar que $S_1 \mid N(t) = 1 \sim \text{Unif}(0, t)$.
- **(1 punto)** Plantear correctamente la integral condicionando en S_1: $\int_0^t \mathbb{P}(T \geq t - u) f_{S_1|N(t)=1}(u)\, du$.
- **(1 punto)** Reemplazar la densidad uniforme, llegar a una expresión explícita en términos de $f(\cdot)$ y definir claramente $\bar{p}_t$.

(c) **(4 puntos)** Si se han realizado $n \in \mathbb{N}$ pedidos en $[0, t]$, deduzca, en función de n, k y $\bar{p}_t$, la probabilidad de que exactamente $k \in \{0, \ldots, n\}$ de ellos sigan en el sistema en el instante t. Denote esta probabilidad por $\bar{p}_{t,k}$.

Solución: Cada uno de los n pedidos tiene, de manera independiente, la misma probabilidad $\bar{p}_t$ de permanecer en el sistema al instante t, según el resultado del inciso anterior.

Por lo tanto, el número de pedidos que siguen en el sistema en el instante t dado que $N(t) = n$ sigue una distribución

$$\text{Binomial}(n, \bar{p}_t).$$

En consecuencia, la probabilidad de que exactamente k pedidos sigan activos en t, condicionada en $N(t) = n$, es

$$\mathbb{P}(k \text{ pedidos activos en } t \mid N(t) = n) = \binom{n}{k} \bar{p}_t^{\,k} \left(1 - \bar{p}_t\right)^{n-k}.$$

Definimos esta probabilidad como

$$\bar{p}_{t,k} := \mathbb{P}(k \text{ pedidos activos en } t \mid N(t) = n) = \binom{n}{k} \bar{p}_t^{\,k} \left(1 - \bar{p}_t\right)^{n-k}.$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Argumentar que, dados $N(t) = n$, cada pedido permanece activo en t con probabilidad $\bar{p}_t$ de manera independiente.
- **(2 puntos)** Identificar y escribir correctamente que el número de pedidos activos es $\text{Binomial}(n, \bar{p}_t)$ y dar la expresión $\binom{n}{k} \bar{p}_t^{\,k} (1 - \bar{p}_t)^{n-k}$.
- **(1 punto)** Definir explícitamente $\bar{p}_{t,k}$ como la probabilidad pedida y asociarla a la expresión binomial.

(d) **(4 puntos)** Sea $r(t)$ la cantidad de repartidores disponibles en el instante t. El sistema está *congestionado* si hay más pedidos activos que repartidores. Sin conocer cuántos pedidos llegaron en $[0, t]$, exprese, en función de $\bar{p}_{t,k}$, λ, $r(t)$ y t, la probabilidad de que el sistema esté *congestionado* en el instante t.

Solución: Sea $N := N(t)$ el número total de pedidos que han llegado en el intervalo $[0, t]$. Como las llegadas siguen un Proceso de Poisson con tasa λ, se tiene

$$N \sim \text{Poisson}(\lambda t), \quad \mathbb{P}(N = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}.$$

El sistema está congestionado si el número de pedidos activos en t supera el número de repartidores, es decir, si hay al menos $r(t)+1$ pedidos activos. Usando la ley de la probabilidad total y la notación del inciso (b):

$$\mathbb{P}(\text{sistema congestionado en } t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\,\mathbb{P}(\#\text{ pedidos activos} > r(t) \mid N=n).$$

Para un n fijo, la probabilidad de que haya exactamente k pedidos activos en t es $\bar{p}_{t,k}$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(\#\text{ pedidos activos} > r(t) \mid N=n) = \sum_{k=r(t)+1}^{n} \bar{p}_{t,k}.$$

Sustituyendo, obtenemos

$$\mathbb{P}(\text{sistema congestionado en } t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \sum_{k=r(t)+1}^{n} \bar{p}_{t,k}.$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Definir $N(t)$ y usar que $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, escribiendo $\mathbb{P}(N=n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$.
- **(1 punto)** Traducir la condición de congestión a "número de pedidos activos $> r(t)$" (o $\geq r(t)+1$).
- **(1 punto)** Escribir para $N=n$ la probabilidad $\mathbb{P}(\text{activos} > r(t) \mid N=n) = \sum_{k=r(t)+1}^{n} \bar{p}_{t,k}$.
- **(1 punto)** Combinar todo en una expresión final del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \sum_{k=r(t)+1}^{n} \bar{p}_{t,k}$.

Problema 3 (15 puntos): CMTD

En el centro logístico *Chapman Logistics*, un robot de reparto opera al cierre de cada día entre dos sectores A y B. Al finalizar cada día el robot está en uno de estos sectores y su batería puede estar alta (H) o baja (L). La evolución de un día al siguiente es la que sigue:

- Si la batería está baja (L), el robot no se desplaza y permanece en el mismo sector; al día siguiente la batería será alta con probabilidad 0.7 y baja con probabilidad 0.3.
- Si la batería está alta (H) y el robot está en A, se mueve a B con probabilidad 0.4 y se queda en A con probabilidad 0.6. Si se queda, mantiene batería alta; si se mueve, llega a B con batería alta o baja, cada una con probabilidad 0.5.
- Si la batería está alta (H) y el robot está en B, se mueve a A con probabilidad 0.5 y se queda en B con probabilidad 0.5. Si se queda, mantiene batería alta; si se mueve, llega a A con batería alta o baja, cada una con probabilidad 0.5.

(a) **(4 puntos)** Modele el sistema como una Cadena de Markov en Tiempo Discreto, explicitando el conjunto de estados y la matriz P de probabilidades de transición en una etapa.

Solución: Sea X_n el estado del robot al final del día n. Se modela $\{X_n, n \geq 0\}$ como una cadena de Markov en tiempo discreto con espacio de estados

$$S = \{(A,H),\ (A,L),\ (B,H),\ (B,L)\}.$$

Para $s, s' \in S$ se define

$$P_{s,s'} = \mathbb{P}(X_{n+1} = s' \mid X_n = s),$$

A partir de las reglas del enunciado, se obtienen las transiciones:

Desde (A,L), el robot se queda en el sector A y solo cambia la batería. Por tanto,

$$P_{(A,L),(A,H)} = 0.7, \qquad P_{(A,L),(A,L)} = 0.3, \qquad P_{(A,L),(B,H)} = 0, \qquad P_{(A,L),(B,L)} = 0.$$

Desde (B,L), el robot se queda en el sector B y solo cambia la batería:

$$P_{(B,L),(B,H)} = 0.7, \qquad P_{(B,L),(B,L)} = 0.3, \qquad P_{(B,L),(A,H)} = 0, \qquad P_{(B,L),(A,L)} = 0.$$

Desde (A,H), con probabilidad 0.6 el robot se queda en A y mantiene batería alta:

$$P_{(A,H),(A,H)} = 0.6.$$

Con probabilidad 0.4 se mueve a B; al día siguiente la batería será alta con probabilidad 0.5 y baja con probabilidad 0.5, de modo que

$$P_{(A,H),(B,H)} = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2, \qquad P_{(A,H),(B,L)} = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2,$$

y no se pasa directamente a (A,L), por lo que

$$P_{(A,H),(A,L)} = 0.$$

Desde (B,H), con probabilidad 0.5 el robot se queda en B y mantiene batería alta:

$$P_{(B,H),(B,H)} = 0.5.$$

Con probabilidad 0.5 se mueve a A; al día siguiente la batería será alta con probabilidad 0.5 y baja con probabilidad 0.5, de manera que

$$P_{(B,H),(A,H)} = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25, \qquad P_{(B,H),(A,L)} = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25, \qquad P_{(B,H),(B,L)} = 0.$$

La matriz de transición queda dada por

$$P = \begin{array}{c} \\ (A,H) \\ (A,L) \\ (B,H) \\ (B,L) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (A,H) & (A,L) & (B,H) & (B,L) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Definir formalmente el espacio de estados $S = \{(A,H),(A,L),(B,H),(B,L)\}$.
- **(2 puntos)** Derivar correctamente las probabilidades de transición $P_{s,s'}$ entre los estados $(A,H),(A,L),(B,H),(B,L)$ a partir de las reglas del enunciado.
- **(1 punto)** Presentar la matriz de transición P con valores coherentes.

(b) **(4 puntos)** Identifique las clases de estados y clasifíquelas como transientes, recurrentes positivas o nulas, indicando además si son aperiódicas o periódicas (y su período, si corresponde). Adicionalmente justifique si existe distribución estacionaria y si existe distribución límite.

Solución: A partir de la matriz de transición P, se ve que desde cualquier estado de S se puede llegar a cualquier otro en un número finito de pasos con probabilidad estrictamente positiva. En particular, para todo par $s, s' \in S$ se tiene $s \leftrightarrow s'$. Por lo tanto, todos los estados pertenecen a una única clase de comunicación y la cadena es irreducible.

En una cadena de Markov irreducible con espacio de estados finito, todos los estados son recurrentes positivos.

Notar que todos los estados $(A,H),(A,L),(B,H),(B,L)$ son aperiódicos. Como la cadena es irreducible y todos los estados son aperiódicos, la cadena completa es irreducible y aperiódica.

Por este última característica es que existe distribución estacionaria y la distribución límite existe y coincide con ella.

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Argumentar en términos de comunicación de estados que los cuatro estados $(A,H),(A,L),(B,H),(B,L)$ forman una sola clase comunicante, concluyendo que la cadena es irreducible con estados recurrentes positivos.
- **(1 punto)** Concluir que los estados $(A,H),(A,L),(B,H),(B,L)$ son aperiódicos y, por tanto, la cadena es irreducible y aperiódica.
- **(2 puntos)** Invocar el resultado teórico para cadenas finitas, irreducibles y aperiódicas para justificar la existencia y unicidad de la distribución estacionaria y la existencia de distribución límite.

(c) **(3 puntos)** Suponga que, al finalizar el día 2, el robot se encuentra en el sector A con batería alta. Determine la probabilidad de que, al finalizar el día 5, el robot tenga batería baja por primera vez; es decir, que al final de los días 3 y 4 la batería sea alta y que recién al final del día 5 la batería sea baja.

Solución: Partimos al final del día 2 en el estado (A,H). Miramos tres días hacia adelante (días 3, 4 y 5). Queremos que:

– en los días 3 y 4 el robot esté siempre con batería alta (en (A,H) o (B,H));

– al final del día 5 esté con batería baja (en (A,L) o (B,L)).

Usamos la notación abreviada

$$(A,H) = AH, \quad (A,L) = AL, \quad (B,H) = BH, \quad (B,L) = BL.$$

De la matriz de transición del inciso (a), las probabilidades relevantes son:

$$\mathbb{P}(AH \to AH) = 0.6, \quad \mathbb{P}(AH \to BH) = 0.2, \quad \mathbb{P}(AH \to BL) = 0.2,$$
$$\mathbb{P}(BH \to AH) = 0.25, \quad \mathbb{P}(BH \to AL) = 0.25, \quad \mathbb{P}(BH \to BH) = 0.5.$$

(Las demás que involucran batería baja no nos sirven para los días 3 y 4, porque allí exigimos batería alta.)

Necesitamos todos los caminos de longitud 3 que salen de AH, pasan por estados con batería alta en los dos primeros pasos y terminan con batería baja en el tercer paso. Es decir, las secuencias:

$$\text{día 2: } AH \ \to \ \text{día 3: (alto)} \ \to \ \text{día 4: (alto)} \ \to \ \text{día 5: (bajo)}.$$

Los caminos posibles que cumplen esto son:

1. $AH \to AH \to AH \to BL, \quad \mathbb{P} = 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.2 = 0.072,$
2. $AH \to AH \to BH \to AL, \quad \mathbb{P} = 0.6 \cdot 0.2 \cdot 0.25 = 0.03,$
3. $AH \to BH \to AH \to BL, \quad \mathbb{P} = 0.2 \cdot 0.25 \cdot 0.2 = 0.01,$
4. $AH \to BH \to BH \to AL, \quad \mathbb{P} = 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.25 = 0.025.$

Cualquier camino que pase por AL o BL en el día 3 o en el día 4 queda automáticamente descartado, porque violaría la condición de "primera vez con batería baja al final del día 5".

Sumamos las probabilidades de estos cuatro caminos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{primera vez con batería baja al final del día 5} \mid X_2 = AH) &= 0.072 + 0.03 + 0.01 + 0.025 \\ &= 0.137.\end{aligned}$$

Distribución de Puntaje:

– **(1 punto)** Formular bien el evento: primera vez con batería baja al final del día 5 (alta en días 3 y 4, baja en 5).

– **(1 punto)** Plantear un procedimiento correcto (p.ej., enumerar trayectorias de 3 pasos que cumplen la condición).

– **(1 punto)** Calcular correctamente la probabilidad final (productos y suma de trayectorias, valor coherente).

(d) **(4 puntos)** Escriba el sistema de ecuaciones que permite obtener la distribución de largo plazo de la CMTD modelada (no es necesario resolverlo). A partir de esa distribución, exprese, en régimen estacionario, la fracción de días en que el robot está en el sector A y la fracción de días en que tiene batería baja L.

Solución: Sea

$$\pi = (\pi_{A,H}, \pi_{A,L}, \pi_{B,H}, \pi_{B,L})$$

la distribución estacionaria de la cadena, donde, por ejemplo, $\pi_{A,H}$ representa la probabilidad de que, en régimen estacionario, el robot esté en el estado (A,H).

Por definición, π debe satisfacer

$$\pi = \pi P, \qquad \pi_{A,H} + \pi_{A,L} + \pi_{B,H} + \pi_{B,L} = 1.$$

La ecuación $\pi = \pi P$ se puede escribir componente a componente como

$$\pi_{s'} = \sum_{s \in S} \pi_s P_{s,s'}, \qquad s' \in S.$$

Tomando $S = \{(A,H),(A,L),(B,H),(B,L)\}$ y usando la matriz de transición del inciso (a), se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\text{Estado } (A,H): &\quad \pi_{A,H} = 0.6\,\pi_{A,H} + 0.7\,\pi_{A,L} + 0.25\,\pi_{B,H},\\
\text{Estado } (A,L): &\quad \pi_{A,L} = 0.3\,\pi_{A,L} + 0.25\,\pi_{B,H},\\
\text{Estado } (B,H): &\quad \pi_{B,H} = 0.2\,\pi_{A,H} + 0.5\,\pi_{B,H} + 0.7\,\pi_{B,L},\\
\text{Estado } (B,L): &\quad \pi_{B,L} = 0.2\,\pi_{A,H} + 0.3\,\pi_{B,L}.
\end{aligned}$$

La ecuación de normalización

$$\pi_{A,H} + \pi_{A,L} + \pi_{B,H} + \pi_{B,L} = 1$$

En régimen estacionario, la fracción de días en que ocurre un evento E se identifica con la probabilidad $\mathbb{P}_\pi(E)$, donde π es la distribución estacionaria.

La fracción de días en que el robot está en el sector A se obtiene sumando las probabilidades estacionarias de los estados cuyo componente de sector es A, es decir, los estados (A,H) y (A,L):

$$\mathbb{P}_\pi(\text{sector } A) = \pi_{A,H} + \pi_{A,L}.$$

La fracción de días en que el robot tiene batería baja se obtiene sumando las probabilidades de los estados cuyo componente de batería es L, es decir, (A,L) y (B,L):

$$\mathbb{P}_\pi(\text{batería baja}) = \pi_{A,L} + \pi_{B,L}.$$

Distribución de Puntaje:

- **(3 puntos)** Plantear de forma explícita el sistema de ecuaciones $\pi = \pi P$ en términos de las componentes $\pi_{A,H}, \pi_{A,L}, \pi_{B,H}, \pi_{B,L}$, junto con la condición de normalización $\pi_{A,H} + \pi_{A,L} + \pi_{B,H} + \pi_{B,L} = 1$.
- **(1 punto)** Expresar formalmente las fracciones pedidas como $\mathbb{P}_\pi(\text{sector } A) = \pi_{A,H} + \pi_{A,L}$ y $\mathbb{P}_\pi(\text{batería baja}) = \pi_{A,L} + \pi_{B,L}$.

Problema 4 (15 puntos): CMTC

Considere el cajero automático de la sucursal *LittleBank*. A este cajero llegan clientes de acuerdo a un Proceso de Poisson de tasa $\lambda > 0$ clientes/minuto. En la zona del cajero solo hay espacio para, a lo más, dos personas: una que está utilizando el cajero y otra que espera su turno en la fila. Si llega un cliente y ya hay dos personas en el lugar (una en servicio y otra esperando), dicho cliente no ingresa al sistema y debe buscar otro cajero.

Cuando un cliente accede al cajero, realiza una primera operación financiera cuyo tiempo de atención es una variable aleatoria con distribución exponencial de media $1/\mu$ minutos, donde $\mu > 0$ es la tasa de servicio asociada a esta primera operación (operaciones por minuto). Al finalizar esta primera operación, el cliente se retira con probabilidad $1-p$, mientras que con probabilidad $p \in (0,1)$ requiere realizar una segunda operación adicional. El tiempo de esta segunda operación es independiente del anterior y tiene distribución exponencial de media $1/\gamma$ minutos, con $\gamma > 0$ la tasa de servicio correspondiente. Ningún cliente realiza más de dos operaciones en el cajero.

(a) **(5 puntos)** Modele la situación descrita como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo, definiendo claramente el conjunto de estados y las tasas de transición instantáneas.

Solución: Modelamos el sistema como una cadena de Markov en tiempo continuo (CTMC) $\{X(t), t \geq 0\}$, donde

$$X(t) = (N(t), Y(t)).$$

Aquí:

- $N(t) \in \{0,1,2\}$ es el número de clientes en el sistema en el instante t (considerando al cliente en servicio y, eventualmente, uno esperando).
- $Y(t)$ indica el tipo de operación que realiza el cliente en el cajero:
  - $Y(t) = 0$ si el sistema está vacío ($N(t) = 0$),
  - $Y(t) = 1$ si el cliente en servicio está en su primera operación,
  - $Y(t) = 2$ si el cliente en servicio está en su segunda operación.

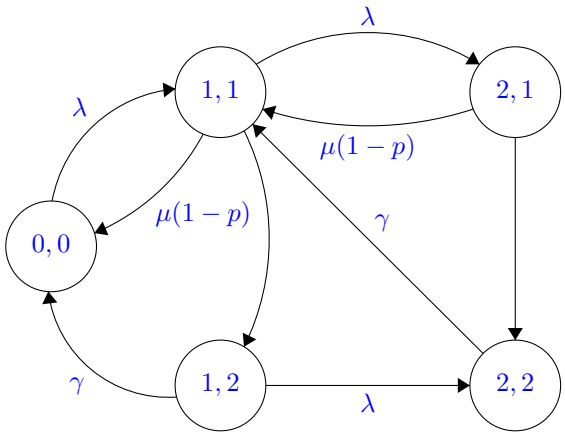
Dado que solo hay espacio para, a lo más, dos clientes, el espacio de estados de la CTMC es

$$\mathcal{S} = \{(0,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2)\}.$$

Denotamos por $q_{s,s'}$ la tasa de transición instantánea desde el estado $s \in \mathcal{S}$ al estado $s' \in \mathcal{S}$, con $s' \neq s$. Las únicas tasas no nulas son:

$$\begin{aligned}
q_{(0,0),(1,1)} &= \lambda, && \text{(llegada cuando el sistema está vacío);}\\
q_{(1,1),(0,0)} &= \mu(1-p), && \text{(término de 1ª operación y salida, sin cola);}\\
q_{(1,1),(2,1)} &= \lambda, && \text{(llegada cuando hay un cliente en 1ª operación);}\\
q_{(1,1),(1,2)} &= \mu p, && \text{(término de 1ª operación y paso a 2ª, sin cola);}\\
q_{(1,2),(0,0)} &= \gamma, && \text{(término de 2ª operación y salida, sin cola);}\\
q_{(1,2),(2,2)} &= \lambda, && \text{(llegada cuando hay un cliente en 2ª operación);}\\
q_{(2,1),(1,1)} &= \mu(1-p), && \text{(término de 1ª operación, salida y entrada del que esperaba a 1ª);}\\
q_{(2,1),(2,2)} &= \mu p, && \text{(término de 1ª operación y paso a 2ª, manteniendo uno esperando);}\\
q_{(2,2),(1,1)} &= \gamma, && \text{(término de 2ª operación y entrada del que esperaba a 1ª operación).}
\end{aligned}$$

Todas las demás tasas $q_{s,s'}$ con $s' \neq s$ son iguales a cero. El grafo asociado con las respectivas tasas de transición instantáneas es



Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Definir claramente la variable de estado (por ejemplo $X(t) = (N(t), Y(t))$) e interpretar qué representa cada componente.
- **(2 puntos)** Identificar correctamente el espacio de estados admisibles con capacidad máxima de dos clientes (por ejemplo $\{(0,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$).
- **(1 punto)** Especificar correctamente las tasas de llegada λ en las transiciones en que entra un nuevo cliente (y reconocer que no se admiten más clientes cuando hay dos en el sistema).
- **(1 punto)** Especificar correctamente las tasas de servicio/transición $\mu(1-p)$, μp y γ en las transiciones correspondientes (salida, paso a segunda operación, avance de cola).

(b) **(4 puntos)** Escriba detalladamente las ecuaciones de equilibrio del sistema (no es necesario resolverlas).

Solución: Denotamos por

$$P_{i,j} = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\big(X(t) = (i,j)\big), \qquad (i,j) \in \mathcal{S},$$

las probabilidades estacionarias del sistema. Definamos, para cada estado $s \in \mathcal{S}$,

$$\nu_s \;=\; \sum_{\substack{s'\in\mathcal{S}\\ s'\neq s}} q_{s,s'}$$

como la tasa total de salida desde el estado s. Las ecuaciones de equilibrio global (o balance global) se escriben, para cada $s \in \mathcal{S}$, como

$$\nu_s\, P_s \;=\; \sum_{\substack{k\in\mathcal{S}\\ k\neq s}} q_{k,s}\, P_k,$$

junto con la condición de normalización

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} P_s = 1.$$

En nuestro caso, escribiendo explícitamente las ecuaciones para los estados $(0,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\lambda\, P_{0,0} &= \mu(1-p)\, P_{1,1} + \gamma\, P_{1,2},\\
(\mu+\lambda)\, P_{1,1} &= \lambda\, P_{0,0} + \mu(1-p)\, P_{2,1} + \gamma\, P_{2,2},\\
(\gamma+\lambda)\, P_{1,2} &= \mu p\, P_{1,1},\\
\mu\, P_{2,1} &= \lambda\, P_{1,1},\\
\gamma\, P_{2,2} &= \lambda\, P_{1,2} + \mu p\, P_{2,1},\\
P_{0,0} + P_{1,1} + P_{1,2} + P_{2,1} + P_{2,2} &= 1.
\end{aligned}$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Definir las probabilidades estacionarias $P_{i,j}$ y escribir la forma general de las ecuaciones de balance (o equilibrio global).
- **(2 puntos)** Escribir de manera consistente las ecuaciones de balance para los estados considerados (por ejemplo para $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$), con tasas entrantes y salientes correctas.
- **(1 punto)** Incluir la ecuación de normalización $\sum P_{i,j} = 1$.

Suponga ahora que, de todos los clientes que llegan al cajero, una fracción $r \in (0,1)$ corresponde a clientes "express" que pasan directamente a una única operación (sin realizar la primera operación del modelo original).

Para estos clientes express, el tiempo de atención en el cajero es una variable aleatoria con distribución exponencial de media $1/\delta$, donde $\delta > 0$ es la tasa de servicio *express* (en operaciones/minuto). El resto de los clientes, fracción $(1-r)$, se comporta como en el modelo original: primero realiza una operación con tiempo exponencial de media $1/\mu$, donde $\mu > 0$ es la tasa de servicio de la primera operación (en operaciones/minuto), y, con probabilidad p, requiere luego una segunda operación con tiempo exponencial de media $1/\gamma$, con $\gamma > 0$ la tasa de servicio de la segunda operación (en operaciones/minuto).

Considere que los clientes express y regulares comparten la misma fila y la misma restricción de espacio descrita al inicio.

(c) **(6 puntos)** Modele esta nueva situación como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo, definiendo claramente el espacio de estados y las tasas de transición instantáneas.

Solución: Se modela el sistema mediante una cadena de Markov en tiempo continuo $\{Z(t), t \geq 0\}$ con estados de la forma

$$Z(t) = \big(X(t), X_e(t), Y_1(t), Y_2(t), Y_e(t)\big),$$

donde, en cada instante t, $X(t)$ es el número de clientes normales en cola, $X_e(t)$ es el número de clientes express en cola, $Y_1(t)$ es el número de clientes normales en primera operación, $Y_2(t)$ es el número de clientes normales en segunda operación y $Y_e(t)$ es el número de clientes express en servicio.

El sistema admite a lo más dos clientes en total (en servicio o esperando) y el cajero atiende a lo más a un cliente a la vez. Esto se expresa mediante las restricciones

$$X + X_e + Y_1 + Y_2 + Y_e \leq 2, \qquad Y_1 + Y_2 + Y_e \leq 1,$$

y, además, cada componente solo puede tomar valores en $\{0,1\}$. De este modo, el espacio de estados queda definido como

$$\mathcal{S} = \big\{(x, x_e, y_1, y_2, y_e) \in \{0,1\}^5 : x + x_e + y_1 + y_2 + y_e \leq 2,\ y_1 + y_2 + y_e \leq 1\big\},$$

lo que se reduce explícitamente a

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \{&(0,0,0,0,0),\\ &(0,0,1,0,0),\ (0,0,0,1,0),\ (0,0,0,0,1),\\ &(1,0,1,0,0),\ (0,1,1,0,0),\\ &(1,0,0,1,0),\ (0,1,0,1,0),\\ &(1,0,0,0,1),\ (0,1,0,0,1)\}.\end{aligned}$$

Para cada par de estados distintos $s, s' \in \mathcal{S}$, $q_{s,s'}$ representa la tasa instantánea de transición de s a s'. A continuación se describen todas las tasas no nulas $q_{s,s'}$ de forma compacta. Las tasas no consideradas tienen valor cero.

Llegadas de clientes (proceso de Poisson de tasa $\lambda > 0$; cada cliente es normal con probabilidad $1 - r$ y express con probabilidad r). Si el sistema tiene 0 o 1 clientes, una nueva llegada puede ser admitida:

$$\begin{aligned}
q_{(0,0,0,0,0),(0,0,1,0,0)} &= \lambda(1-r) && \text{(llega un normal y entra en } 1^{\underline{\text{a}}} \text{ operación)},\\
q_{(0,0,0,0,0),(0,0,0,0,1)} &= \lambda r && \text{(llega un express y entra en servicio)},\\
q_{(0,0,1,0,0),(1,0,1,0,0)} &= \lambda(1-r) && \text{(llega un normal y queda en cola, normal en } 1^{\underline{\text{a}}} \text{ operación)},\\
q_{(0,0,1,0,0),(0,1,1,0,0)} &= \lambda r && \text{(llega un express y queda en cola, normal en } 1^{\underline{\text{a}}} \text{ operación)},\\
q_{(0,0,0,1,0),(1,0,0,1,0)} &= \lambda(1-r) && \text{(llega un normal y queda en cola, normal en } 2^{\underline{\text{a}}} \text{ operación)},\\
q_{(0,0,0,1,0),(0,1,0,1,0)} &= \lambda r && \text{(llega un express y queda en cola, normal en } 2^{\underline{\text{a}}} \text{ operación)},\\
q_{(0,0,0,0,1),(1,0,0,0,1)} &= \lambda(1-r) && \text{(llega un normal y queda en cola, express en servicio)},\\
q_{(0,0,0,0,1),(0,1,0,0,1)} &= \lambda r && \text{(llega un express y queda en cola, express en servicio)}.
\end{aligned}$$

Si el sistema ya tiene dos clientes ($x + x_e + y_1 + y_2 + y_e = 2$), cualquier nueva llegada es rechazada y el estado no cambia (en particular, $q_{s,s'} = 0$ para toda llegada hacia un estado con tres clientes).

Fin de primera operación normal (tiempo exponencial con tasa $\mu > 0$). En todo estado con $Y_1 = 1$, la primera operación del cliente en servicio termina con tasa μ. Con probabilidad p el cliente pasa a la segunda operación; con probabilidad $1 - p$ abandona el sistema. Si existe un cliente en cola, este pasa al cajero. Esto se refleja en:

$$\begin{aligned}
q_{(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)} &= \mu p && \text{(normal en } 1^{\underline{\text{a}}} \text{ pasa a } 2^{\underline{\text{a}}}\text{, sin cola)},\\
q_{(0,0,1,0,0),(0,0,0,0,0)} &= \mu(1-p) && \text{(normal en } 1^{\underline{\text{a}}} \text{ sale, sistema queda vacío)},\\
q_{(1,0,1,0,0),(1,0,0,1,0)} &= \mu p && \text{(normal en } 1^{\underline{\text{a}}} \text{ pasa a } 2^{\underline{\text{a}}}\text{, normal en cola se mantiene)},\\
q_{(1,0,1,0,0),(0,0,1,0,0)} &= \mu(1-p) && \text{(normal en } 1^{\underline{\text{a}}} \text{ sale, normal en cola entra a } 1^{\underline{\text{a}}}\text{)},\\
q_{(0,1,1,0,0),(0,1,0,1,0)} &= \mu p && \text{(normal en } 1^{\underline{\text{a}}} \text{ pasa a } 2^{\underline{\text{a}}}\text{, express sigue en cola)},\\
q_{(0,1,1,0,0),(0,0,0,0,1)} &= \mu(1-p) && \text{(normal en } 1^{\underline{\text{a}}} \text{ sale, express en cola entra a servicio)}.
\end{aligned}$$

Fin de segunda operación normal (tiempo exponencial con tasa $\gamma > 0$). En todo estado con $Y_2 = 1$, la segunda operación termina con tasa γ; el cliente siempre abandona el sistema y, si hay alguien en cola, este pasa al servicio:

$$\begin{aligned}
q_{(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,0)} &= \gamma && \text{(normal en } 2^{\underline{\text{a}}} \text{ sale, sin cola, sistema vacío)},\\
q_{(1,0,0,1,0),(0,0,1,0,0)} &= \gamma && \text{(normal en } 2^{\underline{\text{a}}} \text{ sale, normal en cola entra a } 1^{\underline{\text{a}}}\text{)},\\
q_{(0,1,0,1,0),(0,0,0,0,1)} &= \gamma && \text{(normal en } 2^{\underline{\text{a}}} \text{ sale, express en cola entra en servicio)}.
\end{aligned}$$

Fin de operación express (tiempo exponencial con tasa $\delta > 0$). En todo estado con $Y_e = 1$, la operación express termina con tasa δ; el cliente express abandona el sistema y, si hay alguien en cola, este ocupa el cajero:

$$q_{(0,0,0,0,1),(0,0,0,0,0)} = \delta \quad \text{(express en servicio sale, sin cola, sistema vacío)},$$

$$q_{(1,0,0,0,1),(0,0,1,0,0)} = \delta \quad \text{(express en servicio sale, normal en cola entra a } 1^{\underline{a}}\text{)},$$

$$q_{(0,1,0,0,1),(0,0,0,0,1)} = \delta \quad \text{(express en servicio sale, express en cola pasa a servicio)}.$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Definir claramente el vector de estado (por ejemplo (x, x_e, y_1, y_2, y_e)) e interpretar cada componente (cola normal, cola express, primera operación, segunda operación, servicio express).
- **(1 punto)** Plantear explícitamente las restricciones de capacidad del sistema (a lo más dos clientes en total, a lo más uno en servicio) y cómo se reflejan en los estados posibles.
- **(1 punto)** Describir o enumerar correctamente el conjunto de estados admisibles $\mathcal{S}$ consistente con dichas restricciones.
- **(1 punto)** Describir adecuadamente las tasas de llegada $\lambda(1-r)$ y λr, indicando cuándo se admite un nuevo cliente y cuándo se rechaza por capacidad completa.
- **(2 puntos)** Describir adecuadamente las tasas de servicio μ, γ, δ y las transiciones asociadas (paso de primera a segunda operación, salida del sistema, avance de la cola normal o express).

Problema 5 (15 puntos): Sistemas de Espera

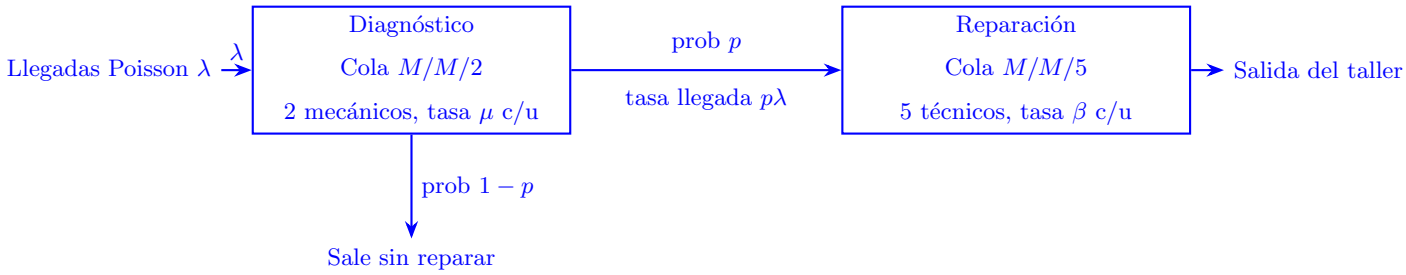
En el taller mecánico *Poiss-on Wheels*, los autos llegan a la recepción según un Proceso de Poisson con tasa $\lambda > 0$ (autos por hora). El sistema cuenta con dos áreas de atención: diagnóstico y reparación. Al ingresar al taller, cada vehículo pasa primero por diagnóstico, donde dos mecánicos trabajan en paralelo y los tiempos de revisión siguen una distribución exponencial con parámetro $\mu > 0$ (en horas). Al finalizar la evaluación, el vehículo:

- es derivado al área de reparación con probabilidad $p \in (0, 1)$, o
- abandona el taller sin intervención adicional con probabilidad $1 - p$.

El área de reparación dispone de cinco técnicos especializados que trabajan de manera independiente, cada uno con tiempos de servicio exponenciales con parámetro $\beta > 0$ (en horas). Los autos que ingresan a esta sección, una vez finalizada la reparación, salen directamente del taller.

(a) **(4 puntos)** Dibuje un diagrama que represente la relación entre los distintos sistemas de espera del taller. En dicho diagrama, identifique para cada sistema, el modelo de espera que lo describe, junto con sus tasas de llegada y de servicio.

Solución: El diagrama es,



Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Representar explícitamente las llegadas Poisson con tasa λ hacia el sistema.
- **(1 punto)** Identificar el área de diagnóstico como una cola $M/M/2$ con dos mecánicos y tasa de servicio μ por servidor.
- **(1 punto)** Identificar el área de reparación como una cola $M/M/5$ con cinco técnicos y tasa de servicio β por servidor.
- **(1 punto)** Indicar correctamente los flujos de probabilidad p hacia reparación y $1-p$ hacia la salida, incluyendo la interpretación de la tasa efectiva $p\lambda$ hacia la cola de reparación.

(b) **(2 puntos)** Indique las condiciones explícitas que deben cumplir los parámetros λ, μ, β y p para que el sistema completo alcance un régimen estacionario.

Solución: Para que el sistema total converja, es necesario que cada una de las áreas presente estabilidad a largo plazo. Así, las condiciones de régimen estacionario se reducen a

$$\lambda < 2\mu, \qquad p\lambda < 5\beta.$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Escribir correctamente la condición de estabilidad para el área de diagnóstico: $\lambda < 2\mu$.
- **(1 punto)** Escribir correctamente la condición de estabilidad para el área de reparación: $p\lambda < 5\beta$.

(c) **(4 puntos)** Modele mediante una Cadena de Markov en Tiempo Continuo cada área del taller. Para ello, sea explícito en el conjunto de estados, y las tasas efectivas de entrada y salida de cada área.

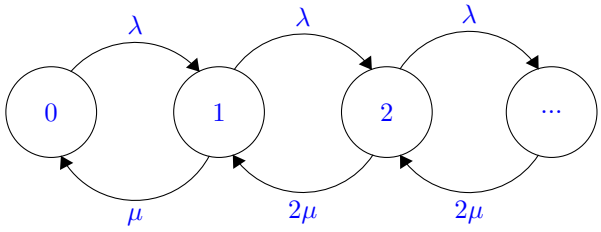
Solución: Para esto modelamos por separado cada una de las dos áreas del sistema. En cada caso, los estados representan la cantidad i de autos presentes en el área (incluyendo tanto a los que están siendo atendidos como a quienes esperan en fila), con $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

- Diagnóstico: En esta etapa todos los autos que llegan al taller pasan primero por diagnóstico, por lo que la tasa efectiva de llegada es

$$\lambda_e = \lambda.$$

Hay dos mecánicos atendiendo en paralelo, cada uno con tiempos de servicio exponenciales de tasa μ, de modo que las tasas de transición resultan

$$\lambda_i = \lambda, \quad \forall i \geq 0, \qquad \mu_i = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ \mu, & i = 1, \\ 2\mu, & i \geq 2. \end{cases}$$

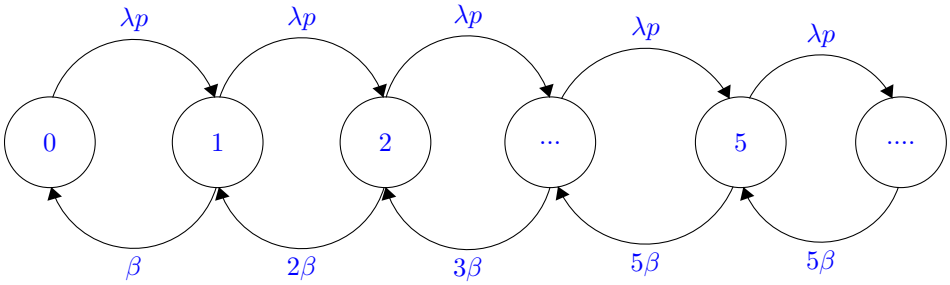


- Reparación: Una vez finalizado el diagnóstico, cada auto es derivado al área de reparación con probabilidad $p > 0$, mientras que con probabilidad $1 - p$ abandona el taller sin pasar por reparación. Como el sistema completo puede modelarse como una red de colas, en régimen estacionario el flujo medio que llega al área de reparación es λp. En particular, el proceso de llegadas a Reparación es Poisson con tasa efectiva

$$\lambda_e = \lambda p.$$

En esta etapa hay cinco técnicos, cada uno con tiempos de servicio exponenciales de tasa β, por lo que las tasas de transición cumplen con

$$\lambda_i = \lambda p, \quad \forall i \geq 0, \qquad \mu_i = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ i\beta, & 1 \leq i \leq 5, \\ 5\beta, & i \geq 5. \end{cases}$$



Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Estados $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ bien definidos en ambas áreas.
- **(1 punto)** Tasas de llegada: λ en Diagnóstico y λp en Reparación.
- **(1 punto)** Tasas de servicio correctas en Diagnóstico: $0, \mu, 2\mu$.
- **(1 punto)** Tasas de servicio correctas en Reparación: $0, i\beta, 5\beta$.

Denote como P_i^j a la probabilidad estacionaria que el área $j \in \{\text{Diagnostico}, \text{Reparacion}\}$ tenga $i \in \mathbb{N}_0$ autos (tanto en atención, como en la cola). Asuma por conocidas estas probabilidades estacionarias.

(d) **(5 puntos)** A partir de las probabilidades estacionarias y de los parámetros del problema, obtenga expresiones explícitas para:

(i) El tiempo medio que un auto permanece en el taller (incluyendo diagnóstico y, si corresponde, reparación).

(ii) El tiempo medio que un auto pasa esperando en cola (sin ser atendido) dentro del taller.

(iii) La fracción de autos, respecto del total de autos que llegan al taller, que requieren reparación y, además, deben esperar en cola antes de ser atendidos en dicha área.

Solución: Primero se calcula el número promedio de autos en cada área, en régimen estacionario. Para el área de diagnóstico se tiene

$$L^{\text{Diagnostico}} = \sum_{i=0}^{\infty} i\, P_i^{\text{Diagnostico}},$$

y, de forma análoga, para el área de reparación

$$L^{\text{Reparacion}} = \sum_{i=0}^{\infty} i\, P_i^{\text{Reparacion}}.$$

La tasa de llegada al área de diagnóstico es λ autos/hora. La tasa efectiva de llegada al área de reparación es λp autos/hora, ya que solo una fracción p de los autos que pasan por diagnóstico continúa a reparación.

Usando la ecuación de Little en cada área, el tiempo medio de permanencia (espera más servicio) en diagnóstico es

$$W^{\text{Diagnostico}} = \frac{L^{\text{Diagnostico}}}{\lambda},$$

mientras que el tiempo medio de permanencia en reparación, condicionado a que el auto sí entre a reparación, es

$$W^{\text{Reparacion}} = \frac{L^{\text{Reparacion}}}{\lambda p}.$$

El tiempo medio total que un auto pasa en el taller, denotado por W, se obtiene sumando el tiempo medio en diagnóstico y el tiempo medio en reparación ponderado por la probabilidad de que el auto requiera reparación:

$$W = W^{\text{Diagnostico}} + p\, W^{\text{Reparacion}} = \frac{L^{\text{Diagnostico}}}{\lambda} + p \cdot \frac{L^{\text{Reparacion}}}{\lambda p} = \frac{L^{\text{Diagnostico}}}{\lambda} + \frac{L^{\text{Reparacion}}}{\lambda}.$$

A continuación se obtiene el tiempo medio que un auto pasa esperando en cola dentro del taller. Para esto se calcula explícitamente el número promedio de autos en cola en cada etapa.

En diagnóstico hay dos mecánicos. Cuando el sistema se encuentra en un estado con i autos: si $i \leq 2$, todos los autos están siendo atendidos y no hay cola; si $i > 2$, hay exactamente $i - 2$ autos esperando. Por lo tanto, el número promedio de autos en cola en diagnóstico es

$$L_{\text{cola}}^{\text{Diagnostico}} = \sum_{i=2}^{\infty} (i-2)\, P_i^{\text{Diagnostico}}.$$

En el área de reparación hay cinco técnicos. Si en un estado hay $i \leq 5$ autos, todos están en servicio y no hay cola; si $i > 5$, hay exactamente $i - 5$ autos esperando. El número promedio de autos en cola en reparación es

$$L_{\text{cola}}^{\text{Reparacion}} = \sum_{i=5}^{\infty} (i-5)\, P_i^{\text{Reparacion}}.$$

Aplicando nuevamente la ecuación de Little, ahora solo a las colas, el tiempo medio de espera en la cola de diagnóstico es

$$W_{\text{cola}}^{\text{Diagnostico}} = \frac{L_{\text{cola}}^{\text{Diagnostico}}}{\lambda},$$

y el tiempo medio de espera en la cola de reparación, condicionado a que el auto llegue a dicha etapa, es

$$W_{\text{cola}}^{\text{Reparacion}} = \frac{L_{\text{cola}}^{\text{Reparacion}}}{\lambda p}.$$

El tiempo medio total de espera en cola dentro del taller, para un auto que llega a Poiss-on Wheels, se obtiene sumando el tiempo medio de espera en diagnóstico y el tiempo medio de espera en reparación ponderado por p:

$$W_{\text{cola}} = W_{\text{cola}}^{\text{Diagnostico}} + p\, W_{\text{cola}}^{\text{Reparacion}} = \frac{L_{\text{cola}}^{\text{Diagnostico}}}{\lambda} + p \cdot \frac{L_{\text{cola}}^{\text{Reparacion}}}{\lambda p} = \frac{L_{\text{cola}}^{\text{Diagnostico}}}{\lambda} + \frac{L_{\text{cola}}^{\text{Reparacion}}}{\lambda}.$$

Finalmente, se analiza la métrica asociada a la reparación. Interesa determinar, en régimen estacionario, la fracción de autos que llegan al taller y que, además de requerir reparación, deben esperar en cola antes de ser atendidos en dicha área.

Entre todos los autos que llegan al taller, la fracción que efectivamente es derivada al área de reparación es p. Entre esos autos, la fracción que debe esperar depende del estado del área de reparación al instante de su llegada. En régimen estacionario, la probabilidad de encontrar i autos en reparación (en servicio y en cola) es $P_i^{\text{Reparacion}}$. Un auto que arriba a reparación deberá esperar si, en ese instante, los cinco técnicos están ocupados, es decir, si el número de autos presentes es al menos 5. La fracción de llegadas a reparación que se enfrentan a esta situación es

$$\sum_{i=5}^{\infty} P_i^{\text{Reparacion}}.$$

Por lo tanto, la fracción, respecto de todos los autos que llegan al taller, que son derivados a reparación y al llegar encuentran a todos los técnicos ocupados y deben esperar, es

$$\Phi_{\text{esp-rep}} = p \cdot \sum_{i=5}^{\infty} P_i^{\text{Reparacion}}.$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Definir correctamente $L^{\text{Diagnostico}} = \sum_i i P_i^{\text{Diagnostico}}$ y $L^{\text{Reparacion}} = \sum_i i P_i^{\text{Reparacion}}$, identificar las tasas de llegada λ y λp, y aplicar la ecuación de Little para obtener $W^{\text{Diagnostico}}$ y $W^{\text{Reparacion}}$.

- **(1 punto)** Obtener una expresión correcta para el tiempo medio total en el taller $W = W^{\text{Diagnostico}} + p\,W^{\text{Reparacion}}$ y simplificarla a $W = \frac{L^{\text{Diagnostico}}}{\lambda} + \frac{L^{\text{Reparacion}}}{\lambda}$ (o equivalente).
- **(1 punto)** Construir correctamente los promedios de autos en cola en cada área, $L_{\text{cola}}^{\text{Diagnostico}}$ y $L_{\text{cola}}^{\text{Reparacion}}$, y usar Little para obtener $W_{\text{cola}}^{\text{Diagnostico}}$ y $W_{\text{cola}}^{\text{Reparacion}}$, combinándolos en una expresión correcta para W_{cola} para un auto genérico.
- **(2 puntos)** Plantear correctamente la fracción de autos que requieren reparación y además esperan en cola de reparación, como $p \sum_{i \geq 5} P_i^{\text{Reparacion}}$ (u otra expresión equivalente bien justificada).

Problema 6 (15 puntos): Simulación

Suponga que el tiempo (en horas) que una persona tarda en ejercer su voto durante la segunda vuelta de las elecciones presidenciales se modela mediante una variable aleatoria continua X, acotada en el intervalo $[0, 1]$, cuya función de densidad de probabilidad (PDF) es $f(x) := 6x(1-x)$.

Con el fin de planificar la jornada de votación junto a su familia, usted decide aplicar los conceptos de simulación, en particular la generación de variables aleatorias utilizando un método de Aceptación y Rechazo. Para ello considere la función de cota superior $t(x)$ dada por la función lineal por tramos con forma trapezoidal mostrada en la Figura 1.

$$t(x) := \begin{cases} 6x & \text{si } 0 \leq x \leq 0.25 \\ 1.5 & \text{si } 0.25 < x \leq 0.75 \\ -6x + 6 & \text{si } 0.75 < x \leq 1 \end{cases}$$

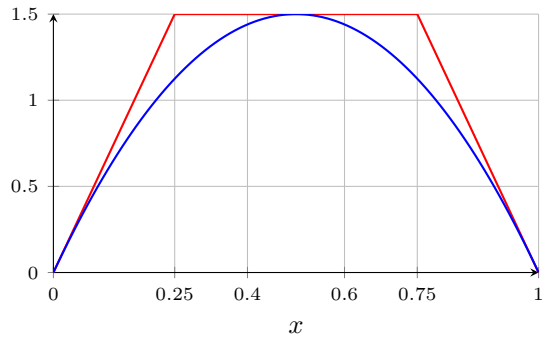


Figure 1: Cota superior $t(x)$ y función objetivo $f(x)$ utilizadas para el método de Aceptación y Rechazo.

(a) **(3 puntos)** Explicite la *función de aceptación* $g(x)$, el valor de la constante c de normalización de $t(x)$, y la *función para generar candidatos* $h(x)$ a utilizarse en el algoritmo de Aceptación y Rechazo.

Solución: La función de aceptación $g(x)$ se define como:

$$g(x) = \frac{f(x)}{t(x)} = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 0.25 \\ 4x(1-x) & \text{si } 0.25 < x \leq 0.75 \\ x & \text{si } 0.75 < x \leq 1 \end{cases}$$

La constante c está dada por el área del trapecio que en este caso es $\frac{9}{8}$. Así, la función $h(x)$ utilizada para generar candidatos está dada por

$$h(x) = \frac{t(x)}{c} = \begin{cases} \frac{16}{3}x, & 0 \leq x \leq 0.25, \\ \frac{4}{3}, & 0.25 < x \leq 0.75, \\ -\frac{16}{3}x + \frac{16}{3}, & 0.75 < x \leq 1. \end{cases}$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Escribir correctamente la función de aceptación $g(x) = f(x)/t(x)$ por tramos, coherente con $f(x) = 6x(1-x)$ y el $t(x)$ dado.
- **(1 punto)** Indicar el valor correcto de $c = \int_0^1 t(x)\,dx = 9/8$.
- **(1 punto)** Escribir la función $h(x) = t(x)/c$ correctamente por tramos.

(b) **(5 puntos)** A partir de la función $h(x)$, determine explícitamente la función de distribución acumulada (CDF) $H(x)$ y desarrolle una expresión para su inversa $H^{-1}(x)$.

Solución: Como se trata de una función definida por tramos, su distribución acumulada $H(x)$ se obtiene integrando $h(x)$ en cada intervalo.

En el primer tramo, $0 \leq x \leq 0.25$, se integra $h(x) = \frac{16}{3}x$:

$$H(x) = \int_0^x \frac{16}{3} t \, dt = \frac{8}{3}x^2.$$

Para el segundo tramo, $0.25 < x \leq 0.75$, es necesario preservar la continuidad. En $x = 0.25$,

$$H(0.25) = \frac{8}{3}(0.25)^2 = \frac{1}{6}.$$

Luego, integrando $h(x) = \frac{4}{3}$ desde 0.25 hasta x, se obtiene

$$H(x) = \frac{1}{6} + \frac{4}{3}(x - 0.25),$$

que puede escribirse como

$$H(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{6}.$$

En el tercer tramo, $0.75 < x \leq 1$, se parte del valor

$$H(0.75) = \frac{4}{3}(0.75) - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Integrando ahora $h(x) = -\frac{16}{3}x + \frac{16}{3}$ desde 0.75 hasta x se obtiene

$$H(x) = \frac{5}{6} + \left[-\frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{3}x\right] - \left[-\frac{8}{3}(0.75)^2 + \frac{16}{3}(0.75)\right],$$

lo que finalmente conduce a

$$H(x) = -\frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{3}x - \frac{5}{3}.$$

La función acumulada completa queda entonces expresada como

$$H(x) = \begin{cases} \frac{8}{3}x^2, & 0 \leq x \leq 0.25, \\ \frac{4}{3}x - \frac{1}{6}, & 0.25 < x \leq 0.75, \\ -\frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{3}x - \frac{5}{3}, & 0.75 < x \leq 1. \end{cases}$$

Debido a que $H(x)$ es también una función a tramos, su inversa se obtiene invirtiendo cada expresión en el intervalo correspondiente. En el caso de $0 \leq y \leq \frac{1}{6}$,

$$y = \frac{8}{3}x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{3y}{8}},$$

por lo que

$$H^{-1}(y) = \sqrt{\frac{3y}{8}}.$$

Para $\frac{1}{6} < y \leq \frac{5}{6}$, se usa

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3y}{4} + \frac{1}{8},$$

de modo que

$$H^{-1}(y) = \frac{3y}{4} + \frac{1}{8}.$$

Finalmente, para $\frac{5}{6} < y \leq 1$, se parte de

$$y = -\frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{3}x - \frac{5}{3},$$

y al resolver la ecuación cuadrática se obtiene

$$H^{-1}(y) = 1 - \sqrt{1 - \frac{5+3y}{8}}.$$

Así, la forma final de la función inversa es

$$H^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3y}{8}}, & 0 \leq y \leq \frac{1}{6}, \\ \frac{3y}{4} + \frac{1}{8}, & \frac{1}{6} < y \leq \frac{5}{6}, \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{5+3y}{8}}, & \frac{5}{6} < y \leq 1. \end{cases}$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Integrar $h(x)$ en el primer tramo y obtener $H(x) = \frac{8}{3}x^2$ para $0 \leq x \leq 0.25$.
- **(1 punto)** Integrar $h(x)$ en el segundo y tercer tramo, preservando continuidad, y obtener expresiones correctas para $H(x)$ en todo $[0, 1]$.
- **(1 punto)** Obtener explícitamente $H^{-1}(y)$ en los tramos $0 \leq y \leq \frac{1}{6}$ y $\frac{1}{6} < y \leq \frac{5}{6}$.
- **(2 puntos)** Obtener una expresión correcta para $H^{-1}(y)$ en el tramo $\frac{5}{6} < y \leq 1$ resolviendo la ecuación cuadrática correspondiente.

(c) **(5 puntos)** Se dispone de un método congruencial lineal (LCG) que le ha permitido generar una lista de instancias de una distribución Uniforme$(0, 1)$, disponibles en la Tabla 1.

En la Tabla 1, los valores de índice *par* se utilizan, en orden, para *generar* cada candidato, mientras que los valores de índice *impar* se emplean, también en orden, para *aceptar o rechazar* dichos candidatos.

A partir de estas muestras, y utilizando apropiadamente $g(x)$ y $H^{-1}(x)$ de los incisos anteriores, aplique el algoritmo de Aceptación y Rechazo para generar muestras de X. Con ello, simule el tiempo que tardarán en votar los n integrantes de su grupo familiar, donde n corresponde al número de instancias que efectivamente logre generar con su algoritmo.

Solución: Finalmente, cada iteración del algoritmo de Aceptación y Rechazo es de la forma:

Muestra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_i	0.498	0.186	0.270	0.323	0.432	0.125	0.021	0.464	0.250	0.011
Uso	A/R1	G1	A/R2	G2	A/R3	G3	A/R4	G4	A/R5	G5

Table 1: Valores Uniforme$(0, 1)$ usados en Aceptación–Rechazo. Aquí, Gk indica el valor usado para *generar* el candidato k, mientras que A/Rk denota el valor usado para *aceptar o rechazar* dicho candidato.

(a) Generar instancia uniforme U_1

(b) Generar segunda instancia Uniforme U_2

(c) Generar instancia candidata Y evaluando U_2 en $H^{-1}(y)$

(d) Evaluar instancia candidata Y en la función de aceptación $g(y)$

(e) Si $U_1 \leq g(Y)$, aceptar Y como instancia de X, si no, regresar al primer paso

Aplicando dicho algoritmo, obtenemos lo siguiente (ver Tabla 1)

i	U_i	$Y = H^{-1}(U_i)$	$g(Y)$	**Decisión**
1	0.498	-	-	-
2	0.186	0.265	0.778	Aceptamos 0.265
3	0.270	-	-	-
4	0.323	0.367	0.930	Aceptamos 0.367
5	0.432	-	-	-
6	0.125	0.217	0.783	Aceptamos 0.217
7	0.021	-	-	-
8	0.464	0.473	0.997	Aceptamos 0.473
9	0.250	-	-	-
10	0.011	0.064	0.936	Aceptamos 0.064

Table 2: Instancias generadas con el método de A&R.

De este modo, finalmente los $n = 5$ integrantes que irán a votar juntos, tardarán un total de 1.385 horas.

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Aplicar correctamente las muestras Uniforme$(0, 1)$ de la tabla en pares (una para generar el candidato vía H^{-1}, otra para aceptar/rechazar usando $g(x)$), respetando la convención indicada.
- **(3 puntos)** Aplicar correctamente el algoritmo de Aceptación y Rechazo a la tabla dada: calcular los candidatos Y, evaluar $g(Y)$ y decidir aceptación/rechazo para cada par, construyendo una tabla coherente (aunque los valores numéricos estén aproximados).
- **(1 punto)** Identificar el número de instancias aceptadas n y calcular el tiempo total de votación como la suma de las muestras aceptadas, indicando la unidad de tiempo.

(d) **(2 puntos)** Una mesa de votación cuenta con aproximadamente 400 votantes. Comente: ¿en qué porcentaje aumentaría la cantidad esperada de iteraciones necesarias para simular el tiempo total de votación de todos los electores si, en lugar del algoritmo que utiliza la cota trapezoidal, se empleara en el método de Aceptación y Rechazo la **cota constante** $t(x) = k$ **más eficiente posible** (es decir, aquella que maximiza la probabilidad de aceptar un candidato)?

Solución: En el inciso (b) se determinó que el valor del parámetro es $c = \frac{9}{8}$. Por tanto, el algoritmo actual requiere en promedio

$$400 \times \frac{9}{8} = 450$$

iteraciones para generar las 400 muestras.

Por otro lado, la mejor cota constante es $t(x) = 1.5$, de modo que en este caso $c' = 1.5$. Aplicando el mismo razonamiento, el número esperado de iteraciones sería

$$400 \times 1.5 = 600.$$

En consecuencia, el uso de esta cota constante implica un aumento del

$$\frac{600 - 450}{450} = 33.\bar{3}\%$$

en la cantidad esperada de iteraciones necesarias para simular el tiempo de votación de todos los electores.

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Calcular correctamente el número esperado de iteraciones con el algoritmo actual ($400 \cdot c$, con $c = 9/8$) y con la mejor cota constante ($400 \cdot c'$, con $c' = 1.5$).
- **(1 punto)** Obtener el porcentaje de aumento $\frac{c'-c}{c} \times 100\%$ y expresarlo claramente (por ejemplo $33.\bar{3}\%$).

Formulario

Distribución	**PDF** $(f(x))$	**CDF** $(F(x))$	**Esperanza**	**Varianza**
Poisson(λ)	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Binomial(n, p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Uniforme(a, b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Geométrica(p)	$(1-p)^{x-1} p$	$1 - (1-p)^x$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Gamma(k, λ)	$\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$	$\int_0^x \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)}\, dt$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$

Sistema	P_0	P_n	**L**	$\mathbf{L_q}$
M/M/1	$1 - \frac{\lambda}{\mu}$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0,\ \forall n \geq 1$	$\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
M/M/1/K	$\frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0,\ \forall n = 0, \ldots, K$	$\frac{\lambda}{\mu} \frac{1 - (K+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K + K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}\right)}$	$L - \frac{\lambda(1 - P_K)}{\mu}$
M/M/c	$\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}}\right]^{-1}$	$\begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0, & 0 \leq n \leq c, \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c!\, c^{n-c}} P_0, & n \geq c+1, \end{cases}$	$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{\lambda}{c\mu}}{c!\left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)^2} P_0$	$L - \frac{\lambda}{\mu}$
M/M/c/K	$\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!} \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}}\right]^{-1}$	$\begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0, & 0 \leq n \leq c, \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c!\, c^{n-c}} P_0, & c+1 \leq n \leq K, \end{cases}$	$\sum_{n=0}^{K} n P_n$	$L - \frac{\lambda(1 - P_K)}{\mu}$

Suponiendo siempre estabilidad: para M/M/1, M/M/c, $\lambda < \mu$ o $\lambda < c\mu$.