Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123-2 – Modelos Estocásticos
Profesor Nicolás Vargas C.
Primer Semestre 2024

Interrogación 2

Duración: 2 horas y 30 minutos

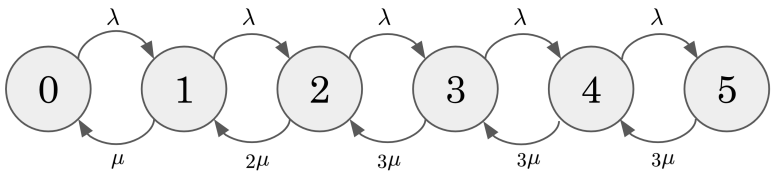
Problema 1 (20 pts.)

Buques de carga llegan a cargar contenedores en un puerto donde se encuentran tres grúas de carga. Los buques llegan a una tasa de 60 buques por hora, y forman una cola única frente a las grúas. Cada grúa toma un tiempo promedio de 4 minutos en cargar un buque.

1. (4 puntos) ¿Qué pasará con la cantidad de buques en la cola en el largo plazo?
2. (12 puntos) Suponga ahora que existe un sistema automático de despacho que no permite que se formen colas mayores a 2 buques (es decir, si llega un buque cuando hay dos buques en cola, este se ve redirigido a otro sector). Determine el número esperado de buques en la cola y el tiempo de espera promedio de los buques en la cola, en el largo plazo.
3. (4 puntos) Suponga que el costo de espera de un buque en cola es de $700 dólares por hora. En el largo plazo, ¿cuánto le cuestan por hora al puerto las esperas de buques en cola? Mantenga el supuesto de que no se pueden formar colas mayores a 2 buques.

Solucion Problema 1

1. Dado que la tasa de llegada (1 buque por minuto) es mayor que la tasa de atención del sistema multiplicada por el número de servidores ($3 \cdot 0.25 = 0.75$ buques por minuto), el sistema colapsará y la cola tenderá a infinito.
2. Este sistema corresponde a un sistema de espera M/M/3/5.



Luego, el sistema de ecuaciones a resolver es el siguiente:

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$
$$(\lambda + \mu) P_1 = \lambda P_0 + 2\mu P_2$$
$$(\lambda + 2\mu) P_2 = \lambda P_1 + 3\mu P_3$$

$$(\lambda + 3\mu)P_3 = \lambda P_2 + 3\mu P_4$$
$$(\lambda + 3\mu)P_4 = \lambda P_3 + 3\mu P_5$$
$$3\mu P_5 = \lambda P_4$$
$$\sum_{i=0}^{5} P_i = 1$$

Encontrando que:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \sum_{n=4}^{5} \frac{\lambda^n}{6 \cdot 3^{n-c}\mu^n}}$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0 \quad P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2}P_0 \quad P_3 = \frac{\lambda^3}{6\mu^3}P_0 \quad P_4 = \frac{\lambda^4}{18\mu^4}P_0 \quad P_5 = \frac{\lambda^5}{54\mu^5}P_0$$

Para el caso del número esperado de buques en la cola, se tiene que habrá cola si se está en los estados 4 y 5, de esta manera, el largo de cola esperado será:

$$L_q = \sum_{i=4}^{5} P_i(i-3) = P_4 + 2P_5$$

Por otro lado, se tiene que la tasa de llegada efectiva es:

$$\lambda_e = \lambda(1 - P_5)$$

Así, el tiempo promedio en la cola será:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} = \frac{P_4 + 2P_5}{\lambda(1 - P_5)}$$

3. En el largo plazo, las esperas de buques en la cola tendrá un costo para el puerto de:

$$700L_q = 700P_4 + 1400P_5$$

Problema 2 (20 pts.)

Imagine que queremos modelar la ocupación del ascensor de un edificio mediante el uso de una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Este edificio tiene cuatro pisos (contando la planta baja) y un subterráneo. Las personas llegan al edificio a una tasa de λ personas por hora, y cada persona se dirige equiprobablemente a uno de los tres pisos con habitaciones o al subterráneo. Además, el ascensor puede ser llamado desde cualquiera de los tres pisos con habitaciones a una tasa γ_i personas por hora, con $i \in \{1, 2, 3\}$.

Cuando el ascensor es llamado desde uno de los pisos con habitaciones, con probabilidad p, las personas van a la planta baja, y con probabilidad $1 - p$ van al subterráneo. Es importante notar que el ascensor permanece en el último piso de destino hasta que sea llamado nuevamente desde otro piso. Supondremos que el tiempo de desplazamiento entre los pisos es despreciable para simplificar nuestro modelo.

1. (8 puntos) Construya una Cadena de Markov en Tiempo Continuo que modele el estado de ocupación del ascensor. Explicite claramente los estados y sus respectivas tasas de transición.

   Hint: Cuando el ascensor es llamado desde algún piso, nos interesa dónde queda el ascensor después de ser usado.

2. (4 puntos) Justifique la existencia de una distribución de probabilidades estacionarias y construya el sistema de ecuaciones que permita calcularlas.

3. (4 puntos) Suponga que los cables del ascensor requieren de un mantenimiento que cuesta $\$c$ por cada hora que el cable está tensado. El cable solo no está tensado cuando el ascensor está en el subterráneo. Estime el valor esperado del costo de mantenimiento del cable del ascensor luego de t horas de funcionamiento.

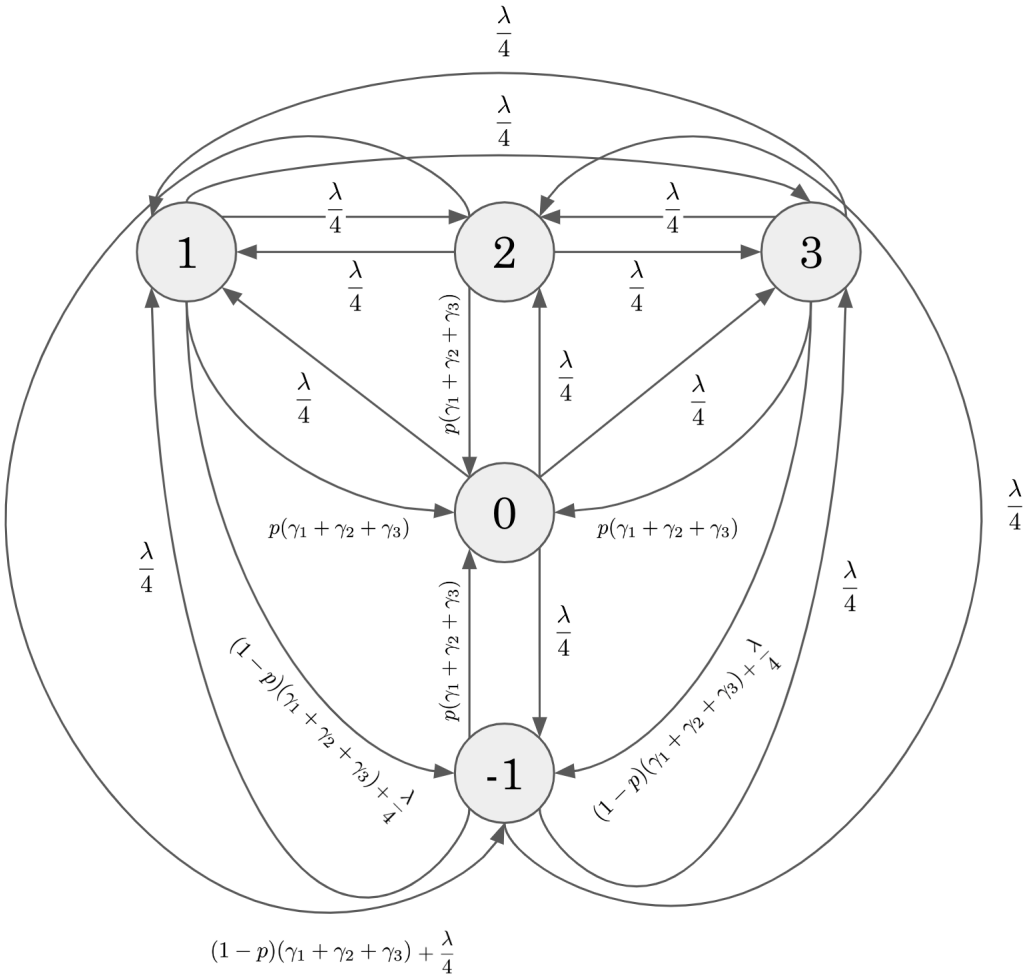
4. (4 puntos) Si el ascensor se encuentra en el subterráneo, determine el tiempo esperado para que el ascensor vuelva a estar en el subterráneo.

Solucion Problema 2

1. Definimos los estados de la CMTC en función del piso donde se encuentra el ascensor:

   - 0: El ascensor está en la planta baja.
   - 1: El ascensor está en el primer piso.
   - 2: El ascensor está en el segundo piso.
   - 3: El ascensor está en el tercer piso.
   - -1: El ascensor está en el subterráneo.

   Luego, la CMTC que modela el estado de ocupación es:



2. Dado que todos los estados están conectados y que la probabilidad de estar en un estado cualquiera existe y es independiente del estado inicial, se tiene que existe la distribución límite y por ende, una distribución de probabilidades estacionarias. Además, a partir del diagrama se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio en el largo plazo:

$$\begin{aligned}
\lambda P_0 &= p(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)(P_1+P_2+P_3+P_{-1}) \\
(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\frac{3\lambda}{4})P_1 &= \frac{\lambda}{4}P_{-1}+\frac{\lambda}{4}P_0+\frac{\lambda}{4}P_2+\frac{\lambda}{4}P_3 \\
(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\frac{3\lambda}{4})P_2 &= \frac{\lambda}{4}P_{-1}+\frac{\lambda}{4}P_0+\frac{\lambda}{4}P_1+\frac{\lambda}{4}P_3 \\
(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\frac{3\lambda}{4})P_3 &= \frac{\lambda}{4}P_{-1}+\frac{\lambda}{4}P_0+\frac{\lambda}{4}P_1+\frac{\lambda}{4}P_2 \\
(p(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)+\frac{3\lambda}{4})P_{-1} &= \frac{\lambda}{4}P_0+((1-p)(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)+\frac{\lambda}{4})(P_1+P_2+P_3) \\
P_0+P_1+P_2+P_3+P_{-1} &= 1
\end{aligned}$$

3. El costo de mantenimiento por hora es c si el ascensor está en cualquier piso menos el subterráneo, y 0 si está en el subterráneo. Por lo tanto, el costo esperado por hora es:

$$\mathbb{E}[\text{costo por hora}] = c\cdot(P_0+P_1+P_2+P_3) = c\cdot(1-P_{-1})$$

El valor esperado del costo de mantenimiento del cable del ascensor luego de t horas es:

$$\mathbb{E}[\text{costo en } t \text{ horas}] = c \cdot (1 - P_{-1}) \cdot t$$

4. Para calcular el tiempo esperado para volver al subterraneo, primero condicionamos sobre todos los posibles estados hacia los cuales puedo ir desde el subterraneo. De este modo:

$$\mathbb{E}[t \text{ volver al subterráneo}] = \sum_{i=0}^{3} P_{-1,i} \left(\mathbb{E}[t \text{ ir desde el subterraneo a } i] + \mathbb{E}[t \text{ ir desde } i \text{ al subterraneo}]\right)$$

donde

$$P_{-1,0} = \frac{p(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)}{p(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + \frac{3\lambda}{4}}$$
$$P_{-1,1} = P_{-1,2} = P_{-1,3} = \frac{\frac{\lambda}{4}}{p(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + \frac{3\lambda}{4}}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[t \text{ volver al subterráneo}] &= P_{-1,0} \left(\frac{1}{p(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)} + \frac{1}{\frac{\lambda}{4}} \right) \\
&\quad + P_{-1,1} \left(\frac{1}{\frac{\lambda}{4}} + \frac{1}{(1-p)(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + \frac{\lambda}{4}} \right) \\
&\quad + P_{-1,2} \left(\frac{1}{\frac{\lambda}{4}} + \frac{1}{(1-p)(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + \frac{\lambda}{4}} \right) \\
&\quad + P_{-1,3} \left(\frac{1}{\frac{\lambda}{4}} + \frac{1}{(1-p)(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + \frac{\lambda}{4}} \right) \\
&= P_{-1,0} \left(\frac{1}{p(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)} + \frac{4}{\lambda} \right) + (P_{-1,1} + P_{-1,2} + P_{-1,3}) \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{1}{(1-p)(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + \frac{\lambda}{4}} \right)
\end{aligned}$$

Problema 3 (20 pts.)

A un restaurante Benihana, los clientes llegan al establecimiento según un proceso Poisson con tasa promedio de λ clientes por hora. Al ingresar, los clientes se dirigen inicialmente al área de espera, que consiste en un bar. En este bar, los clientes son atendidos por 5 bartenders, con un tiempo de servicio que sigue una distribución exponencial con tasa μ_b clientes por hora. La capacidad del bar es de 10 sillas, y cuando el bar está lleno, los clientes no pueden ingresar al restaurante.

Una vez que los clientes finalizan su espera en el bar, pasan al área de cocina, donde 4 hay chefs que preparan la comida frente a ellos. En esta área, el tiempo de servicio de los chefs sigue una distribución exponencial con tasa μ_c clientes por hora. Finalmente, una vez que los clientes han terminado de disfrutar de su comida, abandonan el restaurante.

1. (2 puntos) En el restaurante descrito, ¿qué tipos de sistemas de espera existen?

2. (6 puntos) Modele mediante una Cadena de Markov en Tiempo Continuo cada área de atención del restaurante. Indique las tasas efectivas de entrada a cada etapa y las condiciones que se deben cumplir en cada una de ellas para asegurar que el sistema no colapse.

3. (4 puntos) Determine el número promedio de clientes en el restaurante.

4. (4 puntos) Si en promedio un cliente de Benihana gasta c_b en el bar y c_c en el área de cocina, estime la el monto que deja de recibir Benihana en un período de t horas porque el bar se encuentra lleno.

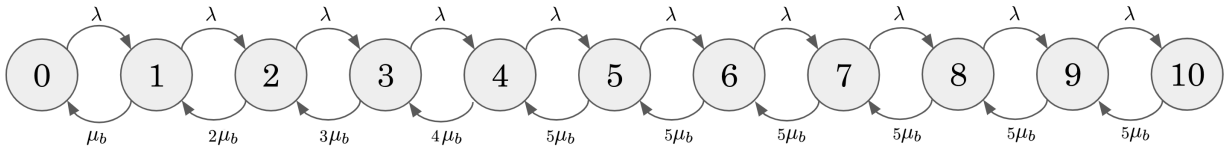
5. (4 puntos) Encuentre el tiempo medio de permanencia y el tiempo medio en cola de un cliente en el restaurante Benihana.

Solucion Problema 3

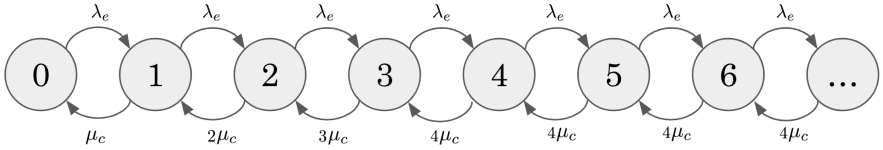
1. El área de espera en el bar es un sistema de espera $M/M/5/10$ y la cocina es un sistema de espera $M/M/4$.

2. Para esto podemos representar las dos partes del problema por separado. En cada una, los estados representan la cantidad i de pacientes en el área (en atención y en fila esperando atención), con $i \in [0, \infty)$.

   - Bar: Como el sistema capacidad finita, no se requiere de ninguna condición para asegurar que el sistema no colapse. El grafo para este sistema de la red es:



   - Cocina: En este caso $\lambda_e = \min\{\lambda(1-P_{10}), 5\mu_b\}$ y alcanzar estacionalidad se requiere que $\min\{\lambda(1-P_{10}), 5\mu_b\} < 4\mu_c$. El grafo para este sistema de la red es:



3. El número promedio de clientes en el restaurante es la suma de los números promedio de clientes en cada área.

$$L = L_b + L_c$$

Para el bar:

$$L_b = \sum_{i=0}^{10} i \cdot P_i^b$$

donde

$$P_0^b = \left[\sum_{n=0}^{5} \frac{\lambda^n}{n!\mu_b^n} + \frac{\lambda^5}{5!\mu_b^5} \cdot \frac{\lambda}{5\mu} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{5\mu_b}\right)^5}{1 - \frac{\lambda}{5\mu_b}} \right]^{-1}$$

$$P_n^b = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu_b^n} P_0^b & \text{si } 0 < n \leq 5 \\ \dfrac{\lambda^n}{5!5^{n-5}\mu_b^n} P_0^b & \text{si } 5 < n \leq 10 \end{cases}$$

Para el área de cocina:

$$L_c = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P_i^c = \left(\sum_{i=0}^{4} \frac{i}{i!} \cdot \left(\frac{\lambda_e}{\mu_c}\right)^i + \sum_{i=5}^{\infty} \frac{i}{4! \cdot 4^{i-4}} \cdot \left(\frac{\lambda_e}{\mu_c}\right)^i \right) \cdot P_0^c$$

donde

$$P_0^c = \left[1 + \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i!} \cdot \left(\frac{\lambda_e}{\mu_c}\right)^i + \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{4! \cdot 4^{i-4}} \cdot \left(\frac{\lambda_e}{\mu_c}\right)^i \right]^{-1}$$

4.

$$\lambda P_{10}(c_b + c_c)t$$

5. Para el tiempo medio de permanencia de un cliente en el restaurante, consideramos el tiempo en el bar y en el área de cocina.

$$W = W_b + W_c$$

Por la ecuación de Little:

$$W = \frac{L_b}{\lambda(1 - P_{10})} + \frac{L_c}{\min\{\lambda(1 - P_{10}), 5\mu_b\}}$$

Y su tiempo medio en cola es:

$$\begin{aligned}
W_q &= W_{qb} + W_{qc} \\
&= \frac{L_{qb}}{\lambda(1 - P_{10})} + \frac{L_{qc}}{\min\{\lambda(1 - P_{10}), 5\mu_b\}} \\
&= \frac{\sum_{i=5}^{10}(i-5)\cdot P_i^b}{\lambda(1 - P_{10})} + \frac{\sum_{i=4}^{\infty}(i-4)\cdot P_i^c}{\min\{\lambda(1 - P_{10}), 5\mu_b\}} \\
&= \frac{\sum_{i=6}^{10}(i-5)\cdot P_i^b}{\lambda(1 - P_{10})} + \frac{\sum_{i=5}^{\infty}(i-4)\cdot P_i^c}{\min\{\lambda(1 - P_{10}), 5\mu_b\}} \\
&= \frac{\sum_{i=6}^{10}(i-5)\cdot P_i^b}{\lambda(1 - P_{10})} + \frac{\sum_{i=5}^{\infty}(i-4)\cdot P_i^c}{\min\{\lambda(1 - P_{10}), 5\mu_b\}} \\
&= \frac{\sum_{i=6}^{10}\frac{(i-5)\lambda^n}{5!5^{n-5}\mu_b^n}P_0^b}{\lambda(1 - P_{10})} + \frac{\sum_{i=5}^{\infty}\frac{(i-4)\lambda^n}{4!4^{n-4}\mu_b^n}P_0^c}{\min\{\lambda(1 - P_{10}), 5\mu_b\}}
\end{aligned}$$

Distribución	**PDF ($f(x)$)**	**CDF ($F(x)$)**	**Esperanza**	**Varianza**
Poisson(λ)	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Binomial(n, p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Uniforme(a, b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Geométrica(p)	$(1-p)^{x-1} p$	$1 - (1-p)^x$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

Sistema	$\boldsymbol{P_0}$	$\boldsymbol{P_n}$	**L**	$\mathbf{L_q}$
M/M/1	$1 - \frac{\lambda}{\mu}$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad \forall i \in \{1, 2, ...\}$	$\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
M/M/1/K	$\frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad \forall i \in \{1, 2, ..., K\}$	$\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K - K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K + K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}\right)}\right)$	$L - \frac{\lambda(1-P_K)}{\mu}$
M/M/c	$\left[\sum_{n=0}^{c}\left(\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right) + \frac{\lambda^c}{c!\mu^c} \cdot \frac{\frac{\lambda}{c\mu}}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}}\right]^{-1}$	$\frac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0 \quad \forall i \in \{1, 2, ..., c\}$ $\frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} P_0 \quad \forall i \in \{c+1, ...\}$	$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!(1-\frac{\lambda}{c\mu})^2}\frac{\lambda}{\mu}$	$L - \frac{\lambda}{\mu}$
M/M/c/K	$\left[\sum_{n=0}^{c}\left(\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right) + \frac{\lambda^c}{c!\mu^c} \cdot \frac{\lambda}{c\mu} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c}}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}}\right]^{-1}$	$\frac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0 \quad \forall i \in \{1, 2, ..., c\}$ $\frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} P_0 \quad \forall i \in \{c+1, ..., K\}$	$\sum_{n=0}^{K} nP_n$	$L - \frac{\lambda(1-P_K)}{\mu}$