Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 Modelos Estocásticos
Profesor Maximiliano González R.
Segundo Semestre 2023

Examen

Tiempo total: 2 horas y 30 minutos

Problema 1 (20 puntos)

Un equipo de alumnos de la Escuela de Ingeniería UC determinó que la atención de clientes en un pequeño supermercado en el sur de Chile se puede modelar como un sistema $M/M/2/4$, donde los tiempos entre llegadas de clientes tienen una media de $1/\lambda$ (minutos) y la atención de cada cajero toma un tiempo medio de $1/\mu$ (minutos).

a) **(5 puntos)** Dibuje un grafo para este sistema donde se represente los estados y todas las tasas de transición instantánea entre estados. Indique las condiciones de equilibrio de este sistema.

b) **(5 puntos)** Escriba todas las ecuaciones de balance en el largo plazo para este sistema y resuelva el sistema. (Hint: recuerde la relación entre P_n y P_0)

Suponga que $\lambda = 4$ clientes por minuto y $1/\mu = 3$ minutos.

d) **(2 puntos)** En el largo plazo, ¿cuál es la cantidad media de clientes en cola?

e) **(2 puntos)** Suponga que con cada cliente atendido se obtiene un ingreso esperado de \$100, determine la tasa media de ingresos al sistema (en \$ por minuto) en el largo plazo.

f) **(3 puntos)** Calcule el tiempo medio de estadía en el sistema de un cliente cualquiera en el largo plazo utilizando la ecuación de Little.

g) **(3 puntos)** Calcule el tiempo medio de estadía en el sistema de un cliente cualquiera en el largo plazo utilizando una esperanza condicional.

Problema 2 (24 puntos)

Suponga que usted y un/a amigo/a desean emprender durante este verano para así juntar dinero y poder viajar durante 2024. Luego de pasar por el curso de Modelos Estocásticos usted considera adecuado modelar el proceso de compra del único y novedoso producto que comercializarán como un proceso de Poisson de tasa λ clientes por día. Sin embargo, dado que es un producto nunca antes visto en Chile, usted y su socio/a no saben a qué precio vender el producto dado que no tienen mayor información sobre la disposición a pagar que tendrá cada potencial cliente.

Como no quiere dejar nada al azar, usted decide modelar la disposición a pagar (es decir, el monto máximo que el cliente estará dispuesto a entregarle por una unidad del producto) como una variable aleatoria W, cuya función de densidad de probabilidad es $f_W(w)$ conocida y continua para el intervalo $0 \leq w < \infty$ (asuma que si conoce f puede integrarla y obtener F de ser necesario). Finalmente, un potencial cliente comprará una y solo una unidad del producto siempre y cuando su disposición a pagar sea mayor o igual al precio fijado.

a) **(3 puntos)** Suponga que deciden vender el producto a un precio P por unidad. Entregue una expresión para $c(P)$, definido como la probabilidad de que un cliente cualquiera le compre. Puede asumir que cuenta con inventario ilimitado.

b) **(3 puntos)** Entregue una expresión para la distribución de probabilidad del número de clientes que realiza una compra en un día cualquiera. Puede asumir que cuenta con inventario ilimitado.

c) **(3 puntos)** Entregue una expresión para la distribución de probabilidad del número de clientes que llega con la intención de comprar, pero no compra por el alto precio en un día cualquiera. Puede asumir que cuenta con inventario ilimitado.

d) **(3 puntos)** Entregue una expresión para el ingreso esperado por ventas en un día cualquiera en función de los parámetros conocidos.

e) **(4 puntos)** Naturalmente, antes dicha incertidumbre, usted y su socio/a desean maximizar el ingreso esperado del negocio. Para ello deben encontrar el precio P^* que permita hacerlo. ¿Cómo lo haría?

Luego del análisis teórico asumiendo inventario infinito, llega la hora de tomar decisiones y deciden abastecerse de N unidades del producto. Al ser este muy raro, el proceso de abastecimiento es largo y costoso, por lo que no existe posibilidad de re-abastecerse (al menos durante este verano).

f) **(4 puntos)** Entregue una expresión para el ingreso diario esperado por ventas $I(N, P)$.

Suponga que el emprendimiento operará durante T días sin re-abastecerse del producto ni modificar el precio, con un inventario inicial de N unidades.

g) **(4 puntos)** Argumente si es posible modelar el nivel de inventario disponible como una CMTD, como una CMTC, o de ambas maneras. Indique en cada caso qué diferencias existiría en términos de la modelación (definición y espacio de estados, transición entre estados, etc). Dibuje el grafo con sus respectivos elementos para la o las formas de modelar el problema que argumentó anteriormente.

Problema 3 (16 puntos)

a) Considere una variable aleatoria X con una función de densidad de probabilidad triangular (α, β, γ).

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-\alpha)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}, & \alpha \leq x \leq \gamma \\ \dfrac{2(\beta-x)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}, & \gamma \leq x \leq \beta \end{cases} \text{, para } \gamma \in (\alpha, \beta)$$

i) **(8 puntos)** Desarrolle detalladamente un algoritmo de Aceptación y Rechazo para obtener instancias de X. Identifique todas las funciones y parámetros necesarios y entregue una lista de pasos a seguir.

ii) **(6 puntos)** Suponga los siguientes parámetros para la distribución triangular: $(\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 1.5)$. Utilizando el algoritmo congruencial lineal, genere las instancias Uniforme (0,1) necesarias para obtener una instancia de la variable X. Considere $X_0 = 37$, $a = 19$, $c = 33$ y $m = 100$.

iii) **(2 puntos)** Si utiliza su algoritmo, ¿cuántas iteraciones en promedio deberá realizar para obtener 1000 instancias?

b) **(Bonus 4 puntos)** Utilizando el mismo algoritmo congruencial del punto *ii*), realice una iteración del algoritmo estudiado para obtener una instancia de una variable aleatoria $Normal(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 10$ y $\sigma^2 = 4$. Indique si logra obtener una instancia o no (y su valor si corresponde).

Algunas fórmulas

- Sea $U \sim Uniforme(a, b)$, entonces para $x \in [a, b)$, $F_U(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$
- Ecuación de Little: $L = \lambda_e \cdot W$
- Sistema $M/M/1$:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad P_0 = 1 - \rho \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Relación entre P_n y P_0 para cualquier sistema de espera markoviano

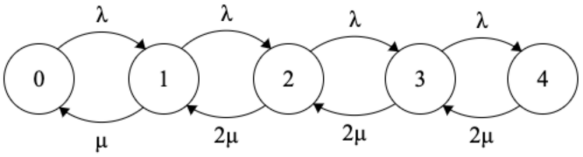
$$P_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdot \lambda_{n-2} \ldots \lambda_0}{\mu_n \cdot \mu_{n-1} \ldots \mu_1} P_0$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesor Maximiliano González
Segundo Semestre 2023

Pauta Examen

Solución Problema 1

(a) Partimos graficando el sistema, donde el número del estado corresponde a la cantidad de personas en el sistema:



Como este es un sistema con capacidad finita, no puede diverger, por lo que no se necesitan condiciones de equilibrio.

(2 puntos) Por representar correctamente los estados
(2 puntos) Por plantear correctamente las tasas de transición instantánea
(1 punto) Por condición de equilibrio

(b) Las ecuaciones de balance en el largo plazo pueden plantearse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\lambda P_0 &= \mu P_1 \\
(\lambda + \mu) P_1 &= \lambda P_0 + 2\mu P_2 \\
(\lambda + 2\mu) P_2 &= \lambda P_1 + 2\mu P_3 \\
(\lambda + 2\mu) P_3 &= \lambda P_2 + 2\mu P_4 \\
2\mu P_4 &= \lambda P_3 \\
\sum_{i=0}^{4} P_i &= 1
\end{aligned}$$

O, equivalentemente, se puede utilizar la relación de P_0 y P_n en un sistema, tal que:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{\lambda}{\mu} P_0 \\
P_2 &= \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0 \\
P_3 &= \frac{\lambda^3}{4\mu^3} P_0 \\
P_4 &= \frac{\lambda^4}{8\mu^4} P_0 \\
\sum_{i=0}^{4} P_i &= 1
\end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos que:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{4\mu^3} + \frac{\lambda^4}{8\mu^4}}$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{4\mu^3} + \frac{\lambda^4}{8\mu^4}}$$
$$P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{4\mu^3} + \frac{\lambda^4}{8\mu^4}}$$
$$P_3 = \frac{\lambda^3}{4\mu^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{4\mu^3} + \frac{\lambda^4}{8\mu^4}}$$
$$P_4 = \frac{\lambda^4}{8\mu^4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{4\mu^3} + \frac{\lambda^4}{8\mu^4}}$$

(2 puntos) Por plantear ecuaciones
(3 puntos) Por resolver el sistema

(c) Comenzamos encontrando los valores de P_i, reemplazando $\lambda = 4$ y $\frac{1}{\mu} = 3$ en el sistema resuelto anteriormente. Se tiene que:

$$P_0 = \frac{1}{3109} \approx 0.0003$$
$$P_1 = \frac{12}{3109} \approx 0.0039$$
$$P_2 = \frac{72}{3109} \approx 0.0232$$
$$P_3 = \frac{432}{3109} \approx 0.1390$$
$$P_4 = \frac{2592}{3109} \approx 0.8337$$

Luego, considerando que la cola consiste en solo las últimas 2 personas en entrar al sistema, la cantidad media de clientes en esta se puede expresar de la siguiente manera:

$$L_q = \sum_{i=2}^{4} (i-2) \cdot P_i = 1 \cdot P_3 + 2 \cdot P_4$$
$$L_q = 0.1390 + 2 \cdot 0.8337 = 1.8064 \text{ clientes}$$

(1 punto) Por plantear ecuación
(1 punto) Por resultado correcto

(d) Para calcular el ingreso esperado, se debe tomar en cuenta que cada atención en el sistema implica una transición de un estado i a $i-1$, dado que cuando una persona es atendida, esta deja el sistema.

Luego, considerando el tiempo en el largo plazo que el sistema se encuentra en cada estado y la tasa de atención en cada uno, podemos obtener una expresión para la tasa media de atención del sistema en el largo plazo.

$$= P_0 \cdot 0 + P_1 \cdot \mu + P_2 \cdot 2\mu + P_3 \cdot 2\mu + P_4 \cdot 2\mu$$
$$= 0 + 0.0039 \cdot \frac{1}{3} + 0.0232 \cdot \frac{2}{3} + 0.1390 \cdot \frac{2}{3} + 0.8337 \cdot \frac{2}{3})$$
$$= 0.6652 \text{ atenciones por minuto}$$

Finalmente, multiplicando por el ingreso esperado, se tiene:

$$= 100 \cdot 0.6652$$
$$= \$66.52 \text{ por minuto}$$

(1 punto) Por plantear ecuación
(1 punto) Por resultado correcto

(e) Utilizando la ecuación de Little, sabemos que:

$$L = \lambda_e \cdot W$$

Donde λ_e es la tasa efectiva de entrada y L la cantidad media de clientes en el sistema. Podemos calcular ambas medidas de la siguiente manera:

$$\lambda_e = \lambda(1 - P_4) = 4(1 - 0.8337) = 0.6652$$
$$L = \sum_{i=0}^{4} i \cdot P_i = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 = 3.8021$$

Luego, reemplazamos y obtenemos que el tiempo medio de estadía en el sistema en el largo plazo es:

$$W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{3.8021}{0.6652} \approx 5.71 \text{ minutos}$$

(1 punto) Por tasa efectiva
(1 punto) Por cantidad media de clientes
(1 punto) Por resultado correcto usando Little

(f) Una forma alternativa de plantear el problema de encontrar el tiempo medio de estadía de los clientes, es considerar que cada vez que un cliente llega, este deberá esperar una cantidad de tiempo que depende de la cantidad de personas que ya hay en el sistema.

De esta forma, tomando T_i como el tiempo que el cliente i pasa en el sistema, se tiene que:

$$E[T] = \sum_{0}^{4} E[T_i|i] \cdot P_i$$

Para encontrar el tiempo promedio de atención en cada uno de estos casos, se utiliza la tasa de atención, tomando en cuenta cuánto debe esperar para ser atendido:

$E[T_0|0] = 0$ minutos, dado que no hay nadie a quien atender.
$E[T_1|1] = \frac{1}{\mu} = 3$ minutos, lo que equivale al tiempo de atención del cliente dado que no espera que lo atiendan.
$E[T_2|2] = \frac{1}{\mu} = 3$ minutos, lo que equivale al tiempo de atención del cliente dado que no espera que lo atiendan.
$E[T_3|3] = \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{\mu} = 4.5$ minutos, lo que equivale a esperar que se desocupe un cajero y luego ser atendido.
$E[T_4|4] = \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{\mu} = 6$ minutos, esperar a las dos personas de adelante y luego ser atendido.

Con esto, reemplazamos los valores en la esperanza y se obtiene:

$$E[T_i|P_i] = 0 \cdot P_0 + 3 \cdot P_1 + 3 \cdot P_2 + 4.5 \cdot P_3 + 6 \cdot P_4 \approx 5.71 \text{ minutos}$$

lo cual corresponde al mismo valor obtenido utilizando la ecuación de Little.

(1 punto) Por plantear esperanza
(1 punto) Por encontrar tiempos medios
(1 punto) Por resultado correcto

Solución Problema 2

(a) Partimos definiendo $c(P)$. Como sabemos que f_W representa la probabilidad de estar dispuesto a pagar como máximo cierto precio, podemos integrar esta función para obtener la distribución acumulada de esta variable aleatoria.

Luego, si consideramos la suma por todos los precios mayores o iguales a P, tendremos la proporción de clientes con una disposición a pagar de al menos P.

$$c(P) = 1 - \int_0^P f_W(w)dw = 1 - F_W(P)$$

(1 punto) Por utilizar distribución acumulada
(2 puntos) Por expresión correcta

(b) Para saber cuantos clientes compran dado un precio P, se deben considerar cuantos clientes llegan, y para cada uno de estos, si compran o no (que son independientes), luego al ser cierta cantidad de los que llegan dependiendo de una probabilidad, esto será un proceso de Poisson descompuesto, con la tasa de compras dependiendo de la probabilidad de aceptación:

$$\{N(t), t \geq 0\} \text{ proceso Poisson}(\lambda) \rightarrow \text{llegada de clientes}$$

$$\{N_1(t), t \geq 0\} \text{ proceso Poisson}(\lambda \cdot c(P)) \rightarrow \text{compra de clientes}$$

Con esto, la distribución de clientes que compran es de la forma:

$$\mathbb{P}(N_1(t) = k) = \frac{e^{(-\lambda t \cdot (1 - F_W(P)))} \cdot (\lambda t \cdot (1 - F_W(P)))^k}{k!}$$

(1 punto) Por identificar descomposición del proceso
(2 puntos) Por expresión correcta

(c) Ahora, se considera el caso donde deciden no comprar, es decir, el precio es más alto que su disposición a pagar, y por ende, un proceso Poisson con λ por la probabilidad de no aceptar:

$$\{N(t), t \geq 0\} \text{ proceso Poisson}(\lambda) \rightarrow \text{llegada de clientes}$$

$$\{N_2(t), t \geq 0\} \text{ proceso Poisson}(\lambda \cdot (1 - c(P))) \rightarrow \text{no compra de clientes}$$

Con esto, la distribución de clientes que no compran es de la forma:

$$\mathbb{P}(N_2(t) = k) = \frac{e^{(-\lambda t \cdot (F_W(P))} \cdot (\lambda t \cdot F_W(P))^k}{k!}$$

(1 punto) Por identificar descomposición del proceso
(2 puntos) Por expresión correcta

(d) Para obtener el ingreso esperado se deben considerar los clientes que realizan una compra, multiplicado por el precio de venta:

$$\begin{aligned} \textit{Ingreso Esperado} &= E[N(1) - N(0)] \cdot c(P) \cdot P \\ &= \lambda \cdot (1 - F_W(P)) \cdot P \end{aligned}$$

(3 puntos) Por expresión correcta

(e) Para obtener un precio tal que se maximicen los ingresos, se debe derivar la expresión anterior con respecto al precio e igualar a 0. De esta manera, se encuentra un precio óptimo para los objetivos de la empresa.

Del inciso anterior se tiene que los ingresos en función del precio equivalen a lo siguiente:

$$I(w) = \lambda \cdot (1 - F_W(w)) \cdot P$$

Luego, derivando:

$$\begin{aligned}\frac{dI(w)}{dw} &= \frac{d}{dw}(\lambda \cdot (1 - F_W(w)) \cdot w) \\ &= \lambda - (\lambda \cdot F_W(w) + \lambda \cdot w \cdot f_W(w))\end{aligned}$$

Finalmente, igualando la expresión a 0, se obtendría $P^* = w^*$:

$$\lambda \cdot (1 - F_W(w^*) - w^* \cdot f_W(w^*)) = 0$$

Dado que $\lambda \neq 0$, igualamos el paréntesis a 0:

$$\begin{aligned}1 - F_W(w^*) - w^* \cdot f_W(w^*) &= 0 \\ w^* &= \frac{1 - F_W(w^*)}{f_W(w^*)}\end{aligned}$$

(2 puntos) Por explicar cómo obtener el máximo
(2 puntos) Por derivar y obtener expresión correcta

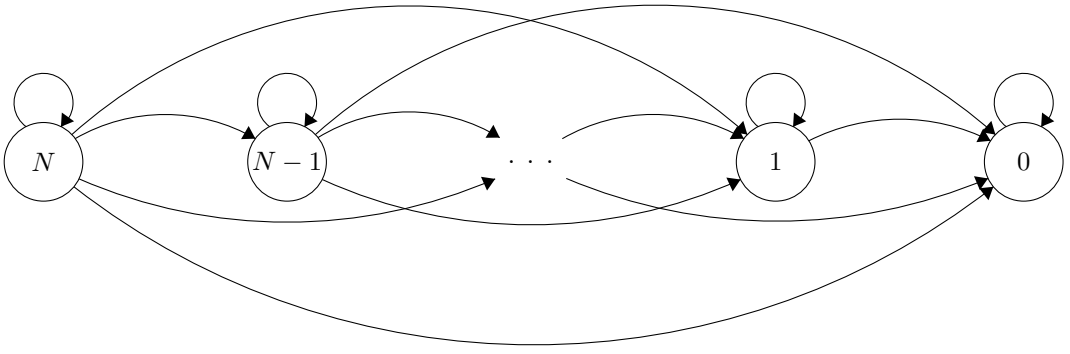
(f) Cuando se agrega el factor de inventario limitado, se debe tomar en cuenta que después de cierta cantidad de compras (clientes que si decidieron aceptar el precio), no se seguirá vendiendo más. Tomando k como la cantidad que llegan a comprar:

$$\{N_1(t), t \geq 0\} \text{ proceso Poisson}(\lambda \cdot c(P)) \rightarrow \text{compra de clientes}$$

$$I(N, P) = \sum_{k=0}^{N} P \cdot \mathbb{P}(N_1(1) - N_1(0) = k) \cdot k + \sum_{k=N+1}^{\infty} P \cdot \mathbb{P}(N_1(1) - N_1(0) = k) \cdot N$$

(1 puntos) Por plantear esperanza en función de proceso descompuesto
(3 puntos) Por expresión de ambos casos de esperanza

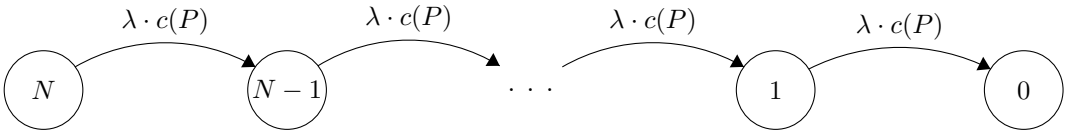
(g) Para modelar esto como una CMTD, se puede definir cada estado como la cantidad actual en el inventario, es decir, de 0 hasta N. Con esto, la probabilidad de transición entre dos estados i, j corresponde a la probabilidad de que exactamente $i - j$ clientes realizan una compra en cierto día, lo que fue calculado en el ítem b.



Las probabilidades de transición vendrían a ser las siguientes:

$$P_{ij} = \begin{cases} \mathbb{P}(N_1(1) - N_1(0) = i - j) & \forall i, j \in [0, N], i \geq j, j \neq 0 \\ \sum_{k=i}^{\infty} \mathbb{P}(N_1(1) - N_1(0) = k - j) & \forall i \in [0, N], j = 0 \\ 1 & i = j = 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \quad (1)$$

Para modelar como una CMTC, existirán los mismos estados que para el caso discreto (la cantidad de 0 a N). En este modelo, las transiciones serán únicamente al estado inmediatamente inferior (venta de una unidad) con tasa $\lambda \cdot c(P)$.



Las tasas de transición instantánea vendrían a ser las siguientes:

$$q_{i,i-1} = \lambda \cdot c(P) = \lambda(1 - F_W(P)) \quad \forall i \in [1, N]$$

(2 puntos) Por modelar correctamente como una CMTD
(2 puntos) Por modelar correctamente como una CMTC

Solución Problema 3

(a)

i. En primer lugar, se debe determinar una función $t(x)$ que acote superiormente a la función $f_X(x)$ en todo su dominio. Una manera simple de realizar esto es crear una función constante cuyo valor es el máximo de $f_X(x)$ en el dominio respectivo. Como $f_X(x)$ está compuesta por 2 rectas, una creciente y otra decreciente, su valor máximo se encuentra en el límite superior/inferior de cada intervalo respectivamente, es decir, en $x = \gamma$. Se define entonces:

$$t(x) = f_X(\gamma) = \frac{2}{\beta - \alpha}, x \in [\alpha, \beta]$$

A continuación, como $t(x)$ no es una función de densidad, se debe definir un c que la convierta en una:

$$c = \int_\alpha^\beta \frac{2}{\beta - \alpha} dx = \frac{2}{\beta - \alpha} \cdot x \Big|_\alpha^\beta = 2$$

$$h(x) = \frac{t(x)}{c} = \frac{1}{\beta - \alpha}$$

Por lo tanto, $h(x) \sim Uniforme(\alpha, \beta)$.

Finalmente, es necesario definir:

$$g(x) = \frac{f_X(x)}{t(x)} = \begin{cases} \frac{x - \alpha}{\gamma - \alpha}, & \alpha \leq x \leq \gamma \\ \frac{\beta - x}{\beta - \gamma}, & \gamma \leq x \leq \beta \end{cases} \text{ para } \gamma \in (\alpha, \beta) \quad (2)$$

Con todos los elementos necesarios ya calculados, el algoritmo de Aceptación y Rechazo es el siguiente:

1. Generar una instancia $U \sim Uniforme(0, 1)$
2. Generar una instancia de $Y \sim h(y)$, utilizando otra instancia $\sim Uniforme(0, 1)$ mediante el método de la transformada inversa.
3. Si $U \leq g(Y)$, entonces hacer $X = Y$. En caso contrario, volver al primer paso.

(1 punto) Por encontrar $t(x)$
(1 punto) Por encontrar c y $h(x)$
(2 puntos) Por definir $g(x)$
(4 puntos) Por desarrollar el algoritmo

ii. Para realizar una primera iteración del algoritmo anterior, es necesario contar con 2 instancias $Uniforme(0, 1)$. Utilizando el algoritmo de congruencia lineal, se tiene que:

$$Z_i = (\alpha \cdot Z_{i-1} + c) \ mod \ m$$
$$U_i = \frac{Z_i}{m}$$

Reemplazando con los parámetros entregados:

$$Z_i = (19 \cdot Z_{i-1} + 33) \ mod \ 100$$
$$U_i = \frac{Z_i}{100}$$

Con esto, encontramos nuestros primeros dos números aleatorios de U_i:

i	Z_i	U_i
0	37	-
1	36	0.36
2	17	0.17

Antes de utilizar el algoritmo de aceptación y rechazo, debemos contar con distintas funciones y parámetros. Reemplazando con $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 1.5$ se tiene que:

$$t(x) = f_X(1.5) = \frac{2}{3-1} = 1, x \in [1,3]$$

$$c = \int_1^3 1dx = x\Big|_1^3 = 2$$

$$h(x) = \frac{t(x)}{c} = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \frac{f_X(x)}{t(x)} = \begin{cases} 2(x-1), & 1 \leq x \leq 1.5 \\ \dfrac{2(3-x)}{3}, & 1.5 \leq x \leq 3 \end{cases} \tag{3}$$

Finalmente, utilizando el algoritmo:

1. $U_1 = 0.36$
2. $U_2 = 0.17$, generamos Y a partir de U_2, utilizando el método de la transformada inversa:

$$\begin{aligned} U &= \int_\alpha^Y \frac{1}{\beta - \alpha} = \frac{Y - \alpha}{\beta - \alpha} \\ Y - \alpha &= U(\beta - \alpha) \\ Y &= U(\beta - \alpha) + \alpha \\ Y &= 2 \cdot U + 1 \end{aligned}$$

   Luego, $Y = 2 \cdot 0.17 + 1 = 1.34$
3. Como $U_1 = 0.36 \leq g(Y) = 0.68$, entonces acepto $Y = 1.34$ como instancia de la variable X.

(2 puntos) Por generar instancias
(4 puntos) Por utilizar el algoritmo correctamente

iii. Como en el algoritmo de Aceptación y Rechazo el número esperado de iteraciones hasta obtener una instancia distribuye Geométrica($\frac{1}{c}$), para obtener 1000 instancias, se deberá realizar en promedio $1000 \cdot c = 1000 \cdot 2 = 2000$ iteraciones.

(1 punto) Por indicar que distribuye Geómetrica
(1 punto) Por resultado correcto

(b) **Bonus**
El algoritmo de Aceptación y Rechazo para generar instancias de una variable aleatoria $Normal(0,1)$ se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Generar una instancia $U \sim Uniforme(0,1)$
2. Generar una instancia de Y con una distribución exponencial a la tasa 1, es decir, generar $U' \sim Uniforme(0,1)$ y establecer $Y = -ln(1-U')$
3. Si $U \leq e^{\frac{-(Y-1)^2}{2}}$, sea $|Z| = Y$, en otro caso volver a 1
4. Generar una instancia $U'' \sim Uniforme(0,1)$. Sea $Z = |Z|$ si $U'' \leq 0.5$, sea $Z = -|Z|$ si $U'' > 0.5$

Luego, utilizando el algoritmo congruencial del punto ii), se generan las siguientes instancias:

i	Z_i	U_i
0	37	-
1	36	0.36
2	17	0.17
3	56	0.56

Finalmente, se puede proceder a realizar una iteración del algoritmo de Aceptación y Rechazo:

1. $U = 0.36$
2. $U' = 0.17$, generamos Y a partir de U', utilizando $Y = -ln(1-U') \approx 0.186$

3. Como $U = 0.36 \leq e^{\frac{-(Y-1)^2}{2}} \approx 0.718$, sea $|Z| = Y$.
4. Como $U'' = 0.56 > 0.5$, sea $Z = -|Z|$, por lo tanto aceptamos $z = -0.186$ como instancia de una variable aleatoria $Normal(0, 1)$, lo que corresponde a $z = 9.636$ en una $Normal(10, 4)$.

(3 puntos) Por detallar un algoritmo correcto
(1 punto) Por resultado correcto