Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 Modelos Estocásticos
Profesor Maximiliano González R.
Primer Semestre 2023

Interrogación 2

Tiempo total: 2 horas y 30 minutos

Algunas fórmulas

◇ Series:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}\text{, si } |a| < 1.$$

◇ Ecuación de Little:

$$L = \lambda_e \cdot W$$

◇ Sistemas elementales de espera en estado estacionario:

$M/M/1$:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad P_0 = 1-\rho \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$M/M/2$:

$$L = \frac{2\cdot\rho}{1-\rho^2} \qquad P_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} \qquad \rho = \frac{\lambda}{2\cdot\mu}$$

$M/M/1/K$:

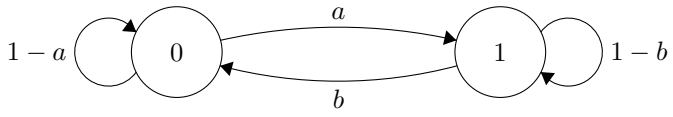
$$L = \left(\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K - K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K + K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}\right)$$

$M/G/1$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \lambda\mathbb{E}(S) + \frac{\lambda^2\mathbb{E}(S^2)}{2(1-\lambda\mathbb{E}(S))}$$

Problema 1 (20 puntos)

a) **(4 puntos)** Considere una CMTD representada por el siguiente grafo



Pruebe que el estado 0 es recurrente. (*Hint*: demuestre que $F(0,0) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(0,0) = 1$).

b) Argumente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas **(2 puntos c/u)**:

i) En una CMTD finita el proceso podría comenzar en una clase A, luego visitar otra clase B y posteriormente regresar a la clase A e iterar dentro de ella en el largo plazo.

ii) Sean i y j dos estados de una CMTD que se comunican. Si se sabe que j es periódico de período 2, entonces se cumple que $F(i,i) = 1$ y que $F_k(i,i) > 0$ para k par.

iv) En un sistema M/M/1 si la tasa de llegada es igual a la tasa de atención, la longitud media de la cola será 0.

c) **(3 puntos)** ¿Puede existir una CMTD con espacio de estados 0, 1, 2 que posea distribución estacionaria pero no distribución límite? Si es posible, entregue un ejemplo e indique cómo se interpreta este resultado. Si no es posible armar tal cadena, explique por qué.

d) **(4 puntos)** Considere un sistema M/M/5 en que la tasa de llegadas es λ y la tasa de atención es μ. Si en un instante hay dos clientes siendo atendidos, digamos, los clientes a y b, entregue una expresión para la probabilidad de que el cliente a salga del sistema antes que b, y que tanto el tiempo de atención de a como el de b sean mayores a $\frac{1}{\mu}$.

e) **(3 puntos)** Considere un sistema $M/G/\infty$ en que la llegada de clientes es a tasa $\lambda > 0$ y que los tiempos de atención tienen distribución Uniforme en el intervalo $[a,b]$, con $0 < a < b$. Determine el valor de las medidas de desempeño L_q y W para este sistema.

Problema 2 (20 puntos)

Parte 1
Una CMTD $\{X_n, n \geq 0\}$ tiene cuatro estados $\{A, B, C, D\}$ y la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Suponga que la distribución del estado inicial está dada por $f^{(0)^T} = (0.6 \;\; 0.4 \;\; 0 \;\; 0)$.

a) **(2 puntos)** Determine $P\{X_1 = A,\ X_2 = B,\ X_3 \neq C\}$.

b) **(4 puntos)** ¿Qué evento tiene mayor probabilidad?

i) Visitar C por primera vez luego de 4 etapas.

ii) Que el sistema se encuentre en el estado D en la etapa 2.

Parte 2
Suponga que usted administra un foodtruck donde uno de los principales insumos es el aceite. En base a información histórica se ha determinado que la demanda implica un consumo de aceite durante un período de 3 días dado por

Demanda (litros)	0	1	2	3
Probabilidad	0.4	0.3	0.2	0.1

Suponga que su foodtruck se surte de aceite a primera hora cada 3 días, sin embargo, en cada entrega se recibe solo un litro y siempre se utiliza el aceite más viejo disponible. Si en un determinado período se requiere más aceite del que se tiene, se hace un pedido de emergencia por la cantidad (litros) restantes a un costo C (más alto). Finalmente, el aceite es descartado si en 12 días no ha sido utilizado.
Sea X_n el número de litros en inventario justo después de una entrega normal.

a) **(4 puntos)** Modele el sistema descrito como una CMTD. Defina los estados, clasifíquelos y calcule la matriz de probabilidades de trancisión P. Argumente sobre la existencia de distribución límite o estacionaria en el largo plazo.

b) **(4 puntos)** Calcule la distribución correspondiente en el largo plazo, si se sabe que en la etapa 0 se comienza con 1 o 2 litros de manera equiprobable.

c) **(3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que en el largo plazo sea necesario descartar un litro de aceite luego de un período de tres días?

d) **(3 puntos)** Encuentre una expresión para el costo esperado mensual (asuma mes de 30 días) producto de los pedidos de emergencia.

Problema 3 (20 puntos)

Nuevamente después de la pandemia, el sistema de salud se encuentra en una situación crítica durante estas semanas debido al alto número de contagios de enfermedades respiratorias. Es por elllo que los centros de salud han debido generar protocolos ante la masiva llegada de pacientes. Nuesto problema se enmarca en un centro asistencial en particular, el cual cuenta con N profesionales, donde cada uno atiende un box.

Los pacientes llegan al centro médico de acuerdo a un proceso de Poisson a tasa λ pacientes/minuto, y esperan por su turno en una cola única. Debido a la compleja situación, se ha decidido liberar la restricción de capacidad y permitir que la cola crezca indefinidamente. Sin embargo, esto ha implicado que, si al llegar un paciente este se encuentra con una cola de k o más personas, se colocará en la cola con probabilidad $p_k = \frac{1}{k+1}$.

Los profesionales más experimentados han logrado estipular que el tiempo de atención en situaciones como esta distribuye exponencial y toma en promedio $1/\mu$ minutos. Además, no depende del profesional ni del paciente atendido. Finalmente, los pacientes en la cola comienzan a perder la paciencia y otros se dan cuenta que es contraproducente seguir esperando ahí, debido a la amenaza de contraer un virus aún más grave. Sin embargo, no quieren volver a su casa sin haber sido atendidos, por lo que entran en una gran encrucijada que termina en la decisión de irse luego de un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\alpha$ minutos.

a) **(6 puntos)** Modele la situación del centro de salud como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Determine los estados y presente mediante un grafo las tasas de transición instantánea entre los estados relevantes.

b) **(4 puntos)** Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias y considerando un rango de 5 horas, ¿Cuántos clientes en promedio llegan al centro de salud y deciden ni siquiera intentar hacer la fila de espera?

El personal de salud se da cuenta que no están dando abasto y que su decisión de liberar la capacidad de la cola solo está perjudicando a la población, ya que muchos de ellos vienen a exponerse al frío y a otros contagios y terminan yéndose antes de poder ser atendidos. Es por ello que deciden fijar un máximo de M pacientes en espera. Además, cada vez que a la sala de espera le falta un cupo para llenarse, inmediatamente sale el encargado del centro a hablar con los pacientes que van llegando, lo que genera una mayor expectativa en ellos, quedándose en espera con probabilidad $q_k = \frac{1}{k}$, lo que se mantiene hasta que la sala de espera queda vacía.

c) **(10 puntos)** Modifique lo que sea necesario de la cadena anterior para modelar esta nueva situación, indicando claramente qué cambio y el grafo asociado.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesor Maximiliano González
Primer Semestre 2023

Pauta I2

Problema 1

(a) $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$

Queremos demostrar que $F(0,0) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(0,0) = 1$

Forma 1:

Observemos que:

$$\begin{aligned} F_1(0,0) &= P_{00} = 1-a \\ F_2(0,0) &= P_{01}F_1(1,0) = ab \\ F_3(0,0) &= P_{01}F_2(1,0) = aP_{11}F_1(1,0) = a(1-b)b \\ F_4(0,0) &= P_{01}F_3(1,0) = aP_{11}F_2(1,0) = a(1-b)^2 b \\ &\vdots \\ F_n(0,0) &= a(1-b)^{n-2}b \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} F(0,0) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(0,0) &= 1 - a + ab + a(1-b)b + a(1-b)^2 b + \dots \\ &= 1 - a + ab \sum_{n=0}^{\infty} (1-b)^n \qquad \text{Como sabemos que } 1-b<1\text{, por serie geométrica} \\ &= 1 - a + ab\left(\frac{1}{b}\right) \\ &= 1 - a + a = 1 \end{aligned}$$

Forma 2

$$F(0,0) = P_{00} + P_{01}F(1,0) \tag{1}$$
$$F(1,0) = P_{1,0} + P_{11}F(1,0) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} (2) \qquad F(1,0) &= b + (1-b)F(1,0) \\ F(1,0) - (1-b)F(1,0) &= b \\ F(1,0) &= \frac{b}{1-1+b} = 1 \end{aligned}$$

$$(1) \qquad F(0,0) = 1 - a + a \cdot 1 = 1$$

(b) i) Es falso debido a que como el proceso comienza en la clase A, luego visita la clase B y posteriormente regresa a la clase A, las clases A y B se comunican. Por lo tanto pertenecen a la misma clase.
Luego, estaría incorrecto el hecho de que pertenecen a dos clases distintas y por consiguiente no puede iterar dentro de la clase A en el largo plazo.

ii) Es falsa debido a que i y j se comunican, por lo que pertenecen a la misma clase. Como se sabe que j tiene período 2 se cumple que $F_k(i,i) > 0$ (los estados de una misma clase tienen el mismo período).
Pero, pueden permanecer a una clase transiente, por lo que puede ocurrir que $F(i,i) < 1$

iii) En M/M/1 se cumple que:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

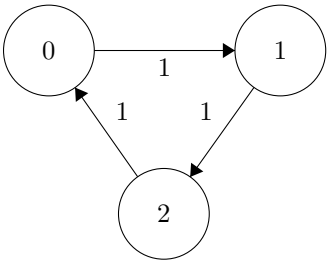
En el caso de que $\lambda = \mu$, nos damos cuenta que la expresión $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ diverge y no se puede determinar el valor de P_0. Por lo tanto es falso debido a que no se puede determinar el valor de L_q.

Observar que para que $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ converja, se tiene que cumplir que $\lambda < \mu$. En ese caso:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

(c) Si puede existir.

Consideremos $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con grafo:



Observamos que es una clase recurrente positiva periódica, por lo que no existen todos los $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$, por lo que no tiene distribución límite.

Observamos también que, al ser una cadena irreducible existe distribución estacionaria, la cual calculamos a continuación:

$$\begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_0 = \pi_2$$
$$\pi_1 = \pi_0$$
$$\pi_2 = \pi_1$$

Además se cumple que $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$. Por lo tanto:

$$\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{3}$$

(d) Solo nos interesa el tiempo de atención, y por pérdida de memoria el tiempo de atención de los clientes distribuye exponencial con tasa μ.
Definimos X, Y como el tiempo de atención de los clientes a y b. Necesitamos calcular:

$$\begin{aligned} P(\frac{1}{\mu} < X < Y) &= \int_{\frac{1}{\mu}}^{\infty} P(\frac{1}{\mu} < X < Y | Y = y) P(Y = y) dy \\ &= \int_{\frac{1}{\mu}}^{\infty} P(\frac{1}{\mu} < X < Y) \mu e^{-\mu y} dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\frac{1}{\mu}}^{\infty} (F(y) - F(\frac{1}{\mu}))\mu e^{-\mu y} dy \\
&= \int_{\frac{1}{\mu}}^{\infty} (-e^{-\mu y} + e^{-\mu \frac{1}{\mu}})\mu e^{-\mu y} dy \\
&= \int_{\frac{1}{\mu}}^{\infty} e^{-1}\mu e^{-\mu y} dy - \int_{\frac{1}{\mu}}^{\infty} \mu e^{-2\mu y} dy \\
&= \int_{\frac{1}{\mu}}^{\infty} e^{-1}\mu e^{-\mu y} dy - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\mu}}^{\infty} 2\mu e^{-2\mu y} dy \\
&= e^{-1}\left(\int_0^{\infty} \mu e^{-\mu y} dy - \int_0^{\frac{1}{\mu}} \mu e^{-\mu y} dy\right) - \frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty} 2\mu e^{-2\mu y} dy - \int_0^{\frac{1}{\mu}} 2\mu e^{-2\mu y} dy\right)
\end{aligned}
$$

Por propiedades de la distribución exponencial:

$$
\begin{aligned}
P(\frac{1}{\mu} < X < Y) &= e^{-1}(1 - (-e^{\mu \frac{1}{\mu}} + e^{\mu \cdot 0})) - \frac{1}{2}(1 - (-e^{-2\mu \frac{1}{2}} + e^{-2\mu \cdot 0})) \\
&= e^{-1}(1 - (1 - e^{-1})) - \frac{1}{2}(1 - (1 - e^{-2})) \\
&= e^{-1}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2} \\
&= \frac{1}{2e^2}
\end{aligned}
$$

(e) Como el sistema M/G/∞, significa que existen ∞ servidores. Como existen ∞ servidores, no hay tiempo de espera en la cola , y por lo tanto tampoco hay gente en la cola, $L_q = 0$.

W es el tiempo medio de permanencia de un cliente en el sistema, como el tiempo medio en la cola es nulo solo nos interesa el tiempo de atención el cual distribuye uniforme. Sea A el tiempo de atención. $A \sim \text{Uniforme}(a, b)$

Luego, $W = E(A) = \frac{a+b}{2}$

Problema 2
2. Parte 1

(a) Por propiedad Markoviana:

$$P\{X_1 = 1, X_2 = B, X_3 \neq C\} = P\{X_1 = A\} \cdot P\{X_2 = B | X_1 = A\} \cdot P\{X_3 \neq C | X_2 = B\}$$

$P\{X_1 = A\}$:

$$
\begin{aligned}
f^{(1)^T} &= f^{(0)^T} \cdot P^1 \\
&= \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix} P \\
&= \begin{pmatrix} 0.24 & 0.42 & 0.26 & 0.08 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $P\{X_1 = A\} = 0.24$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
P\{X_1 = 1, X_2 = B, X_3 \neq C\} &= 0.24 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.2) \\
&= 0.24 \cdot 0.5 \cdot 0.8 = 0.096
\end{aligned}
$$

(b) i) Necesitamos $P1 := P\{X_0 = A\}F_3(A, C) + P\{X_0 = B\}F_3(B, C) + P\{X_0 = D\}F_3(D, C)$

Sabemos que $P\{X_0 = A\} = 0.6, P\{X_0 = B\} = 0.4$ y $P\{X_0 = D\} = 0$

Luego,

$F_3(A, C) = P_{AA}F_2(A, C) + P_{AB}F_2(B, C)$

$$
\begin{aligned}
&= P_{AA}(P_{AA}F_1(A,C) + P_{AB}F_1(B,C)) + P_{AB}(P_{BA}F_1(A,C) + P_{BB}F_1(B,C) + P_{BD}F_1(D,C)) \\
&= 0.2(0.2 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.2) + 0.5(0.3 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.5) \\
&= 0.2(0.06 + 0.1) + 0.5(0.09 + 0.06 + 0.1) \\
&= 0.2 \cdot 0.16 + 0.5 \cdot 0.25 \\
&= 0.157
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_3(B,C) &= P_{BA}F_2(A,C) + P_{BB}F_2(B,C) + P_{BD}F_2(D,C) \\
&= 0.3 \cdot 0.16 + 0.3 \cdot 0.25 + 0.2(P_{DD}F_1(D,C)) \\
&= 0.048 + 0.075 + 0.2(0.5 \cdot 0.5) \\
&= 0.123 + 0.05 \\
&= 0.173
\end{aligned}
$$

Finalmente $P1 = 0.6 \cdot 0.157 + 0.4 \cdot 0.173 = 0.1634$

ii) Necesitamos $P2 := P\{X_2 = D\}$. Para esto calculamos $f^{(2)}$

$$
\begin{aligned}
{f^{(2)}}^T &= {f^{(1)}}^T \cdot P \\
&= \begin{pmatrix} 0.24 & 0.42 & 0.26 & 0.08 \end{pmatrix} P
\end{aligned}
$$

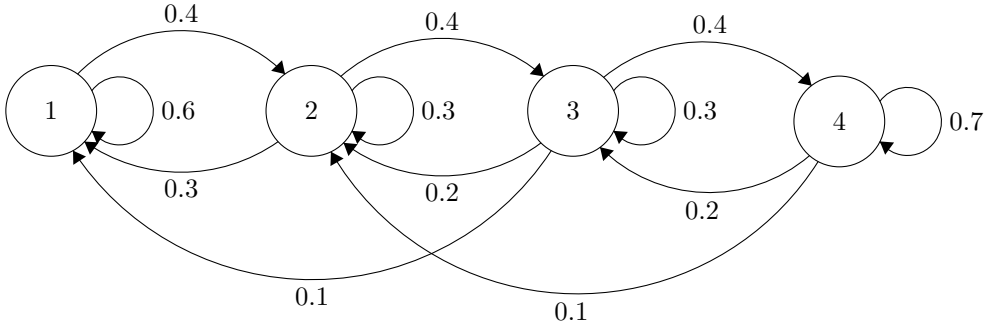
Solo nos interesa el cuarto componente que pertenece al estado D.

$$
P2 = P\{X_2 = D\} = \begin{pmatrix} 0.24 & 0.42 & 0.26 & 0.08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} = 0.124
$$

Finalmente $P1 > P2$, por lo tanto es más probable visitar C por primera vez luego de 4 etapas.

2. Parte 2

a) Sean $\{1, 2, 3, 4\}$ los estados de la CMTD del problema, los cuales representan la cantidad de aceite en el foodtruck luego de un día normal de entrega. Entonces, la cadena queda modelada como:



Por otro lado, la matriz de transición queda:

$$
P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Podemos ver que es una CMTD irreductible aperiódica, por tanto, tiene distribución límite y estacionaria, las cuales coinciden.

b) Dado que Distribución Limite y Estacionaria coinciden y que al ser una cadena irreductible no nos interesa el punto de inicio en esta para calcularlas, tenemos las siguientes probabilidades limites:

$$
\pi_1 = \pi_1 0.6 + \pi_2 0.3 + \pi_3 0.1
$$

$$\pi_2 = \pi_1 0.4 + \pi_2 0.3 + \pi_3 0.2 + \pi_4 0.1$$

$$\pi_3 = \pi_2 0.4 + \pi_3 0.3 + \pi_4 0.2$$

$$\pi_4 = \pi_3 0.4 + \pi_4 0.7$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

De lo cual obtenemos: $\pi_1 = 0.237209$, $\pi_2 = 0.24186$, $\pi_3 = 0.223256$, $\pi_4 = 0.297674$

c) Es la probabilidad de estar en el largo plazo en nodo 4 multiplicado por la probabilidad de descartar el litro de aceite, es decir, volver al estado 4 dado que no hubo demanda ese día. Por tanto:

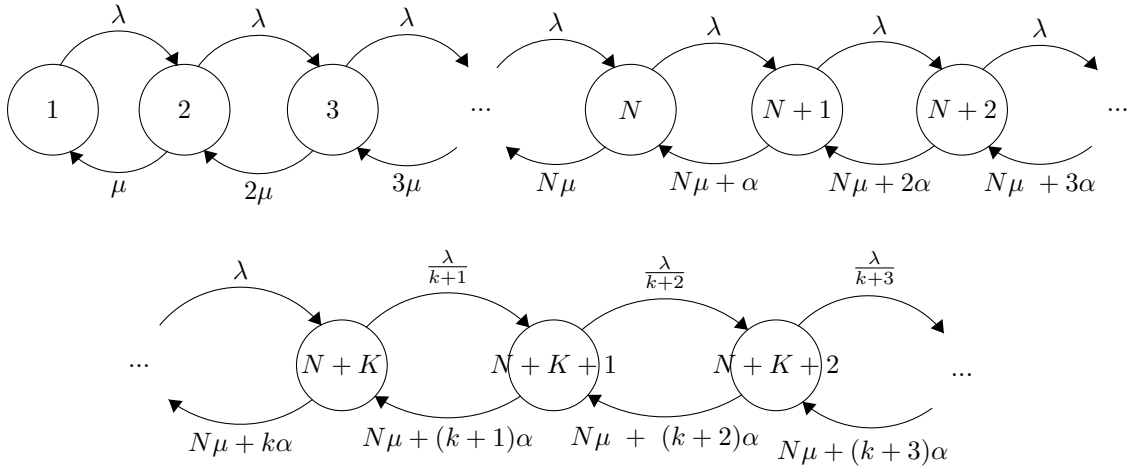
$$\pi_4 0.4 = 0.1191$$

d) Asumiendo que el costo de pedir aceite extra es de C, el costo esperado en 30 días es

$$10 \cdot C \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} (j-i) \cdot P(D=j) \cdot \pi_i$$

Problema 3

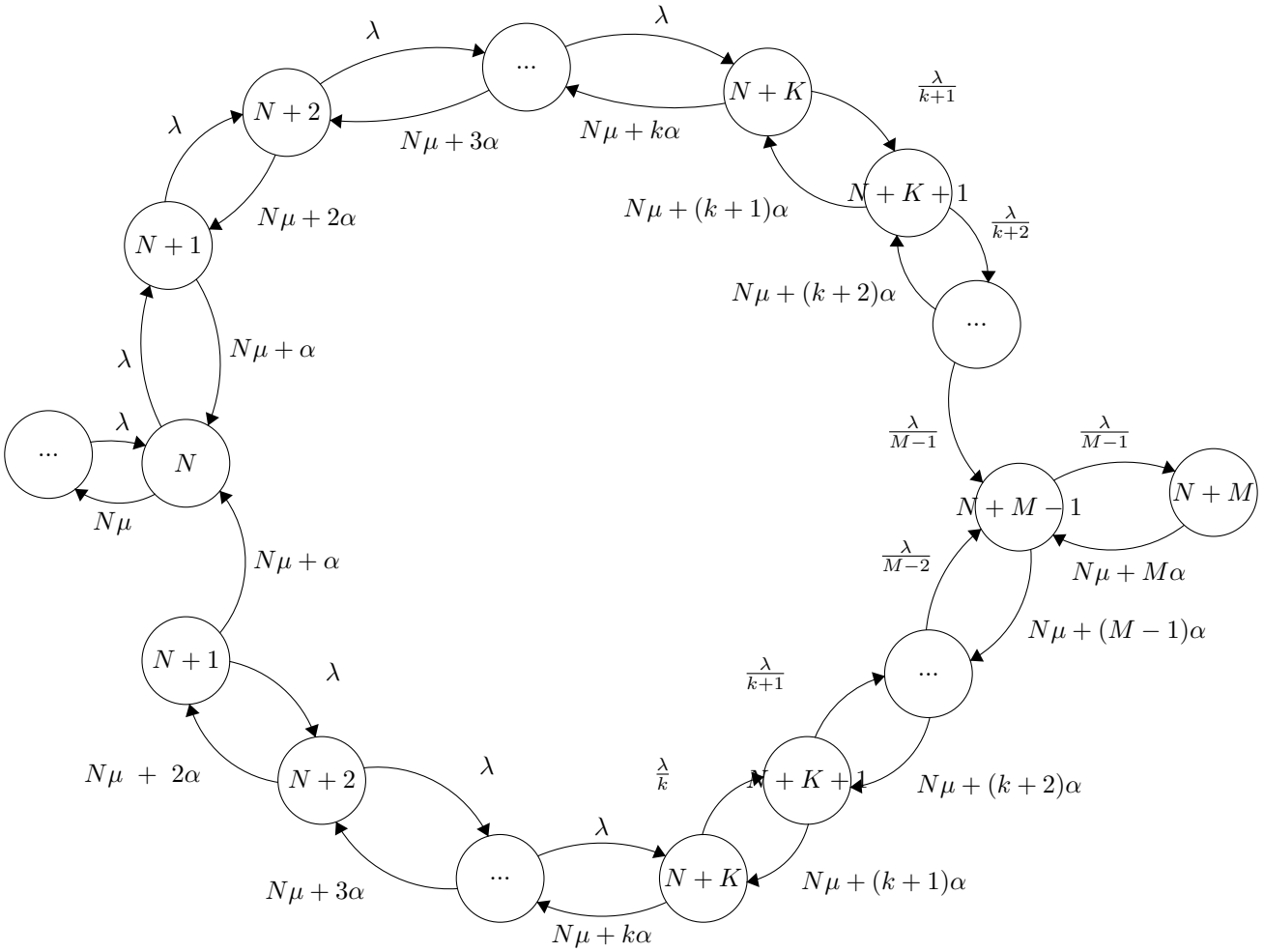
a) Sea $X_i \in \{1, 2, ...\}$, la cantidad de personas en el sistema. La CMTD queda modelada como:



b) Tenemos que la tasa de personas que deciden no entrar a la cola en el largo plazo para todo nodo $i \geq k$ es $\lambda(1 - p_i)$. Por tanto, la cantidad de clientes que en promedio llegan al centro de salud y deciden ni siquiera intentar hacer la fila de espera en un rango de 5 horas es:

$$300\lambda \sum_{i=k}^{\infty} P_i \cdot \left(1 - \frac{1}{i+1}\right)$$

c) El nuevo grafo es similar al anterior, solo que ahora desde el nodo N hacia el M existe el siguiente cambio: Cuando se llega al estado $N + M - 1$, sale la encargada del centro a hablar con las personas que llegan cambiando su de entrada a la cola, la cual se mantiene hasta que esta se vacía. Luego de esto, cuando se vuelve al estado N, la probabilidad cambia a la inicial y se sigue normalmente hasta volver eventualmente a $N + M - 1$ nuevamente.


...
$N+2$
$N+K$
$N+K+1$
...
$N+1$
N
...
$N+M-1$
$N+M$
$N+1$
$N+2$
...
$N+K$
$N+K+1$
...
λ
$\frac{\lambda}{k+1}$
$\frac{\lambda}{k+2}$
$\frac{\lambda}{M-1}$
$\frac{\lambda}{M-2}$
$\frac{\lambda}{k}$
$N\mu+3\alpha$
$N\mu+k\alpha$
$N\mu+2\alpha$
$N\mu+(k+1)\alpha$
$N\mu+(k+2)\alpha$
$N\mu+\alpha$
$N\mu$
$N\mu+M\alpha$
$N\mu+(M-1)\alpha$
$N\mu\ +\ 2\alpha$