Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 Modelos Estocásticos
Profesor Maximiliano González R.
Primer Semestre 2023

Interrogación 1

Tiempo total: 2 horas y 30 minutos

Problema 1 (20 puntos)

El dueño de un exclusivo restaurant, que solo da servicio mediante reserva previa, sabe por sus años de experiencia que una fracción q de los grupos de clientes que reservan una mesa finalmente no se presentan. Es por ello que usted decide aceptar un máximo de 24 reservas diarias, a pesar de que solo dispone de 20 mesas (asuma que todas las mesas son idénticas, que los grupos siempre caben en una mesa y que siempre se agotan todas las reservas).

a) **(3 puntos)** Encuentre una expresión para la probabilidad de que en una jornada cualquiera exista una mesa disponible para todos los pasajeros que se presenten.

b) **(3 puntos)** Suponga que el dueño desea que en a lo más una fracción α de los días el restaurant quede con alguna mesa vacía. Encuentre una expresión que relacione α con el número de reservas n que el dueño debiese permitir.

Suponga ahora que el dueño desea evaluar una nueva modalidad para afrontar la demanda. Esta consiste en no otorgar reservas, sino dejar que los grupos de clientes lleguen libremente, y asignar una mesa a cada grupo en orden de llegada durante un período de 2 horas. Suponga que tanto la llegada de grupos de clientes como la recepción de estos comienza a las 19:00 hrs. Además, los grupos llegan según un Proceso de Poisson de tasa λ grupos/hora. Notar que podrían seguir llegando grupos después de las 2 horas, pero estos no serán recepcionados, por lo que asumimos se pierden.

c) **(3 puntos)** Si se sabe que en un determinado día el restaurant no se llenó, ¿cuál es la probabilidad de que al menos haya alcanzado la mitad de su capacidad durante la primera media hora?

d) **(2 puntos)** Si se sabe que durante la primera media hora se ocupó una sola mesa. En promedio ¿cuántas mesas adicionales verá ese grupo ocuparse?

e) **(2 puntos)** Encuentre una expresión para la probabilidad de que entre las 20:00 y las 21:00 lleguen r grupos si se sabe que entre las 19:30 y las 20:15 llegaron m.

Adicional a la nueva modalidad en evaluación, el dueño del restaurante estima que cada grupo de clientes está compuesto por i personas ($i \in \{2, 3, 4, 5\}$) con probabilidad p_i (donde $\sum_{i=2}^{5} p_i = 1$). Sin embargo, se entera que existe un reglamento que no permite más de 50 personas en el recinto.

f) **(4 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que al cabo de una hora haya a lo más 4 personas sentadas en el restaurant?

g) **(3 puntos)** Si $p_2 = p_3 = 2/5$ y $p_4 = p_5 = 1/10$ ¿Cuál debiese ser la mínima tasa de llegada λ para que en valor esperado la norma de capacidad máxima se infrinja?

Problema 2 (22 puntos)

a) **(2 puntos)** Sea X una variable aleatoria que representa el número obtenido al tirar un dado común. Calcule $Var(X)$.

Sea X una variable aleatoria discreta que solo puede tomar valores no negativos. Además, se sabe que existe un número real $0 < \alpha < 1$ para el que se cumple

$$P(X = n) = \alpha \cdot P(X = n - 1)$$

Hint: recuerde que $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$

b) **(3 puntos)** Encuentre la función de densidad de probabilidad de X.

c) **(3 puntos)** Determine la probabilidad de que X tome un valor impar.

Considere el nacimiento de hombres y mujeres en un centro de salud durante 2023, representado por los procesos de Poisson $\{H(t), t \geq 0\}$ de tasa λ_h nacimientos por día, y $\{M(t), t \geq 0\}$ de tasa λ_m nacimientos por día, respectivamente. Ambos procesos son independientes entre sí y con t medido en días.

d) **(4 puntos)** Se definen los siguientes eventos:

   i) El primer nacimiento del año ocurre después del n-ésimo día

   ii) El primer bebe nacido es mujer

   ¿Son estos dos eventos independientes? Argumente su respuesta en base a un desarrollo apropiado.

e) **(3 puntos)** ¿Cuál es el valor esperado del tiempo hasta el nacimiento del primer bebe, independiente de su género, si se sabe que en los primeros n días no hubo nacimientos?

f) **(3 puntos)** Calcule la probabilidad de que la octava mujer haya nacido entre el quinto y el séptimo día, si se sabe que durante enero nacieron 35 mujeres en total.

g) **(4 puntos)** Encuentre una expresión para la distribución acumulada de la variable aleatoria que representa la diferencia entre el momento del nacimiento del primer hombre y el momento del nacimiento de la primera mujer (*Hint: nótese que el primer bebé podría ser hombre o mujer*).

Problema 3 (18 puntos)

A una agencia de turismo llegan veraneantes según un proceso de Poisson de tasa λ personas por hora y esperan que inicie un tour de manera ordenada y según su orden de llegada. Los tours inician cada una hora y pueden ser de dos tipos: tours largos o tour cortos. La probabilidad de que el siguiente tour sea largo es p_l, mientras que será corto con probabilidad p_c, donde $p_l + p_c = 1$. Los tours largos tienen una duración de T_l horas, mientras que los tours cortos tienen una duración que distribuye exponencial de tasa $1/\beta$ (tours/hora). Ambos tipos de tour aceptan un máximo de K personas y suponga que en caso de haber M turistas esperando en la agencia no puede ingresar nadie más ($M >> K$).

Los tours largos son más apetecidos que los cortos, de modo que cada vez que inicia un tour largo, todas las personas intentan sumarse. Por otro lado, en el caso de un tour corto cada persona en la fila de espera querrá participar con probabilidad q, la cual es independiente de la decisión de los demás y de cuánto tiempo lleva esperando.

a) **(14 puntos)** Modele el número de veraneantes que hay en la agencia justo antes de la salida de un tour como una Cadena de Markov en Tiempo Discreto. Ponga atención a los distintos casos que pueden ocurrir. Escriba explícitamente las probabilidades de transición para cualquier par de estados.

b) **(4 puntos)** Si un turista llega a la agencia cuando hay menos de K personas, ¿cuál es el tiempo esperado hasta terminar el tour?

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesor Maximiliano González
Primer Semestre 2023

Interrogación 1 (Pauta)

Problema 1

a) La probabilidad de que exista una mesa disponible para todos quienes se presenten es igual a la probabilidad de que no se presenten más de 20 grupos de clientes. Si llamamos q a la fracción de grupos que no se presentan, entonces la probabilidad de que un grupo se presente es $(1-q)$, y la probabilidad de que no se presente es q. Por lo tanto, la probabilidad de que no se presenten más de 20 grupos es:

$$P(X \leq 20) = \sum_{i=0}^{20} \binom{24}{i} (1-q)^i q^{(24-i)}$$

b)

Como queremos que a lo más una fracción α de los días el restaurante quede con alguna mesa vacía, entonces debemos encontrar el valor n que satisface esta condición:

$$P(X \leq 19) = 1 - P(X \geq 20) \leq \alpha$$

$$P(X \leq 19) = \sum_{i=0}^{19} \binom{n}{i} (1-q)^i q^{(n-i)} \leq \alpha$$

c)Los grupos llegan según un Proceso Poisson, entonces sea N un proceso de conteo $(N(t), t > 0)$. Si sabemos que el restaurante no se llenó, entonces el número total de grupos de clientes que llegaron durante las dos horas fue menor o igual a 19. La llegada de grupos de clientes sigue un proceso de Poisson con tasa λ grupos/hora, por lo que durante las dos horas se espera que lleguen en promedio 2λ grupos. La probabilidad de que al menos haya alcanzado la mitad de su capacidad durante la primera media hora es la probabilidad de que lleguen al menos 10 grupos en la primera media hora, dado que llegaron menos o igual que 19 grupos en las dos horas. Esta probabilidad se puede calcular usando la distribución de Poisson:

$$P(N(1/2) \geq 10 | N(2) \leq 19) = 1 - P(N(1/2) < 10 | N(2) \leq 19) = 1 - \sum_{i=0}^{9} \sum_{j=i}^{19} \binom{j}{i} (\frac{1}{4})^i (1-\frac{1}{4})^{(j-i)}$$

d) Como sabemos que en la primera media hora solo se ocupó una mesa, el tiempo en el que esa mesa se ocupó sigue una distribución Uniforme entre 0 y 1/2. Así el tiempo esperado del momento de llegada es $\frac{1/2}{2}$. Luego, en promedio, el grupo verá ocuparse $E[N(7/4)] = \frac{7}{4}\lambda$

e) Una expresión es la siguiente:

$$\frac{P(N(2) - N(1) = r, N(5/4) - N(1/2) = m)}{P(N(5/4) - N(1/2) = m)}$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{min(m,r)} P(N(1) - N(1/2) = m - i, N(5/4) - N(1) = i, N(2) - N(5/4) = r - i)}{P(N(5/4) - N(1/2) = m)}$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{min(m,r)} P(N(1/2)=m-i)\cdot P(N(1/4)=i)\cdot P(N(3/4)=r-i)}{P(N(3/4)=m)}$$

f) Dado que los grupos de clientes llegan según un proceso de Poisson de tasa λ grupos/hora, y cada grupo está compuesto por i personas con probabilidad p_i, podemos modelar el número total de personas en el restaurante como una distribución de Poisson compuesta:
Sea (X(t), $t > 0$) el proceso que cuenta personas en cada grupo que llega al restaurant, e Y_i es la cantidad de personas por grupo:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

Desarrollando:

$$P(X(1) \leq 4) = \sum_{n=0}^{2} P(X(1) \leq 4 | N(1) = n) \cdot P(N(1) = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{2} P(\sum_{i=1}^{n} P(X(1) \leq 4 | N(1) = n) \cdot P(N(1) = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{2} P(\sum_{i=1}^{n} Y_i \leq 4) \cdot P(N(1) = n)$$

$$= 1 \cdot P(N(1) = 0) + P(Y_1 \leq 4) \cdot P(N(1) = 1) + P(Y_1 + Y_2 \leq 4) \cdot P(N(1) = 2)$$

$$= e^{-\lambda} + (p_2 + p_3 + p_4)\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} + p_2^2 \frac{\lambda^2 e^{\lambda}}{2!}$$

g) En este caso, la capacidad máxima permitida es de 50 personas. Por lo tanto, si el valor esperado de la cantidad de personas sentadas en el restaurante es mayor que 50, entonces se infringirá la norma de capacidad máxima. Ocupando la misma notación que en f), tenemos que:

$$E(X(t)) = E(Y_i) \cdot E(N(t))$$

$$E(X(2)) = E(Y_i) \cdot E(N(2))$$

$$E(X(2)) = (2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5) \cdot 2\lambda$$

Queremos que $E(X(2)) > 50$:

$$(2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5) \cdot 2\lambda > 50$$

$$(2\frac{2}{5} + 3\frac{2}{5} + 4\frac{1}{10} + 5\frac{1}{10}) \cdot 2\lambda > 50$$

$$\lambda > \frac{500}{58} = 8.62 \text{ grupos/hora}$$

Problema 2

a) X es una varaible aleatoria que representa el número obtenido al tirar un dado común. La función de probabilidad esta dado por:

$$P(X = x) = \begin{cases} 1/6 & \text{si } x = 1 \\ 1/6 & \text{si } x = 2 \\ 1/6 & \text{si } x = 3 \\ 1/6 & \text{si } x = 4 \\ 1/6 & \text{si } x = 5 \\ 1/6 & \text{si } x = 6 \end{cases}$$

Calculamos la Esperanza de X:

$$E[X] = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3,5$$

Finalmente se calcula la varianza de X:

Opción 1

$$Var(X) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i - E(X))^2$$

$$Var(X) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i - 3.5)^2$$

$$Var(X) = \frac{35}{12} = 2,92$$

Opción 2

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$Var(X) = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - (3,5)^2$$

$$Var(X) = 2,92$$

b) La suma de todas las probabilidades de una función de densidad tiene que ser igual 1. Primero encontramos una expresión para determinar todas las probabilidades de X.

$$P(X=1) = \alpha P(x=0) \qquad x=1$$

$$P(X=2) = \alpha P(x=1) = \alpha^2 P(x=0) \qquad x=2$$

$$P(X=3) = \alpha P(x=2) = \alpha^3 P(x=0) \qquad x=3$$

$$P(X=4) = \alpha P(x=3) = \alpha^4 P(x=0) \qquad x=4$$

$$\vdots$$

$$P(X=n) = \alpha^n P(X=0) \qquad x=n$$

Obtuvimos la expresión de las probabilidades de X. Ahora se realiza una sumatoria y se iguala a 1, ocupamos el *hint* para la serie geometrica para hallar el valor de $P(X=0)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P(X=0) = 1$$

$$\frac{1}{1-\alpha} P(X=0) = 1$$

$$P(X=0) = 1-\alpha$$

Finalmente la función de densidad de X es:

$$P(X = n) = \alpha^n(1 - \alpha)$$

c) Queremos que x tome valores impares, para luego sumar todas las probabilidades que se está pidiendo en el enunciado. Matemáticamente queda expresado como:

$$P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) + ... + P(X = 2i + 1)$$

Reemplazamos esos valores en la función de densidad de X:

$$\alpha(1 - \alpha) + \alpha^3(1 - \alpha) + \alpha^5(1 - \alpha) + ... + \alpha^{2n+1}(1 - \alpha)$$

$$\alpha(1 - \alpha)[1 + \alpha^2 + \alpha^4 + ... + \alpha^{2n}]$$

Quedaría una seríe geometrica, muy similar a la del *hint*, pero de razón α^2:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} = \frac{1}{1 - \alpha^2}$$

Finalmente reemplazando:

$$\alpha(1 - \alpha)\frac{1}{1-\alpha^2}$$

$$P(X = 2i + 1) = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \qquad\qquad i \in 0, 1, 2, ..$$

d) Definimos el evento A como el primer nacimiento del año ocurre después del n-ésimo día y definimos el evento B como el primer bebe nacido es mujer. Para que sean estos dos eventos independientes tiene que cumplir que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Buscamos $P(A)$, para el primer nacimiento puede ser hombre o mujer. Definimos $\{N(t), t > 0\}$ un proceso Poisson de nacimientos de bebes con tasa $\lambda_h + \lambda_m$ nacimientos por día, entonces la probabilidad de que ocurra un nacimineto después del día n, está dado por:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(N(n) = 0) \\ &= \frac{(n(\lambda_h + \lambda_m))^0 \cdot e^{-n(\lambda_h+\lambda_m)}}{0!} \\ &= e^{-n(\lambda_h+\lambda_m)} \end{aligned}$$

Para la probabilidad de que el primer nacimiento sea mujer esta condicionado con los nacimientos de los hombres, Debe cumplir que $T_m < T_h$, donde T_h y T_m sean los tiempos que de hombres y mujeres hasta su primer nacimineto respectivamente.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(T_m < T_h) \\ &= \int_0^{\infty} P(T_m < T_h \mid T_h = t) \cdot f_{T_h}(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} P(T_m < t) \cdot f_{T_h}(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} P(1 - e^{-\lambda_m t}) \cdot \lambda_h e^{-\lambda_h t}dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \lambda_h e^{-\lambda_h t} dt - \lambda_h \int_0^\infty e^{-t(\lambda_m+\lambda_h)} dt \\
&= 1 - \lambda_h \left(\frac{-1}{\lambda_m + \lambda_h} e^{-t(\lambda_m+\lambda_h)} \right) |_0^\infty \\
&= 1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_m + \lambda_h} \\
&= \frac{\lambda_m}{\lambda_m + \lambda_h}
\end{aligned}
$$

Finalmente, buscamos $P(A \cap B)$, es decir, que el primer bebé sea mujer y que nazca después del n-ésimo día,llamaremos t al día n, esto se expresa de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(n < T_m < T_h) \\
&= \int_0^\infty P(n < T_m < T_h \mid T_h = t) \cdot f_{T_h}(t) dt \\
&= \int_n^\infty P(n < T_m < T_h \mid T_h = t) \cdot \lambda_h e^{-\lambda_h t} dt \\
&= \int_n^\infty \left(\int_n^t \lambda_m e^{-\lambda_m s} ds \right) \lambda_h e^{-\lambda_h t} dt \\
&= \int_n^\infty \left(e^{-\lambda_m n} - e^{-\lambda_m t} \right) \lambda_h e^{-\lambda_h t} dt \\
&= e^{-n\lambda_m} \int_n^\infty \lambda_h e^{-\lambda_h t} dt - \frac{\lambda_h}{\lambda_m + \lambda_h} \int_n^\infty (\lambda_h + \lambda_m) e^{-t(\lambda_h+\lambda_m)} dt \\
&= e^{-n(\lambda_h+\lambda_m)} - \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_m + \lambda_h} \right) e^{-n(\lambda_h+\lambda_m)} \\
&= e^{-n(\lambda_h+\lambda_m)} \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_m + \lambda_h} \right) \\
&= e^{-n(\lambda_h+\lambda_m)} \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_m + \lambda_h} \right)
\end{aligned}
$$

Ahora, sí reemplazamos los valores que calculamos podemos notar que:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\
e^{-n(\lambda_h+\lambda_m)} \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_m + \lambda_h} \right) &= e^{-n(\lambda_h+\lambda_m)} \cdot \frac{\lambda_m}{\lambda_m + \lambda_h}
\end{aligned}
$$

Como ambas expresiones son iguales, podemos decir que si el primer nacimineto ocurre después del n-ésmimo día no afecta la probabilidad del que el primer bebé sea mujer. Por lo que se trata de dos eventos independientes.

e) $\{N(t), t > 0\}$ nacimiento de bebes (hombres y mujeres) por día con tasa $\lambda_h + \lambda_m$

En un proceso Poisson los tiempos pueden distribuir exponencial con la misma tasa. Para este problema los tiempos entre eventos distribuye exponencial con tasa $\lambda_h + \lambda_m$ y esta condicionado a que han pasado n días. Por la carencia de memoria que tiene esta distribución no importa cuánto tiempo haya pasado, la distribución seguirá siendo la misma.

T_1: Tiempo del primer nacimiento $\sim Exp(\lambda_h + \lambda_m)$

Entonces el tiempo promedio para que nazca el primer bebé dado que han pasado n días, estará dado por:

$$E[T_1 \mid T_1 > n] = \frac{1}{\lambda_h + \lambda_m} + n$$

f) Se quiere que la octava persona (S_8) nazca entre el quinto y séptimo dado que durante el mes hayan nacido 35 personas. Esto se puede escribir de la siguiente forma.

$$P(5 \leq S_8 \leq 7 \mid M(31) = 35)$$

Por probabilidad condicional esto implica que:

$$5 < S_8 \Longrightarrow M(5) < 8 = M(5) \leq 7$$

$$S_8 \leq 7 \Longrightarrow M(7) \geq 8$$

La expresión se puede volver a escribir de la siguiente forma:

$$P(M(5) \leq 7, M(7) \geq 8 \mid M(31) = 35)$$

Desarrollando con la definición de probabilidad condicional.

$$\begin{aligned}
P(M(5) \leq 7, M(7) \geq 8 \mid M(31) = 35) &= \frac{P(M(5) \leq 7, M(7) \geq 8, M(31) = 35)}{P(M(31) = 35)} \\
&= \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=8-i}^{35-i} \frac{P(M(31) - M(7) = 35 - i - j, M(7) - M(5) = j, M(5) = i)}{P(M(31) = 35)} \\
&= \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=8-i}^{35-i} \frac{P(M(31) - M(7) = 35 - i - j) \cdot P(M(7) - M(5) = j) \cdot P(M(5) = i)}{P(M(31) = 35)} \\
&= \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=8-i}^{35-i} \frac{P(M(24) = 35 - i - j) \cdot P(M(2) = j) \cdot P(M(5) = i)}{P(M(31) = 35)} \\
&= \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=8-i}^{35-i} \frac{(24\lambda_m)^{35-i-j} \cdot e^{-24\lambda_m}}{(35-i-j)!} \cdot \frac{(2\lambda_m)^{j} \cdot e^{-2\lambda_m}}{j!} \cdot \frac{(5\lambda_m)^{i} \cdot e^{-5\lambda_m} \cdot 35!}{i! \cdot (31\lambda_m)^{35} \cdot e^{-31\lambda_m}}
\end{aligned}$$

g) Definimos Z como la variable aleatoria de la diferencia de entre el momento del nacimiento del primer hombre y el momento del nacimiento de la primera mujer. X será la variable aleatoria del momento del nacimiento del primer hombre e Y será la variable aleatoria del nacimiento de la primera mujer.

$$\text{Z = X - Y}$$

Buscamos la distribución acumulada de Z

$$\begin{aligned}
P(Z \leq z) &= P(X - Y \leq z) \\
&= \int_0^{\infty} P(X \leq z + y \mid Y = y) \cdot f_Y(y) dy
\end{aligned}$$

Acá se presenta 2 casos, ya que $z + y$ puede ser negativo o positivo y la función de distribución exponencial vale 0 para el caso negativo.

Si $z \geq 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty P(X \le z+y \mid Y=y)\cdot f_Y(y)dy &= \int_0^\infty (1-e^{-\lambda_h(z+y)})\cdot \lambda_m e^{-\lambda_m y}dy \\ &= \int_0^\infty \lambda_m e^{-\lambda_m y} - \lambda_m e^{-\lambda_h z}e^{-\lambda_h(\lambda_h+\lambda m)}dy \\ &= 1-\lambda_m e^{-\lambda_h z}\cdot\frac{1}{\lambda_h+\lambda_m}\end{aligned}$$

Si $z<0$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty P(X \le z+y \mid Y=y)\cdot f_Y(y)dy &= \int_0^{|z|} P(X \le z+y \mid Y=y)\cdot f_Y(y)dy + \int_{|z|}^\infty P(X \le z+y \mid Y=y)\cdot f_Y(y)dy \\ &= \int_{|z|}^\infty P(X \le z+y \mid Y=y)\cdot f_Y(y)dy \\ &= \int_{|z|}^\infty (1-e^{-\lambda_h(z+y)})\cdot \lambda_m e^{-\lambda_m y}dy \\ &= \int_{|z|}^\infty \lambda_m e^{-\lambda_m y} - \lambda_m e^{-\lambda_h z}e^{-\lambda_h(\lambda_h+\lambda_m)}dy \\ &= e^{-\lambda_m|z|} - \frac{\lambda_m}{\lambda_m+\lambda_h}e^{-(\lambda_m+\lambda_h)|z|}e^{-\lambda_h z} \\ &= e^{-\lambda_m|z|} - \frac{\lambda_m}{\lambda_m+\lambda_h}e^{-\lambda_m|z|} \\ &= e^{-\lambda_m|z|}(1-\frac{\lambda_m}{\lambda_m+\lambda_h}) \\ &= e^{-\lambda_m|z|}(\frac{\lambda_h}{\lambda_m+\lambda_h})\end{aligned}$$

Problema 3

a) Existen dos fuentes de incertidumbre, dado estado i:

(a) cuántos pasajeros suben.

(b) cuántos llegan hasta el próximo tour.

Los estados exisistentes van de $\{0,...,M\}$, una única clase recurrente positva aperiódica.

$$P_{ij} = \sum_{k=k^*}^{i} (P_{ij} \mid suben\ k)\cdot P(suben\ k)$$

Con $k^* = max\{0,(i-j)\}$, pues si me voy a un estado más pequeño, la cantidad de personas que inició el tour es, al menos $i-j$ (si no llegó nadie durante la proxima hora). Si subieron más de $i-j$, deben llegar más para complementar y llegar al estado j.

Sea N la variable aleatoria que representa el número de personas que inicia el tour.

(a) Si hay i personas en la fila y el tour es largo, suben $N = min\{K,i\}$.

(b) si hay i personas y el tour es corto, la probabilidad de que suban es:

Si $i \leq K$:

$P(N = k) = \binom{i}{k} q^k (1-q)^{i-k}$ si $k \leq i$

Si $i > K$:

$$P(N = k) = \begin{cases} \binom{i}{k} q^k (1-q)^{i-k} & \text{si } k < K \\ \sum_{n=K}^{i} \binom{i}{n} q^n (1-q)^{i-n} & \text{si } k = K \end{cases}$$

Luego, la probabilidad de que $N = k$ para un tour cualquiera es:

$$P(N = k) = \begin{cases} \binom{i}{k} q^k (1-q)^{i-k} \cdot p_c & \text{si } k < i \leq K \quad \text{Solo ocurre si el tour es corto (no todos comienzan)} \\ q^k \cdot p_c + p_l & \text{si } k = i \leq K \quad \text{Puede ocurrir para ambos tour} \\ \binom{i}{k} q^k (1-q)^{i-k} \cdot p_c & \text{si } k < K < i \quad \text{Solo ocurre si el tour es corto. (no todos comienzan)} \\ p_c \cdot \sum_{n=K}^{i} \binom{i}{n} q^n (1-q)^{i-n} + p_l & \text{si } k = K < i \quad \text{Puede ocurrir para ambos tour} \end{cases}$$

Teniendo los $P(N = k)$ en un caso genérico, calculamos los $(P_{ij} \mid N = k)$.

Si $N = k$, quedan solo $i - k$ en la fila. Así, para completar las j personas necesitamos que en el transcurso de la siguiente hora lleguen $j - i + k$ (o más cuando $j = M$).

$$(P_{ij} \mid N = k) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{j-i+k} e^{-\lambda}}{(j-i+k)!} & \text{si } j < M \\ \sum_{n=i-j+k}^{\infty} \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} & \text{si } j = M \end{cases}$$

Finalmente $(P_{ij} \mid N = k)P(N = k)$ sera igual a:
Si $j = M$:

- Si $k < i \leq K$, en caso de tour corto

$$\sum_{n=i-j+k}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \cdot \binom{i}{k} q^k (1-q)^{i-k} \cdot p_c$$

- Si $k = i \leq K$

$$\sum_{n=i-j+k}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \cdot (q^k \cdot p_c + p_l)$$

- Si $k < K < i$, en caso de tour corto

$$\sum_{n=i-j+k}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \cdot \binom{i}{k} q^k (1-q)^{i-k} \cdot p_c$$

- $k = K < i$

$$\sum_{n=i-j+k}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \cdot (p_c \cdot \sum_{n=K}^{i} \binom{i}{n} q^n (1-q)^{i-n} + p_l)$$

Si $j < M$

- Si $k < i \leq K$, en caso de tour corto

$$\frac{\lambda^{j-i+k} e^{-\lambda}}{(j-i+k)!} \cdot \binom{i}{k} q^k (1-q)^{i-k} \cdot p_c$$

- Si $k = i \leq K$

$$\frac{\lambda^{j-i+k} e^{-\lambda}}{(j-i+k)!} \cdot (q^k \cdot p_c + p_l)$$

- Si $k < K < i$, en caso de tour corto

$$\frac{\lambda^{j-i+k}e^{-\lambda}}{(j-i+k)!} \cdot \binom{i}{k} q^k (1-q)^{i-k} \cdot p_c$$

- $k = K < i$

$$\frac{\lambda^{j-i+k}e^{-\lambda}}{(j-i+k)!} \cdot (p_c \cdot \sum_{n=K}^{i} \binom{i}{n} q^n (1-q)^{i-n} + p_l)$$

b)
Si un turista llega a la agencia cuando hay menos de K turistas en la fila, siempre podrá tomar el próximo tour. El tiempo que pasa desde que inicia el tour hasta que este termina es:

$$E(T_t) = T_l p_l + \beta p_c q + (1 + E(T_t))(1-q)$$

$$E(T_t) = T_l p_l + \beta p_c q + 1 - q + E(T_t) - E(T_t)q$$

$$E(T_t) = \frac{T_l p_l + \beta p_c q + 1 - q}{q}$$

El momento de llegada a la fila es Uniforme[0,1], por lo que en promedio deberá esperar $\frac{1}{2}$ hora hasta que comience el tour. Así:

$$E(T) = \frac{1}{2} + E(T_t) = \frac{1}{2} + \frac{T_l p_l + \beta p_c q + 1 - q}{q}$$