Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesores Maximiliano González, Nicolás Vargas y Andrés Navarro
Segundo Semestre 2024

Interrogación 2

Duración: 2 horas y 30 minutos

Problema 1 (20 puntos)

Suponga que usted participa en un torneo de videojuegos en el que cada jugador debe superar varias rondas de desafíos para avanzar a la final. En cada ronda, los jugadores enfrentan diferentes niveles de dificultad y pueden ganar premios en el camino. El torneo tiene la siguiente mecánica:

1. **Rondas del juego:** Cada jugador comienza en la ronda inicial (etapa 0) y avanza hacia la final (etapa 5) al superar rondas consecutivas. Sin embargo, si pierde una ronda, retrocede a la ronda anterior.

2. **Ganancia de niveles:** En cada ronda, el jugador tiene una probabilidad p de ganar y avanzar al siguiente estado (etapa siguiente) y una probabilidad q de perder, lo que lo hace retroceder. Nunca puedes permanecer en la misma etapa, a menos de que estés en la etapa 0. Si el jugador retrocede desde la ronda inicial (estado 0), permanece en ese estado. Considere $0 < p, q < 1$ y $p + q = 1$.

3. **Estados especiales:** Cada vez que el jugador alcanza la etapa 3 desde la etapa 2, entra en una ronda especial de bonificación en la que tiene una probabilidad b de avanzar automáticamente a la etapa final (etapa 5) en el siguiente turno, independientemente del resultado. En otro caso, se mantiene en la etapa 3 y sigue con las mismas reglas anteriores. Cabe destacar que si vuelve entrar a la etapa 3 llegando desde la etapa 2, vuelve a tener esta ronda bonus. Considere $0 < b < 1$.

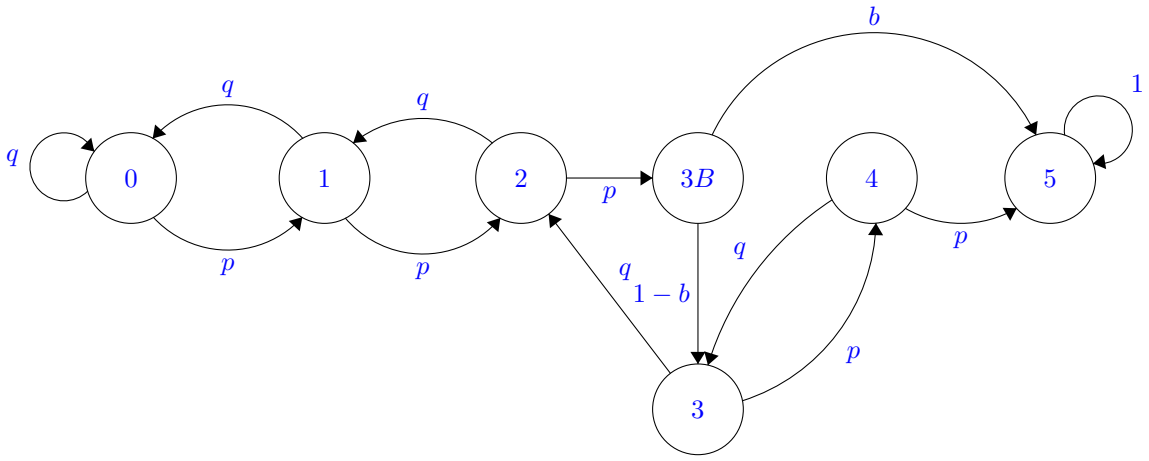
4. **Etapa final:** La etapa 5 es la final y representa la victoria en el torneo. Una vez que el jugador llega aquí, se mantiene en este etapa.

5. **Puntaje del jugador:** Cada jugador inicia con 100 puntos, y por cada ronda que pase (independiente si avanza, se mantiene o se retrocede), se pierden 10 puntos, pudiendo quedar en puntaje negativo. Considere que si avanza directamente desde la etapa 3 a la etapa 5, SI se pierden puntos por ese movimiento.

A partir de lo anterior, responda:

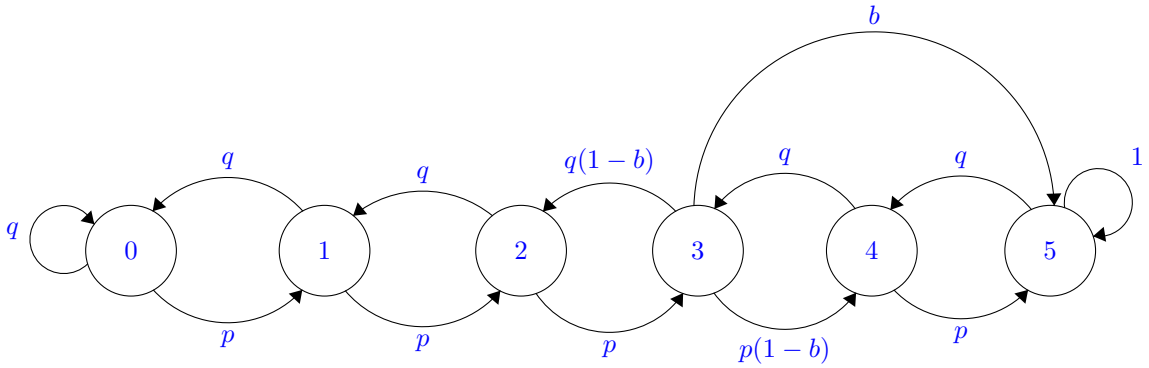
a) **(8 puntos)** Modele la situación descrita como una Cadena de Markov en Tiempo Discreto, explicitando e indicando los estados y las respectivas probabilidades de transición, junto con su diagrama. Además, identifique y clasifique las clases de estados según corresponda.

Solución:



{5}: Recurrente positiva aperiódica.
{0,1,2,3B,3,4,5}: Transiente.

Otra segunda opción, en la que la etapa "bonus" no se considera como una etapa independiente" que se aceptará como respuesta correcta es la siguiente:



{5}: Recurrente positiva aperiódica.
{0,1,2,3,4,5}: Transiente.

b) **(7 puntos)** ¿Cuál es el puntaje esperado para un jugador cualquiera que inicia en la ronda 0? Para esta pregunta, considere requisito sólo dejar expresado el sistema de ecuaciones y dejar claramente especificado qué valor hay que obtener.

Solución: Por enunciado sabemos que la persona inicia con 100 puntos y por cada movimiento su puntaje disminuye en 10. Por lo tanto, para saber el puntaje esperado debemos conocer la cantidad esperada de etapas para llegar desde la etapa 0 a la etapa 5. Es decir, necesitamos encontrar:

$$\mathbb{E}(T(0,5)) = 1 + \sum_{l \neq 5} P_{0l} \cdot \mathbb{E}(T(l,5))$$

Esto nos entrega el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbb{E}(T(0,5)) = 1 + q \cdot \mathbb{E}(T(0,5)) + p \cdot \mathbb{E}(T(1,5))$$

$$\mathbb{E}(T(1,5)) = 1 + q \cdot \mathbb{E}(T(0,5)) + p \cdot \mathbb{E}(T(2,5))$$

$$\mathbb{E}(T(2,5)) = 1 + q \cdot \mathbb{E}(T(1,5)) + p \cdot \mathbb{E}(T(3B,5))$$

$$\mathbb{E}(T(3B,5)) = 1 + (1-b)\cdot\mathbb{E}(T(3,5))$$

$$\mathbb{E}(T(3,5)) = 1 + q\cdot\mathbb{E}(T(2,5)) + p\cdot\mathbb{E}(T(4,5))$$

$$\mathbb{E}(T(4,5)) = 1 + q\cdot\mathbb{E}(T(3,5))$$

Luego, para calcular el puntaje esperado, se realiza el siguiente cálculo:

$$\textit{puntaje esperado} = 100 - 10\cdot\mathbb{E}(T(0,5))$$

Para esta pregunta no es necesario resolver el sistema de ecuaciones, sino que sólo basta con dejar planteadas las ecuaciones y dejar claramente definido cómo se calcularía el puntaje esperado.

En caso de haber realizado la segunda modelación del problema, las ecuaciones son las siguientes:

$$\mathbb{E}(T(0,5)) = 1 + q\cdot\mathbb{E}(T(0,5)) + p\cdot\mathbb{E}(T(1,5))$$

$$\mathbb{E}(T(1,5)) = 1 + q\cdot\mathbb{E}(T(0,5)) + p\cdot\mathbb{E}(T(2,5))$$

$$\mathbb{E}(T(2,5)) = 1 + q\cdot\mathbb{E}(T(1,5)) + p\cdot\mathbb{E}(T(3,5))$$

$$\mathbb{E}(T(3,5)) = 1 + q\cdot(1-b)\cdot\mathbb{E}(T(2,5)) + p\cdot(1-b)\cdot\mathbb{E}(T(4,5))$$

$$\mathbb{E}(T(4,5)) = 1 + q\cdot\mathbb{E}(T(3,5))$$

c) **(5 puntos)** Suponga que le dan la opción de aumentar la probabilidad p de avanzar entre rondas a $p+\delta \leq 1$ (con $\delta > 0$), pero con un costo de disminuir el puntaje inicial de 100 a 50 puntos. ¿Tomaría esta opción o no? ¿Por qué? ¿De qué dependería su decisión? Se puede dejar planteada la respuesta en base a los parámetros del problema. A su vez, considere que va a jugar 10.000 veces el juego y su puntaje será el promedio de todas las veces que jugó.

Solución: Para responder esta pregunta, dado que voy a considerar el promedio de mis puntajes luego de jugar 10.000 veces, es necesario analizar la cantidad esperada de etapas para el escenario base y para el escenario con aumento de probabilidad.

Luego, consideremos que el valor esperado de la cantidad de etapas que me voy a demorar en ir de la ronda 0 a la ronda 5 es γ ($\mathbb{E}(T(0,5))$ calculado en la pregunta anterior). Por ende, mi puntaje promedio en esas 10.000 veces que jugué sería $100 - 10\cdot\gamma$.

Ahora, se puede volver a calcular la cantidad de etapas esperadas para este nuevo escenario donde la probabilidad p de avanzar entre rondas aumenta a $p+\delta$. Digamos que este valor es γ_δ. Por ende, mi puntaje promedio en esas 10.000 veces que jugué sería $50 - 10\cdot\gamma_\delta$.

Finalmente, para que sea conveniente tomar esta opción que nos entregaron, se debe dar que

$$100 - 10\cdot\gamma > 50 - 10\cdot\gamma_\delta$$

Eso sucede cuando

$$5 > \gamma - \gamma_\delta$$

Es decir, si es que el número esperado de etapas para llegar de la ronda 0 a la 5 disminuye en al menos 5 al aumentar la probabilidad de avanzar entre rondas a $p+\delta$, podemos decir que la opción planteada es conveniente.

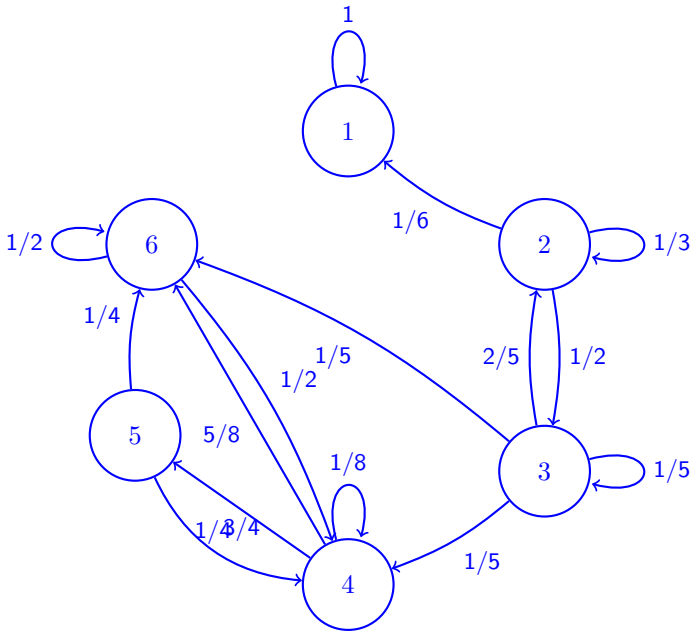
Problema 2 (20 puntos)

Considere una Cadena de Markov en Tiempo Discreto con espacio de estados $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y cuya matriz de probabilidades de transición está dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 & 1/4 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a) **(2 puntos)** Realice el diagrama de estados asociado a esta cadena e identifique y clasifique sus clases.

Solución: Diagrama de Estados:



{1}: Recurrente positiva aperiódica.
{2,3}: Transiente.
{4,5,6}: Recurrente positiva aperiódica.

b) **(2 puntos)** Argumente, en base a resultados vistos en clases, por qué esta cadena no admite distribución límite.

Solución: Notamos que en la cadena no existe ninguna clase recurrentes positiva aperiódica, por lo que **existen** todos los límites $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$. Sin embargo, es directo notar que dichos límites **dependen del estado inicial** i, de modo que no existe una única distribución límite.

c) **(2 puntos)** Argumente, en base a resultados vistos en clases, por qué esta cadena no admite distribución estacionaria.

Solución: Notamos que la cadena no es irreductible pues no tiene una única clase. Además, existe más de una clase recurrente, de modo que la distribución estacionaria no puede ser única (depende de en qué clase recurrente se quede iterando cuando $n \to \infty$).

d) **(4 puntos)** En los ítems b) y c) se argumentó teóricamente porqué esta cadena no admite distribución límite ni distribución estacionaria. Sin embargo, esto no significa que se pueda analizar su comportamiento en el largo plazo. Para comenzar, calcule la matriz $F(i,j)$, $\forall i,j \in E$, es decir, verifique teóricamente las clases que definió en el inciso a).

Solución: Para los distintos valores de $F(i,j)$ buscados, se utiliza

$$F(i,j) = \sum_k F_k(i,j) = P_{ij} + \sum_{r \neq j} P_{ir} F(r,j)$$

Se revisan caso a caso las entradas de la matriz. A continuación se presentan los resultados y el planteamiento de cada entrada para cada j.

j = 1:

$$F(1,1) = 1$$
$$F(2,1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}F(2,1) + \frac{1}{2}F(3,1) = 0.4$$
$$F(3,1) = \frac{1}{5}F(3,1) + \frac{2}{5}F(2,1) = 0.2$$
$$F(4,1) = F(5,1) = F(6,1) = 0$$

j = 2:

$$F(2,2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}F(3,2) = \frac{7}{12}$$
$$F(3,2) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}F(3,2) = 0.5$$

j = 3:

$$F(2,3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}F(2,3) = 0.75$$
$$F(3,3) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}F(2,3) = 0.5$$

j = 4:

$$F(2,4) = \frac{1}{3}F(2,4) + \frac{1}{2}F(3,4) = 0.6$$
$$F(3,4) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}F(2,4) + \frac{1}{5}F(3,4) = 0.8$$
$$F(4,4) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}F(5,4) + \frac{5}{8}F(6,4) = 1$$
$$F(5,4) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}F(6,4) = 1$$
$$F(6,4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(6,4) = 1$$

j = 5:

$$F(2,5) = \frac{1}{3}F(2,5) + \frac{1}{2}F(3,5) = 0.6$$
$$F(3,5) = \frac{2}{5}F(2,5) + \frac{1}{5}F(3,5) + \frac{1}{5}F(4,5) + \frac{1}{5}F(6,5) = 0.8$$
$$F(4,5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}F(4,5) + \frac{5}{8}F(6,5) = 1$$
$$F(5,5) = \frac{3}{4}F(4,5) + \frac{1}{4}F(6,5) = 1$$
$$F(6,5) = \frac{1}{2}F(4,5) + \frac{1}{2}F(6,5) = 1$$

j = 6:

$$F(2,6) = \frac{1}{3}F(2,6) + \frac{1}{2}F(3,6) = 0.6$$

$$F(3,6) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}F(3,6) + \frac{1}{5}F(4,6) + \frac{2}{5}F(2,6) = 0.8$$

$$F(4,6) = \frac{5}{8} + \frac{1}{4}F(5,6) + \frac{1}{8}F(4,6) = 1$$

$$F(5,6) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}F(4,6) = 1$$

$$F(6,6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(4,6) = 1$$

Así,

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & \frac{7}{12} & 0.75 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 & 0.5 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

e) **(4 puntos)** Suponga que usted diseña el sistema representado por esta cadena de tal modo que la probabilidad de comenzar en el estado 2 es 2/3 y la probabilidad de comenzar en el estado 3 es 1/3. Calcule $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j)$, $\forall j \in E$.

Solución: A partir del enunciado se tiene:

$$f^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

y se pide $\lim_{n\to\infty} {f^{(0)}}^T P^n$, es decir, $\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)}$. Para ello notamos que:

- Para los estados transientes: $\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = 0$ con $j \in \{2,3\}$.
- El estado 1, al ser absorbente, solo depende de la probabilidad de llegar a él. Luego: $\lim_{n\to\infty} P_{i,0}^{(n)} = F(i,0)$ con $i \in \{2,3\}$.
- Los estados 4, 5 y 6 componen una sub-cadena de una única clase recurrente positiva aperiódica e irreducible. Por tanto, dentro de ella, existe distribución estacionaria y existe distribución límite y, por lo tanto, coinciden. Así, planteamos:

$$\pi^T = \pi^T P \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1 \iff \begin{bmatrix} \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{21} \\ \frac{2}{21} \\ \frac{11}{21} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} P_{i,4}^{(n)} = \pi_4 \cdot F(i,4)$$
$$\lim_{n\to\infty} P_{i,5}^{(n)} = \pi_5 \cdot F(i,5)$$
$$\lim_{n\to\infty} P_{i,6}^{(n)} = \pi_6 \cdot F(i,6)$$

Finalmente, se calcula la probabilidad límite ponderando por la probabilidad de comenzar en cada estado:

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}F(2,1) + \frac{1}{3}F(3,1) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3}\cdot\pi_3 F(2,4) + \frac{1}{3}\cdot\pi_3 F(3,4) \\ \frac{2}{3}\cdot\pi_4 F(2,5) + \frac{1}{3}\cdot\pi_4 F(3,5) \\ \frac{2}{3}\cdot\pi_5 F(2,6) + \frac{1}{3}\cdot\pi_5 F(3,6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{16}{63} \\ \frac{4}{63} \\ \frac{22}{63} \end{bmatrix}$$

f) **(3 puntos)** Determine la distribución de probabilidad de retornar desde el estado 3 a sí mismo en $k \in \mathbb{N}$ etapas por primera vez. Además, calcule el tiempo medio de retorno al estado 3. Justifique su respuesta.

Solución: Nos piden $F_k(3,3) = \sum_{r\neq 3} P_{3,r} F_{k-1}(r,3)\ \forall k \geq 2$, por lo que desarrollando para cada valor de k obtenemos

$$F_1(3,3) = 1/5$$
$$F_2(3,3) = 2/5 \cdot 1/2$$
$$F_3(3,3) = 2/5 \cdot 1/3 \cdot 1/2$$
$$F_4(3,3) = 2/5 \cdot 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/2$$
$$\vdots$$
$$F_k(3,3) = 2/5 \cdot (1/3)^{k-2} \cdot 1/2$$

En cuanto al tiempo medio de retorno al estado 3, notamos que dado que este es parte de una clase transiente, existe la posibilidad de entrar en una clase que no nos permita volver a 3. Así, el tiempo esperado es infinito.

g) **(3 puntos)** Por último, si usted sabe que en una determinada etapa el sistema se encuentra en el estado 6. ¿Cuál es la distribución de probabilidad después de dos transiciones más? ¿Y después de 987.654 transiciones?

Solución: Si el sistema está inicialmente en el estado 6, basta analizar lo que ocurre en el largo plazo para la sub-cadena compuesta por los estados 4, 5 y 6, utilizando la matriz P' (en la que solo se observan 4, 5 y 6). Dado que se pregunta para 2 transiciones más, tenemos:

$$P' = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \implies P'^{(2)} = P'^{(1+1)} = P'^{(1)} \cdot P'^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{33}{64} & \frac{1}{32} & \frac{29}{64} \\ \frac{7}{32} & \frac{3}{16} & \frac{19}{32} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{8} & \frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$f^{(2)} = f^{(0)T} \cdot P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{33}{64} & \frac{1}{32} & \frac{29}{64} \\ \frac{7}{32} & \frac{3}{16} & \frac{19}{32} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{8} & \frac{9}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{1}{8} & \frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

Finalmente, es claro notar que en 987.654 etapas el sistema se puede considerar como en estado estacionario o de largo plazo, por lo tanto, la distribución de probabilidad corresponde al vector $[\pi_4\ \pi_5\ \pi_6]$

Problema 3 (20 puntos)

A una heladería llegan grupos de clientes según un Proceso de Poisson de tasa $\lambda > 0$ [grupos/hora]. Cada grupo puede estar compuesto por 1, 2 ó 3 personas, con probabilidad p, q y $1-p-q$ (con $0 < p, q < 1$), respectivamente. Usted sabe que todos los clientes que entran a la heladería compran exactamente un helado. Considerando que la heladería abre a las 10 horas y cierra a las 20 horas, responda las siguientes preguntas:

a) **(4 puntos)** Determine la distribución de probabilidades del tiempo que trascurre desde que abre la heladería hasta el instante en que llega el segundo grupo.

Solución:

Sean T_1 el tiempo hasta la llegada del primer grupo ($\sim Exponencial(\lambda)$) y T_2 el tiempo entre la llegada del primer y segundo grupo ($\sim Exponencial(\lambda)$). Luego, la probabilidad pedida esta dada por: $P(S_2 \leq t)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_2 \leq t) &= \mathbb{P}(T_1 + T_2 \leq t) \\
&= \int_0^t \mathbb{P}(T_2 \leq t-x) \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx \\
&= \int_0^t (1 - e^{-\lambda(t-x)}) \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx \\
&= \left(\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \right) - \lambda \int_0^t e^{-\lambda t} dx \\
&= \left(1 - e^{-\lambda t}\right) - \lambda t e^{-\lambda t} \\
&= 1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t} - (\lambda_A + \lambda_B) t e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}
\end{aligned}$$

También es válido expresar la integral de la función de distribución acumulada de una Gamma(2, λ).

$$\mathbb{P}(S_2 \leq t) = \int_0^t \frac{\lambda^2 x^{2-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(2)} dx = \int_0^t \lambda^2 x e^{-\lambda x} \, dx = \int_0^t (\lambda_A + \lambda_B)^2 x e^{-(\lambda_A + \lambda_B)x} \, dx$$

b) **(3 puntos)** Calcule la probabilidad de que el primer helado sea vendido antes de las primeras $0 < h \leq 10$ horas.

Solución: Como el primer helado será vendido al primer grupo que llegue, buscamos que el tiempo para la llegada del primer grupo, T_1, sea menor o igual a h. Como el proceso de llegada de grupos es Poisson, los tiempos entre eventos distribuyen exponencial. Luego, se puede calcular la probabilidad pedida como:

$$\mathbb{P}(X_1 \leq h) = 1 - e^{-\lambda h}$$

c) **(3 puntos)** Calcule la probabilidad de que lleguen exclusivamente dos parejas entre las 14 y 15 horas.

Solución: Sean $\{N_i(t), t \geq 0\}$ los procesos Poisson que representan la llegada de grupos de tamaño $i = 1, 2, 3$. Luego la probabilidad buscada es:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_2(1) = 2, N_1(1) = 0, N_3(1) = 0) &= \mathbb{P}(N_2(1) = 2) \cdot \mathbb{P}(N_1(1) = 0) \cdot \mathbb{P}(N_3(1) = 0) \\
&= \frac{(q\lambda)^2 e^{-q\lambda}}{2!} \cdot e^{-p\lambda} \cdot e^{-(1-p-q)\lambda} \\
&= \frac{(q\lambda)^2 e^{-\lambda}}{2}
\end{aligned}$$

d) **(3 puntos)** Si usted sabe que entre las 15 y 20 horas llegaron 20 grupos de personas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 10 de esos grupos sean grupos de exactamente dos personas?

Solución: Queremos calcular la probabilidad de que al menos 10 de los 20 grupos que llegaron entre las 15 y 20 horas sean de dos personas, dado que $N(5) = 20$. Es decir, buscamos $\mathbb{P}(N_2(5) \geq 10 \mid N(5) = 20)$. Dado que $N_2(5) \mid N(5) = 20$ sigue una distribución Binomial con parámetros $n = 20$ y $p = q$, esta probabilidad se calcula como:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_2(5) \geq 10 \mid N(5) = 20) &= \sum_{k=10}^{20} \mathbb{P}(N_2(5) = k \mid N(5) = 20) \\ &= \sum_{k=10}^{20} \binom{20}{k} q^k (1-q)^{20-k}.\end{aligned}$$

e) **(4 puntos)** Calcule la probabilidad de que se hayan vendido exactamente 3 helados entre las 16 y 17 horas.

Solución: Existen 3 formas para que se cumpla lo pedido:

- Llegue 1 grupo de una persona, 1 grupo de dos personas y 0 grupos de 3 personas.

$$p\lambda e^{-p\lambda} \cdot q\lambda e^{-q\lambda} \cdot e^{-r\lambda} = pq\lambda^2 e^{-\lambda}$$

- Llegue 1 grupo de 3 personas y 0 grupos de otro tamaño.

$$r\lambda e^{-r\lambda} e^{-(p+q)\lambda} = r\lambda e^{-\lambda}$$

- Lleguen 3 grupos de 1 persona y 0 grupos de otro tamaño.

$$\frac{(p\lambda)^3 e^{-p\lambda}}{3!} e^{-(q+r)\lambda} = \frac{(p\lambda)^3 e^{-\lambda}}{3!}$$

Finalmente la probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de estos 3 eventos:

$$pq\lambda^2 e^{-\lambda} + r\lambda e^{-\lambda} + \frac{(p\lambda)^3 e^{-\lambda}}{3!}$$

f) **(3 puntos)** Calcule el valor esperado del número de helados vendidos durante el día, dado que durante las primeras $0 < h \leq 10$ horas se vendieron $k \in \mathbb{N}$ helados.

Solución: La esperanza puede obtenerse utilizando la fórmula para un proceso Poisson compuesto:

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[Y] \cdot \mathbb{E}[N(t)]$$

donde $X(t)$ es el número de helados vendidos, Y es el número de personas por grupo y $N(t)$ es el proceso Poisson asociado a la llegada de grupos. Así,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(10-h) \mid X(h) = k] &= \mathbb{E}[X(10-h)] + k \\ &= \mathbb{E}[Y] \cdot \mathbb{E}[N(10-h)] + k \\ &= (p + 2q + 3r) \cdot \lambda(10-h) + k\end{aligned}$$

Formulario Distribuciones

Distribución	**PDF**	**CDF**	**Esperanza**	**Varianza**
Poisson(λ)	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Binomial(n, p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Uniforme(a, b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Geométrica(p)	$(1-p)^{x-1} p$	$1 - (1-p)^x$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Gamma(k, λ)	$\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$	$\int_0^x \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)}\, dt$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$