Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesor Andrés Navarro
Primer Semestre 2026

Examen

Duración: 2 horas y 30 minutos

Para el examen debe responder 4 de los 5 problemas. En la primera página de su cuadernillo (las hojas que usted escanea) **debe especificar los cuatro problemas a considerar** en el espacio delimitado para ello.

En caso de no descartar explícitamente una pregunta, **no se contará el problema con mayor puntaje obtenido para el cálculo final de la nota**.

Problema 1 (15 puntos): Sistemas de espera

En un hospital, los pacientes llegan a la sala de emergencias según un proceso Poisson con tasa λ. En el hospital hay tres áreas principales: triage, tratamiento y farmacia. Al llegar, todos los pacientes se dirigen a la zona de triage, donde dos enfermeros atienden en paralelo a un paciente cada uno, demorando la atención de cada uno un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido con tasa μ. Tras ser evaluados, pueden ocurrir tres situaciones:

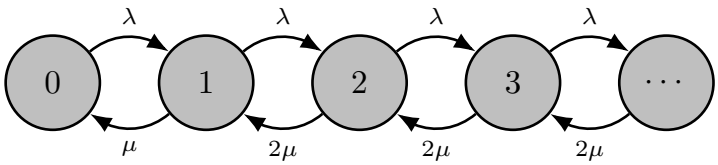
1. Con probabilidad $q > 0$, el paciente es admitido para tratamiento y se dirige a la sala de tratamiento.
2. Con probabilidad $p > 0$, el paciente es dado de alta y se va a su casa.
3. Con probabilidad $r > 0$, el paciente necesita recoger medicamentos en la farmacia antes de irse a casa.

Se cumple que $p + q + r = 1$. La sala de tratamiento cuenta con cinco doctores, donde cada uno de ellos puede atender a un paciente en forma independiente en un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido con tasa β. En la farmacia hay un solo farmacéutico que se encarga de despachar los medicamentos, tardando en cada atención un tiempo también aleatorio exponencialmente distribuido con tasa γ. Una vez que los pacientes obtienen sus medicamentos o son dados de alta, salen del hospital. Asuma que ningún paciente que debe pasar a tratamiento pasa luego por la farmacia. Se desea analizar el comportamiento del hospital en estado estacionario.

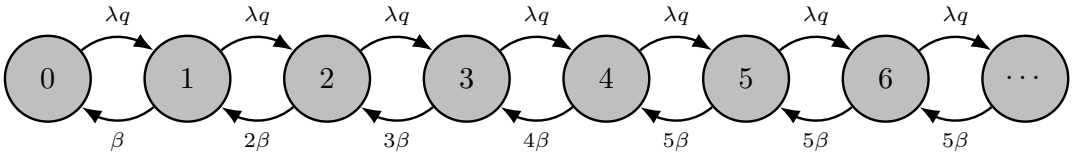
(a) **(5 puntos)** Modele mediante una Cadena de Markov en Tiempo Continuo cada área de atención del hospital. Indique las tasas efectivas de entrada a cada etapa y las condiciones que se deben cumplir en cada una de ellas para asegurar que el sistema no colapse.

Solución: Para esto podemos representar las tres partes del problema por separado. En cada una, los estados representan la cantidad i de pacientes en el área (en atención y en fila esperando atención), con $i \in [0, \infty)$.

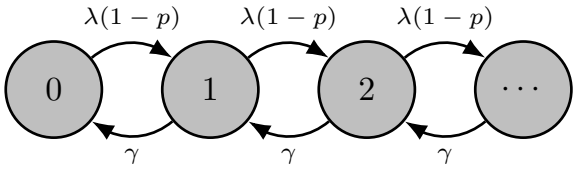
- Triage: En este caso $\lambda_e = \lambda$, todo paciente que entra al sistema pasa por esta área. Para alcanzar estacionalidad se requiere que la tasa de llegada de cada sistema sea menor a la tasa de atención de cada uno, en este caso la condición es $\lambda < 2\mu$. El grafo para este sistema de la red es:



- Tratamiento: En este caso $\lambda_e = \lambda q$, ya que solo la porción q de pacientes pasan a tratamiento luego del triage. Para alcanzar estacionalidad se requiere que $\lambda q < 5\beta$. El grafo es:



- Farmacia: En este caso $\lambda_e = \lambda(1-p)$, ya que solo la porción p de pacientes deciden retirarse y no utilizar ningún servicio del hospital luego del triage. Para alcanzar estacionalidad se requiere que $\lambda(1-p) < \gamma$. El grafo es:



(c) **(5 puntos)** En el largo plazo, ¿en promedio cuantas personas por hora llegan al hospital y se encuentran la zona de Triagge con máximo 1 enfermero ocupado? Puede dejar expresada la solución en términos de elementos conocidos. Asuma que todas las tasas están medidas en horas.

Solución: Dado que estamos trabajando con un sistema M/M/2, conocemos P_0:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2!} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2\mu}} \right]^{-1}$$

Luego, también conocemos que:

$$\begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0, & 0 \leq n \leq c, \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{2!\, 2^{n-2}} P_0, & n \geq 2+1, \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$P_1 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1}{1!} P_0 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

Con esto sabemos que la proporción del tiempo en el que el sistema está vacío o con máximo una persona es $P_0 + P_1$. Luego, en promedio, en una hora llegan $\lambda \cdot (P_0 + P_1)$ personas al hospital y se encuentran que la zona de Triagge tiene máximo una persona entre atención y en espera.

(c) **(5 puntos)** Calcule el tiempo promedio que permanece en el sistema un paciente que va únicamente a retirar medicamentos. Considere que antes de ir a recoger medicamentos, ese paciente debió pasar por el triage.

Solución: El paciente recorre dos etapas en serie —triage (M/M/2) y farmacia (M/M/1)—, de modo que su tiempo total en el sistema es la suma de ambas, usando $W = \dfrac{L}{\lambda}$ en cada etapa:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{L_1}{\lambda} + \frac{L_2}{\lambda_e}.$$

Etapa 1 — triage (M/M/2). Con $\rho_1 = \dfrac{\lambda}{c\,\mu_1}$, la probabilidad de sistema vacío (M/M/c del formulario) es

$$P_0^{(1)} = \left[\sum_{n=0}^{c} \frac{\lambda^n}{\mu_1^n\, n!} + \frac{\lambda^c}{\mu_1^c\, c!}\, \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \right]^{-1},$$

y con ella

$$L_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{(\lambda/\mu_1)^c\, \rho_1}{c!\,(1-\rho_1)^2}\, P_0^{(1)}, \qquad W_1 = \frac{L_1}{\lambda}.$$

Etapa 2 — farmacia (M/M/1). Con tasa efectiva $\lambda_e = p\,\lambda$,

$$L_2 = \frac{\lambda_e}{\mu_2 - \lambda_e}, \qquad W_2 = \frac{L_2}{\lambda_e}.$$

Tiempo total en el sistema.

$$W = \frac{L_1}{\lambda} + \frac{L_2}{\lambda_e}.$$

Problema 2 (15 puntos): Simulación

Sea $X \in [0,1]$ la fracción de la energía diaria generada por un panel fotovoltaico que un hogar *autoconsume*, modelada mediante una variable aleatoria continua, acotada en el intervalo $[0,1]$, cuya función de densidad (PDF) es

$$f(x) = 12\,x\,(1-x)^2, \qquad 0 \le x \le 1.$$

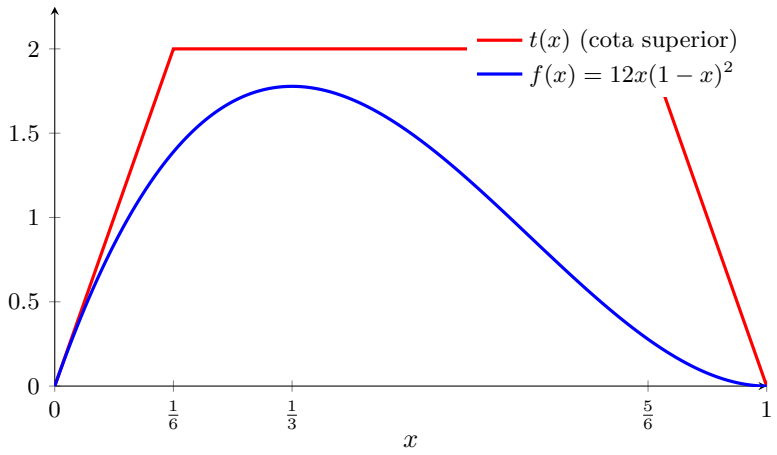
Con el fin de simular esta variable, usted decide aplicar el método de **Aceptación y Rechazo**. Para ello considere la función de cota superior $t(x)$ dada por la función lineal por tramos con forma trapezoidal mostrada en la Figura :

$$t(x) := \begin{cases} 12x & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{6}, \\ 2 & \text{si } \frac{1}{6} < x \le \frac{5}{6}, \\ 12(1-x) & \text{si } \frac{5}{6} < x \le 1. \end{cases}$$

(a) **(5 puntos)** Explicite la *función de aceptación* $g(x)$, el valor de la constante de normalización c de $t(x)$, y la función $h(x)$ a utilizar en el algoritmo de Aceptación y Rechazo.

Solución: Constante de normalización. $c = \int_0^1 t(x)\,dx$ es el área del trapecio: dos triángulos de base $\frac{1}{6}$ y altura 2, más un rectángulo de base $\frac{2}{3}$ y altura 2:

$$c = 2 \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot 2}_{=1/6} + \underbrace{\tfrac{2}{3} \cdot 2}_{=4/3} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}.$$



Luego $h(x) = t(x)/c = \frac{3}{5}\, t(x)$:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{36}{5}\, x & 0 \le x \le \frac{1}{6}, \\ \dfrac{6}{5} & \frac{1}{6} < x \le \frac{5}{6}, \\ \dfrac{36}{5}\,(1-x) & \frac{5}{6} < x \le 1. \end{cases}$$

Función de aceptación. $g(x) = \dfrac{f(x)}{t(x)}$:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{12x(1-x)^2}{12x} = (1-x)^2 & 0 \le x \le \frac{1}{6}, \\ \dfrac{12x(1-x)^2}{2} = 6x(1-x)^2 & \frac{1}{6} < x \le \frac{5}{6}, \\ \dfrac{12x(1-x)^2}{12(1-x)} = x(1-x) & \frac{5}{6} < x \le 1. \end{cases}$$

(b) **(5 puntos)** A partir de la función $h(x)$, determine explícitamente la función de distribución acumulada (CDF) $H(x)$ y su función inversa $H^{-1}(U)$.

Solución: Integrando h:

$$H(x) = \begin{cases} \dfrac{18}{5}\, x^2 & 0 \le x \le \dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{6}{5}\, x - \dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{6} < x \le \dfrac{5}{6}, \\ 1 - \dfrac{18}{5}\,(1-x)^2 & \dfrac{5}{6} < x \le 1, \end{cases}$$

Luego, para obtener la inversa, simplemente despejamos H(x) en cada uno de los tramos.

$$H^{-1}(U) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{5U}{18}} & 0 \le U \le \frac{1}{10}, \\ \dfrac{1+10U}{12} & \frac{1}{10} < U \le \frac{9}{10}, \\ 1 - \sqrt{\dfrac{5(1-U)}{18}} & \frac{9}{10} < U \le 1. \end{cases}$$

(c) **(5 puntos)** Aplicando el algoritmo de Aceptación y Rechazo, complete la siguiente tabla de simulación. Use U_1 para generar el candidato $Y = H^{-1}(U_1)$ y U_2 para la decisión de aceptación. Asuma que U_1 y U_2 son variables aleatorias uniformes entre 0 y 1. Indique el o los valores aceptados X.

n	U_1	U_2
1	0.04	0.85
2	0.50	0.30
3	0.20	0.70
4	0.95	0.50

Solución: Umbrales de región: $U_1 \leq 0.1$ (región 1), $0.1 < U_1 \leq 0.9$ (región 2), $U_1 > 0.9$ (región 3).

n	U_1	U_2	$Y = H^{-1}(U_1)$	$g(Y)$	Decisión	X
1	0.04	0.85	$\sqrt{\frac{5(0.04)}{18}} = 0.1054$	$(1-Y)^2 = 0.8003$	$0.85 > 0.800 \Rightarrow$ Rechazo	—
2	0.50	0.30	$\frac{1+10(0.50)}{12} = 0.5000$	$6Y(1-Y)^2 = 0.7500$	$0.30 \leq 0.750 \Rightarrow$ Acepta	0.5000
3	0.20	0.70	$\frac{1+10(0.20)}{12} = 0.2500$	$6Y(1-Y)^2 = 0.8438$	$0.70 \leq 0.844 \Rightarrow$ Acepta	0.2500
4	0.95	0.50	$1 - \sqrt{\frac{5(0.05)}{18}} = 0.8821$	$Y(1-Y) = 0.1040$	$0.50 > 0.104 \Rightarrow$ Rechazo	—

Muestras aceptada: $X = \{0.5,\ 0.25\}$.

Problema 3 (15 puntos): Proceso de Poisson

Una empresa le presta a usted servicios de recepción de llamados en una central telefónica para atención al cliente. Dados datos históricos, se sabe que recibe llamadas de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa $\lambda = 5[llamadas/hora]$. El servicio ha comenzado a operar a las 7:00 de la mañana y terminará de atender a las 18:00, atendiendo por un total de 11 horas al día. Se sabe que el día de ayer llegaron 7 llamadas entre el comienzo de operación (7:00) y las 9:00.

Responda las siguientes preguntas:

(a) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad que la primera llamada del día de ayer haya llegado antes de las 8:00?

Solución:

$$P\big(N(7{:}00, 8{:}00) \geq 1 \mid N(7{:}00, 9{:}00) = 7\big) = 1 - P\big(N(7{:}00, 8{:}00) = 0 \mid N(7{:}00, 9{:}00) = 7\big)$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

(b) (6 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de no haber recibido ninguna llamada entre las 8:45 y 9:15 del día de ayer?

Solución: La probabilidad de que no se haya recibido ninguna llamada entre las 8:45 y 9:15 del día de ayer es equivalente a no haber recibido ninguna llamada entre las 8:45 y 9:00 y tampoco haber recibido ninguna llamada entre las 9:00 y las 9:15.

Dicho esto, podemos dividir la probabilidad solicitada en dos cálculos independientes:

(a) Probabilidad de que la llamada llegue entre 8:45 y 9

(b) Probabilidad de que la llamada llegue entre 9 y 9:15

Resolvemos el problema por casos. Para el primero

(a) Queremos calcular $P(N(8{:}45, 9{:}00) = 0 \mid N(7{:}00, 9{:}00) = 7)$.
Sabemos que $P(N(8{:}45, 9{:}00) = 0 \mid N(7{:}00, 9{:}00) = 7)$ distribuye Binomial de parámetro $\left(7, \frac{105}{120}\right)$. Entonces

$$\begin{aligned} P(N(8{:}45, 9{:}00) = 0 \mid N(7{:}00, 9{:}00) = 7) &= \left[\binom{7}{0}\left(\frac{1}{8}\right)^0\left(\frac{7}{8}\right)^7\right] \\ &= \left(\frac{7}{8}\right)^7 \end{aligned}$$

(b) Para el segundo caso, dado que no tenemos información previa, realizamos el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} P(N(9{:}00, 9{:}15) &= \frac{(\lambda t)^0 \cdot e^{-5\frac{15}{60}}}{0!} \\ &= e^{-\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

Luego, la probabilidad pedida en total es

$$P(N(8{:}45, 9{:}15) = \left(\frac{7}{8}\right)^7 \cdot e^{-\frac{5}{4}}$$

(c) (6 puntos) Suponga que aún no le han enviado el cobro por los servicios del día de ayer ni tiene información sobre la cantidad de llamadas durante el día (pero si sabe que llegaron 7 llamadas entre las 7:00 y 9:00).Calcule el valor esperado de lo que usted tendrá que pagar por los llamados recibidos y atendidos durante el día de ayer. El esquema de cobros de la siguiente forma:

- Para las primeras 50 llamadas cobra c por cada una de ellas.
- Para la $n - esima$ llamada atentida en el día, con $n > 50$, el cobro que le realiza se calcula de la forma $c \cdot \frac{n+50}{2n}$
- Existe una facturación mínima diaria equivalente a 35 llamadas.

Solución: Suponemos que aún no llega el cobro ni se conoce el total del día, pero se sabe que $N(7{:}00, 9{:}00) = 7$. Como el proceso de Poisson tiene incrementos independientes, las llamadas entre 9:00 y 18:00 son independientes de las primeras. Así, el total atendido ayer (N) es

$N = N(7{:}00, 18{:}00) = N(7{:}00, 9{:}00) + N(9{:}00, 18{:}00) = 7 + M$, Donde $M = N(9{:}00, 18{:}00) \sim \text{Poisson}(5{\cdot}9) = \text{Poisson}(45)$.

El cobro total atendiendo n llamadas, con la facturación mínima de $35c$, es

$$C(n) = \begin{cases} 35c, & n \leq 35, \\ nc, & 35 \leq n \leq 50, \\ 50c + \displaystyle\sum_{i=51}^{n} c\,\frac{i+50}{2i}, & n > 50, \end{cases}$$

Como $N = 7 + M$, se tiene $P(N = n) = \dfrac{e^{-45}\,45^{\,n-7}}{(n-7)!}$, y el valor esperado del pago es

$$\mathbb{E}[\text{Pago}] = \sum_{n=7}^{35} 35c\,P(N = n) + \sum_{n=36}^{50} nc\,P(N = n) + \sum_{n=51}^{\infty}\left[50c + \sum_{i=51}^{n} c\,\frac{i+50}{2i}\right] P(N = n)$$

Problema 4 (15 puntos): CMTD

(a) (5 puntos) Considere una moneda desbalanceada que se lanza sucesivamente. La secuencia termina cuando, por primera vez, el resultado del lanzamiento actual sea Sello y el del lanzamiento inmediatamente anterior sea Cara (es decir, se observa la secuencia consecutiva CS). Represente el problema como una cadena de Markov en tiempo discreto (CMTD), definiendo un espacio de estados apropiado, y explique (no necesariamente calcular) cómo obtener el esperado de la cantidad de lanzamientos necesarios (desde el inicio del experimento) para alcanzar la condición de detención, detallando las variables y ecuaciones necesarias. Considere que la probabilidad de obtener cara en esta moneda desbalanceada es p y, por ende, la probabilidad de obtener sello es $1-p$

Solución: El espacio de estados es el siguiente:

$$\mathcal{S} = \{E_0,\ E_C,\ \Delta\}$$

donde:

- E_0: el último lanzamiento **no** fue Cara (incluye el estado inicial, antes de lanzar, y todo momento en que el último resultado fue Sello).
- E_C: el último lanzamiento **fue Cara**. Un Sello en el siguiente paso completa CS.
- Δ: estado **absorbente**; se observó la secuencia CS y el proceso termina.

Analizando el siguiente lanzamiento desde cada estado:

$$P = \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_C \\ \Delta \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_0 & E_C & \Delta \end{array} \\ \begin{pmatrix} (1-p) & p & 0 \\ 0 & p & (1-p) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Luego, para obtener el valor esperado de la cantidad de lanzamientos necesarios para alcanzar la condición de detención, se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$E[T(E_0,\Delta)] = 1 + (1-p)\,E[T(E_0,\Delta)] + p\,E[T(E_C,\Delta)],$$

$$E[T(E_C,\Delta)] = 1 + p\,E[T(E_C,\Delta)].$$

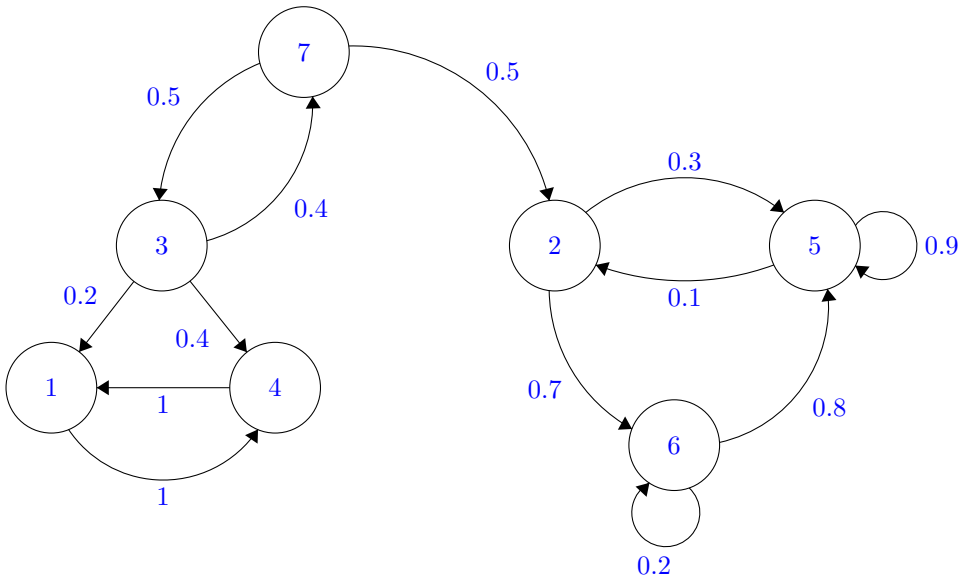
donde lo que buscamos es simplemente $E[T(E_0,\Delta)]$

(b) (4 puntos) Ahora considere una Cadena de Markov en Tiempo Discreto con estados $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ dada por la siguiente matriz de transición:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Determine las clases de estados y clasifique todos los estados en transientes, recurrentes positivos, o recurrentes nulos, y determine si son aperiódicos o periódicos, y el valor del periodo si es que corresponde.

Solución: El grafo asociado a la matriz es:



Las clases y periodos asociadas a la matriz son las siguientes:

- $\{1,4\}$: Recurrente positiva periódica, $p=2$
- $\{3,7\}$: Transiente periódica, $p=2$
- $\{2,5,6\}$: Recurrente positiva aperiódica

(c) (3 puntos) Calcule $E[(T(6,5))]$ y $E[(T(7,5))]$. Interprete sus resultados.

Solución: Los estados $2,5,6$ pertenecen a la clase **recurrente cerrada** $\{2,5,6\}$. Como es finita y cerrada, es recurrente y los tiempos para visitar cualquier otro estado dentro de ella tienen esperanza finita. Debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$E[T(6,5)] = 1 + 0,2 \cdot E[T(6,5)]$$

$$E[T(2,5)] = 1 + 0,7 \cdot E[T(6,5)]$$

Despejando obtenemos:

$$\boxed{E[T(6,5)] = \tfrac{1}{0.8} = 1.25}.$$

Para $E[(T(7,5))]$ podemos notar que $F(7,5) < 1$. Por lo tanto, $E[(T(7,5))] = \infty$, dado que existen escenarios en los que nunca se llegará al estado 5 partiendo desde el estado 7.

(d) (3 puntos) Calcule $F(2,6)$ y $F(3,6)$. Interprete los resultados.

Solución: $F(2,6)$**:** los estados 2 y 6 están en la misma clase recurrente (finita, cerrada). En una clase recurrente todos los estados se visitan con probabilidad 1, por lo que:

$$\boxed{F(2,6) = 1}.$$

$F(3,6)$**:** Lo primero es notar que $F(4,6) = F(1,6) = 0$. Con esto en consideración debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$F(3,6) = 0,4 \cdot F(7,6)$$

$$F(7,6) = 0,5 \cdot F(3,6) + 0,5 \cdot F(2,6)$$

Dado que los estados 2 y 6 están en la misma clase recurrente (finita, cerrada), sabemos que $F(2,6) = 1$. Considerando esto, podemos despajar ambos resultados y obtener que:

Sustituyendo:

$$\boxed{F(3,6) = 0.25},$$

Interpretación.

- $F(2,6) = 1$: partiendo de 2 se alcanza 6 con certeza, pues ambos están en la misma clase recurrente.
- $F(3,6) = 0.25$: partiendo de 3 solo hay un 25% de alcanzar alguna vez 6, porque con probabilidad 0.75 la cadena cae en la clase $\{1,4\}$, de la que nunca sale.

Problema 5 (15 puntos): CMTC

Un laboratorio clínico opera las 24 horas del día y recibe dos tipos de muestras, que llegan de forma independiente según procesos de Poisson: muestras de **urgencia** a tasa α [muestras/hora] y muestras de **rutina** a tasa β [muestras/hora]. El laboratorio cuenta con **1 analizador de alta complejidad** y **2 analizadores estándar**, donde cada máquina puede operar en paralelo. El tiempo de procesamiento es exponencial de media $1/\mu_1$ horas en el analizador de alta complejidad y $1/\mu_2$ horas en uno estándar.

Reglas de operación:

- Las muestras de **urgencia** solo pueden procesarse en el analizador de **alta complejidad**, y las de **rutina** solo en los analizadores **estándar** (cada tipo en su propio equipo, atendidas por orden de llegada).
- Las muestras deben conservarse en condiciones especiales mientras aguardan, por lo que **solo puede esperar una muestra en total (de cualquier tipo)**. Si una muestra llega cuando ya hay otra esperando, es **derivada a un laboratorio externo.**

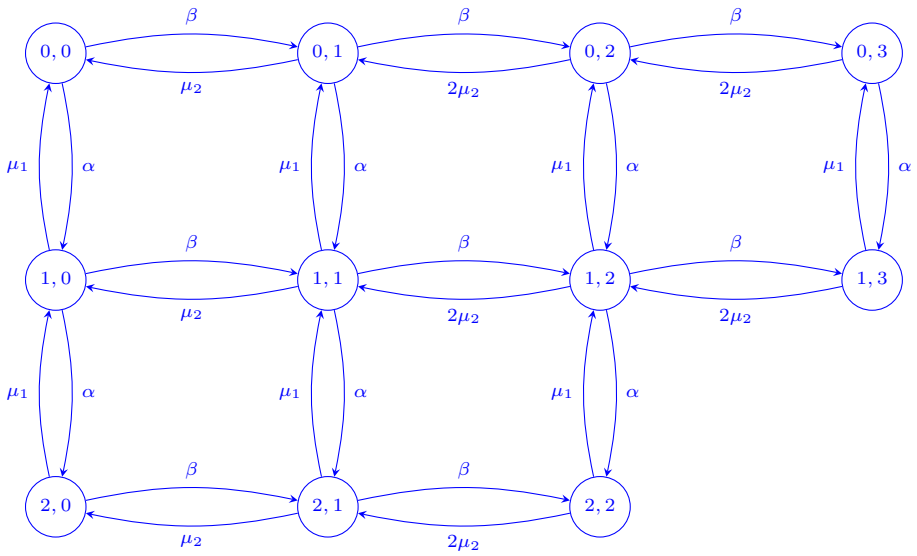
(a) (4 puntos) Elabore el diagrama de transiciónn de estados considerando los estados de la forma $(N_1(t), N_2(t))$, donde

$$N_1(t) = \text{número de muestras de urgencia en el laboratorio en el instante } t,$$

$$N_2(t) = \text{número de muestras de rutina en el laboratorio en el instante } t.$$

.

Solución: El estado es (N_1, N_2) con $N_1 \in \{0,1,2\}$ (1 analizador de urgencia + a lo más 1 en espera) y $N_2 \in \{0,1,2,3\}$ (2 analizadores estándar + a lo más 1 en espera), sujeto a que la espera total no supere 1 muestra. Esto da los 11 estados del diagrama.



(b) (3 puntos) Determine la fracción del tiempo, en el largo plazo, en que está operando exactamente **uno** de los dos tipos de analizadores, en términos de las probabilidades estacionarias $\pi(i,j)$.

Solución: Se requiere que haya algún analizador ocupado de un tipo y ninguno del otro: urgencia operando y rutina ociosa ($N_1 \geq 1,\ N_2 = 0$), o rutina operando y urgencia ociosa ($N_1 = 0,\ N_2 \geq 1$). Esos estados son $(1,0),(2,0)$ y $(0,1),(0,2),(0,3)$, por lo que

$$\text{fracción} = \pi(1,0) + \pi(2,0) + \pi(0,1) + \pi(0,2) + \pi(0,3).$$

(c) (8 puntos) Considere ahora el siguiente cambio. Con probabilidad p, una muestra de urgencia que termina su procesamiento requiere una **segunda prueba especial**, de duración exponencial de media $1/\mu_3$. Esta máquina especial consume tanta electricidad que **no puede operar en paralelo con ningún otro analizador**: mientras está en uso se **pausa** el procesamiento de todos los analizadores (de alta complejidad y estándar), y solo opera la máquina especial hasta terminar. Al finalizar, el sistema **retoma su operación desde el mismo punto** en que se encontraba. Considere que tampoco se pueden aceptar nuevas muestras mientras esta máquina está en este modo de operación especial. Explique cómo se modifica la CMTC y elabore el nuevo diagrama de transición de estados.

Solución: Para incorporar la máquina especial se modifican los estados a $(N_1(t), N_2(t), s)$, donde s define el modo de operación del análisis de las muestras de urgencia:

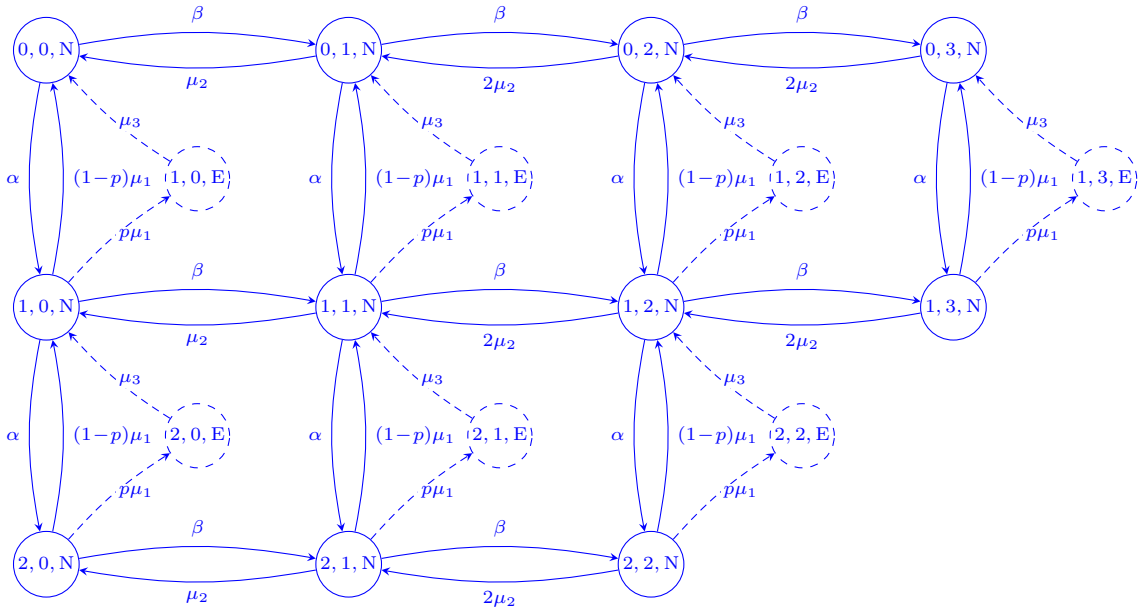
- $s = \text{N}$ (operación **normal**): los analizadores de alta complejidad y estándar operan según las reglas originales.
- $s = \text{E}$ (operación **extra**): la máquina especial está procesando una muestra; toda otra operación queda en pausa.

Transición que activa la máquina especial. Al completar una urgencia su procesamiento (tasa μ_1, desde un estado con $N_1 \geq 1$), la muestra:

- con probabilidad $1-p$ sale del sistema $\longrightarrow$ $(N_1 - 1,\ N_2,\ \text{N})$;
- con probabilidad p pasa a la máquina especial $\longrightarrow$ $(N_1,\ N_2,\ \text{E})$.

Es decir, cada arco de urgencia μ_1 se **divide** en dos: $(1-p)\mu_1$ y $p\mu_1$.

Modo extra. Mientras $s = \mathrm{E}$, el sistema queda congelado: las llegadas se derivan y no ocurre ninguna otra transición. Solo la máquina especial termina su prueba a tasa μ_3, devolviendo al sistema a $(N_1 - 1, N_2, \mathrm{N})$, esto es, retomando exactamente la misma configuración. Esto agrega 7 estados a la modelación.



Formulario

Distribución	**PDF** $(f(x))$	**CDF** $(F(x))$	**Esperanza**	**Varianza**
Poisson(λ)	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Binomial(n, p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Uniforme(a, b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Geométrica(p)	$(1-p)^{x-1} p$	$1 - (1-p)^x$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Gamma(k, λ)	$\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$	$\int_0^x \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)}\, dt$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$

Sistema	P_0	P_n
M/M/1	$1 - \rho$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$
M/M/1/K	$\frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$
M/M/c	$\left[\sum_{n=0}^{c} \frac{\lambda^n}{\mu^n\, n!} + \frac{\lambda^c}{\mu^c\, c!} \frac{\rho}{1-\rho}\right]^{-1}$	$\begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0, & 0 \le n \le c, \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{c!\, c^{n-c}} P_0, & n \ge c+1, \end{cases}$
M/M/c/K	$\left(\sum_{n=0}^{c} \frac{\lambda^n}{n!\, \mu^n} + \frac{\lambda^c}{c!\, \mu^c} \cdot \frac{\rho\,(1-\rho^{K-c})}{1-\rho}\right)^{-1}$	$\begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0, & 0 \le n \le c, \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{c!\, c^{n-c}} P_0, & c+1 \le n \le K, \end{cases}$

Con $\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu}$ y $\rho \neq 1$.

Sistema	**L**	$\mathbf{L_q}$
M/M/1	$\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
M/M/1/K	$\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)\left(\frac{1 - \rho^K - K\rho^K + K\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}\right)$	$L - \frac{\lambda(1-P_K)}{\mu}$
M/M/c	$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{(\lambda/\mu)^c \rho}{c!\,(1-\rho)^2} P_0$	$P_0 \cdot \frac{\lambda^c}{c!\, \mu^c} \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$
M/M/c/K	$\sum_{n=0}^{K} n\, P_n$	$P_0 \cdot \frac{\lambda^c}{c!\, \mu^c} \cdot \frac{\rho\left(1 - (K-c+1)\rho^{K-c} + (K-c)\rho^{K-c+1}\right)}{(1-\rho)^2}$

Con $\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu}$ y $\rho \neq 1$.