Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123-2 – Modelos Estocásticos
Profesor Nicolás Vargas C.
Primer Semestre 2024

Examen

Duración: 2.5 horas

Resuelva 5 de las siguientes 6 preguntas. Marque claramente con una X toda la hoja de la pregunta que no contestará. En caso de no descartar una pregunta, no se contará el problema con mayor puntaje para el cálculo de la nota.

Problema 1 (12 puntos)

A un banco llegan personas de acuerdo a un proceso de Poisson a tasa λ personas por hora. El banco abrió a las 9 AM y usted sabe sabe que entre las 9 AM y 11 AM llegaron 8 personas.

1. (5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, partiendo a las 10 AM, no llegue nadie en las próximas 2 horas?
2. (4 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que al mediodía hayan llegado 25 personas en total?
3. (3 puntos) Suponga que ahora le dicen que el banco en realidad abrió a las 8 AM. Determine nuevamente la probabilidad de que al mediodía hayan llegado 25 personas en total.

Solución Problema 1

1. Por simplicidad, se usará la siguiente notación para el desarrollo del problema: $N(t_1, t_2) = N(t_2) - N(t_2)$.

$$\begin{aligned} P(N(10,12)) = 0 | N(9,11) = 8) &= \frac{P(N(10,12) = 0, N(9,11) = 8)}{P(N(9,11) = 8)} \\ &= \frac{P(N(9,10) = 8, N(10,12) = 0)}{P(N(9,11) = 8)} \\ &= \frac{P(N(9,10) = 8) P(N(10,12) = 0)}{P(N(9,11) = 8)} \\ &= \frac{P(N(1) = 8) P(N(2) = 0)}{P(N(2) = 8)} \\ &= \frac{\frac{(2\lambda)^0 e^{-2\lambda}}{0!} \cdot \frac{\lambda^8 e^{-\lambda}}{8!}}{\frac{(2\lambda)^8 e^{-2\lambda}}{8!}} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2^8} \end{aligned}$$

2.

$$P(N(9,12) = 25 | N(9,11) = 8) = P(N(11,12) = 17)$$

$$= P(N(1) = 17)$$
$$= \frac{\lambda^{17} e^{-\lambda}}{17!}$$

3.

$$\begin{aligned}
P(N(8,12) = 25 | N(9,11) = 8) &= \frac{P(N(8,12) = 0, N(9,11) = 8)}{P(N(9,11) = 8)} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{17} P(N(8,9) = i, N(9,11) = 8, N(11,12) = 17 - i)}{P(N(9,11) = 8)} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{17} P(N(8,9) = i) P(N(9,11) = 8) P(N(11,12) = 17 - i)}{P(N(9,11) = 8)} \\
&= \sum_{i=0}^{17} P(N(8,9) = i) P(N(11,12) = 17 - i) \\
&= \sum_{i=0}^{17} P(N(1) = i) P(N(1) = 17 - i) \\
&= \sum_{i=0}^{17} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \cdot \frac{\lambda^{17-i} e^{-\lambda}}{(17-i)!} \\
&= \sum_{i=0}^{17} \frac{\lambda^{17} e^{-2\lambda}}{i!(17-i)!}
\end{aligned}$$

Problema 2 (12 puntos)

Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución exponencial, de parámetros α y β, respectivamente.

1. (6 puntos) Demuestre que la distribución del mínimo entre X e Y es exponencial y especifique el parámetro de dicha distribución.
2. (6 puntos) Calcule $\mathbb{P}(X < Y)$.

Solución Problema 2

1. Sea $Z = \text{mín}(X, Y)$. Queremos encontrar la función de distribución acumulativa (CDF) de Z, denotada por $F_Z(z)$.

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(\text{mín}(X,Y) \leq z) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\text{mín}(X,Y) > z) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X > z, Y > z) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X > z)\mathbb{P}(Y > z) \quad \text{(independencia de } X \text{ y } Y\text{)} \\
&= 1 - e^{-\alpha z} e^{-\beta z} \\
&= 1 - e^{-(\alpha+\beta)z}
\end{aligned}$$

   La CDF $F_Z(z)$ corresponde a una distribución exponencial con parámetro $\alpha + \beta$. Es decir, Z es exponencial con parámetro $\alpha + \beta$.

2. Condicionando sobre Y tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < Y) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X < Y \mid Y = y) f_Y(y)\, dy \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(X < y) f_Y(y)\, dy \\
&= \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha y}) \beta e^{-\beta y}\, dy \\
&= \beta \left(\int_0^\infty e^{-\beta y}\, dy - \int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta) y}\, dy \right) \\
&= \beta \left(\left[-\frac{1}{\beta} e^{-\beta y} \right]_0^\infty - \left[-\frac{1}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta) y} \right]_0^\infty \right) \\
&= \beta \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha+\beta} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{\alpha+\beta} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}
\end{aligned}
$$

Problema 3 (12 puntos)

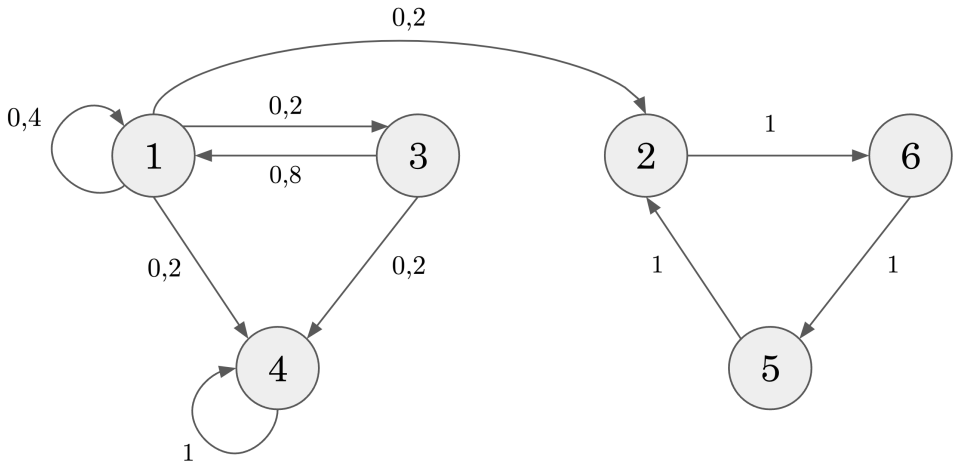
Considere una Cadena de Markov en Tiempo Discreto con espacio de estados $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$
P = \begin{pmatrix}
0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0{,}8 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

1. (2 puntos) Determine las clases de estados y clasifique todos los estados en transientes, recurrentes positivos o nulos, y determine si son aperiódicos o periódicos, y el valor del período si es que corresponde.
2. (2 puntos) ¿Existe $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ para todo (i, j)? Justifique.
3. (4 puntos) ¿Existe alguna distribución estacionaria? Si su respuesta es afirmativa, especifique al menos una distribución estacionaria y verifique que cumple con su correspondiente sistema de ecuaciones.
4. (4 puntos) Asumiendo que el estado inicial es el estado 1, calcule la probabilidad de eventualmente visitar el estado 4.

Solución Problema 3

1. Las clases de estado son:
   - {1, 3}: Transiente aperiódica.
   - {2, 5, 6}: Recurrente positiva periódica, con período 3.
   - {4}: Recurrente positiva aperiódica.



2. Como existe una clase recurrente positiva periódica, no existe $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ para todo (i,j).

3. Para determinar si existe alguna distribución estacionaria, debemos encontrar un vector π tal que $\pi^\intercal = \pi^\intercal P$ con $\pi \geq 0$ y $\pi_1 + \ldots + \pi_6 = 1$. Analizando la cadena, se aprecia que si partimos en el estado 4, una solución estacionaria es $\pi = (0,0,0,1,0,0)$. Por otro lado, si partimos desde un estado de la clase $\{2,\ 5,\ 6\}$, otra solución estacionaria es $\pi = (0, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

4. Nos piden calcular $F(1,4)$, luego:

$$
\begin{aligned}
F(1,4) &= P_{1,4} + P_{1,3}F(3,4) + P_{1,1}F(1,4) \\
F(1,4) &= 0{,}2 + 0{,}2F(3,4) + 0{,}4F(1,4) \\
F(3,4) &= P_{3,4} + P_{3,1}F(1,4) \\
F(3,4) &= 0{,}2 + 0{,}8F(1,4) \\
\Rightarrow F(1,4) &= 0{,}2 + 0{,}2(0{,}2 + 0{,}8F(1,4)) + 0{,}4F(1,4) \\
F(1,4) &= 0{,}2 + 0{,}04 + 0{,}16F(1,4) + 0{,}4F(1,4) \\
F(1,4) &= 0{,}24 + 0{,}56F(1,4) \\
F(1,4) &= \frac{0{,}24}{1 - 0{,}56} = 0{,}5454
\end{aligned}
$$

Problema 4 (12 puntos)

Usted junto a un amigo han decidido instalarse con un puesto para lustrar zapatos que consta de dos sillas. En la primera silla, que es atendida por usted, los zapatos del cliente son limpiados y embetunados. Luego, si la segunda silla está desocupada, los clientes se sientan y su amigo le saca brillo a sus zapatos. Los tiempos de servicio de ambas sillas son variables aleatorias independientes, que distribuyen exponencial con tasas μ_1 y μ_2 respectivamente. Considere que los clientes potenciales tienen tiempos de llegada exponenciales de tasa λ y que solo entran al establecimiento si la primera silla está desocupada.

1. (4 puntos) Construya una Cadena de Markov en Tiempo Continuo que modele el estado de ocupación de las sillas de su puesto. Explicite claramente los estados y sus respectivas tasas de transición.

2. (2 puntos) Justifique la existencia de una distribución de probabilidades estacionarias y construya el sistema de ecuaciones que permita calcularlas.

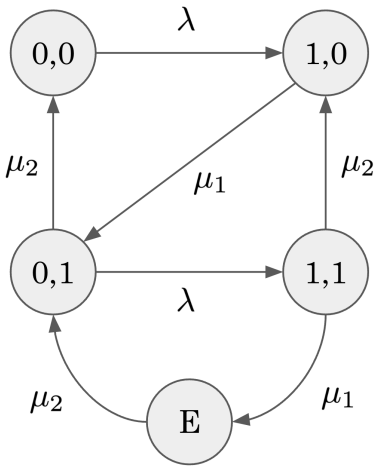
3. (2 puntos) En el largo plazo, ¿cuál es la tasa efectiva de llegada de clientes al puesto?

4. (2 puntos) En el largo plazo, ¿cuál es el número promedio de clientes dentro del puesto?

5. (2 puntos) En el largo plazo, ¿cuál es el tiempo promedio que pasa un cliente que entra al puesto, dentro de éste?

Solución Problema 4

1. La cadena con los estados y tasas de transición se muestra en la siguiente figura:



2. Dado que todos los estados están conectados y que la probabilidad de estar en un estado cualquiera existe y es independiente del estado inicial, se tiene que existe la distribución límite y por ende, una distribución de probabilidades estacionarias. Además, a partir del diagrama se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio en el largo plazo:

$$\begin{aligned} P_{0,0}\lambda &= P_{0,1}\mu_2 \\ P_{1,0}\mu_1 &= P_{0,0}\lambda + P_{1,1}\mu_2 \\ P_{0,1}(\lambda+\mu_2) &= P_{1,0}\mu_1 + P_E\mu_2 \\ P_{1,1}(\mu_1+\mu_2) &= P_{0,1}\lambda \\ P_E\mu_2 &= P_{1,1}\mu_1 \\ P_{0,0}+P_{1,0}+P_{0,1}+P_{1,1}+P_E &= 1 \end{aligned}$$

3. Utilizando las probabilidades estacionarias definidas en el inciso anterior, se tiene que la tasa efectiva de llegada es:

$$\lambda(P_{0,0}+P_{0,1})$$

4. Interpretando las probabilidades estacionarias como la probabilidad de encontrar al sistema (en el largo plazo) en un estado en particular tendremos que:

$$L = P_{0,1}+P_{1,0}+2P_{1,1}+2P_E$$

5. Si un cliente llega y las dos sillas están vacías, el tiempo promedio del cliente en el puesto está dado por la suma del tiempo promedio de servicio de ambas sillas. Esto es:

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$$

Por otro lado, si un cliente llega y la segunda silla está ocupada, el tiempo promedio del cliente en el puesto estará dado por la suma del tiempo promedio de servicio de ambas sillas más el tiempo de espera promedio. Como los tiempos distribuyen exponencial, no tiene memoria y por lo tanto el tiempo de espera promedio también es $\frac{1}{\mu_2}$. Como solo esperamos con probabilidad $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$, el tiempo promedio del cliente en el puesto es:

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} \cdot \frac{1}{\mu_2}$$

Finalmente utilizando probabilidades totales tenemos que:

$$W = P_{0,0}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right) + P_{0,1}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} \cdot \frac{1}{\mu_2}\right)$$

Problema 5 (12 puntos)

Clientes llegan a una peluquería con una tasa media de 5 clientes por hora y los tiempos entre llegadas están distribuidos exponencialmente. En esta peluquería hay un solo peluquero y 4 sillas para los clientes que llegan cuando el peluquero está ocupado. La ley de prevención de incendios limita el número total de clientes en la peluquería, en cualquier momento, a un máximo de 5. Los clientes que llegan cuando la peluquería está llena no pueden entrar. El tiempo de servicio distribuye exponencialmente con una media que depende del número de clientes en la peluquería (Cuadro 1).

1. (4 puntos) Determine el número promedio de clientes en espera.
2. (4 puntos) Determine el tiempo de espera promedio.
3. (4 puntos) Determine el porcentaje del tiempo que el peluquero está inactivo en el largo plazo.

Exprese todos sus resultados como números.

Número de clientes en la peluquería	1	2	3	4	5
Tiempo medio de servicio por cliente (min.)	9	10	10	13	20

Cuadro 1: Tiempo de servicio en minutos en función de la cantidad de clientes

Solución Problema 5

1. Es un sistema $M/M/1/5$ donde la tasa de llegada es constante $\lambda = 5$ clientes/hora y la tasa de servicio depende del número de clientes en la peluquería, donde:

$$\mu_1 = \frac{1}{9}\ \frac{\text{clientes}}{\text{minuto}} = 6{,}6\ \frac{\text{clientes}}{\text{hora}}$$
$$\mu_2 = \frac{1}{10}\ \frac{\text{clientes}}{\text{minuto}} = 6\ \frac{\text{clientes}}{\text{hora}}$$
$$\mu_3 = \frac{1}{10}\ \frac{\text{clientes}}{\text{minuto}} = 6\ \frac{\text{clientes}}{\text{hora}}$$

$$\mu_4 = \frac{1}{13}\ \frac{\text{clientes}}{\text{minuto}} = 4{,}62\ \frac{\text{clientes}}{\text{hora}}$$
$$\mu_5 = \frac{1}{20}\ \frac{\text{clientes}}{\text{minuto}} = 3\ \frac{\text{clientes}}{\text{hora}}$$

Así, podemos calcular P_0 como:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{5} \frac{\lambda^n}{\Pi_{i=1}^{n}\mu_i}} \\ &= \left(1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda^2}{\mu_1\mu_2} + \frac{\lambda^3}{\mu_1\mu_2\mu_3} + \frac{\lambda^4}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + \frac{\lambda^5}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5}\right)^{-1} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\mu_1} &= \frac{5}{6{,}6} \approx 0{,}75 \\ \frac{\lambda^2}{\mu_1\mu_2} &= \frac{5^2}{6{,}6 \cdot 6{,}0} \approx 0{,}625 \\ \frac{\lambda^3}{\mu_1\mu_2\mu_3} &= \frac{5^3}{6{,}6 \cdot 6{,}0 \cdot 6{,}0} = \frac{125}{237{,}6} \approx 0{,}527 \\ \frac{\lambda^4}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \frac{5^4}{6{,}6 \cdot 6{,}0 \cdot 6{,}0 \cdot 4{,}62} \approx 0{,}565 \\ \frac{\lambda^5}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5} &= \frac{5^5}{6{,}6 \cdot 6{,}0 \cdot 6{,}0 \cdot 4{,}62 \cdot 3} \approx 0{,}941 \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} P_0 &= (1 + 0{,}75 + 0{,}625 + 0{,}527 + 0{,}565 + 0{,}941)^{-1} \\ &= (4{,}408)^{-1} \\ &= 0{,}2272 \end{aligned}$$

Finalmente, el número promedio de clientes en espera es:

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=1}^{5}(n-1)P_n \\ &= \sum_{n=1}^{5}(n-1)\frac{\lambda^n}{\Pi_{i=1}^{n}\mu_i}P_0 \\ &= P_0\left(0\frac{\lambda}{\mu_1} + 1\frac{\lambda^2}{\mu_1\mu_2} + 2\frac{\lambda^3}{\mu_1\mu_2\mu_3} + 3\frac{\lambda^4}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + 4\frac{\lambda^5}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5}\right) \\ &= 0{,}2272(0{,}625 + 2 \cdot 0{,}527 + 3 \cdot 0{,}565 + 4 \cdot 0{,}941) \\ &= 0{,}2272 \cdot 7{,}138 \\ &= 1{,}621 \text{ clientes} \end{aligned}$$

2. El tiempo promedio de espera viene dado por:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{\text{e}}},$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{e}} &= \lambda(1 - P_5) \\ &= \lambda\left(1 - \frac{\lambda^5}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5}P_0\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 5(1 - 0{,}941 \cdot 0{,}2272) \\
&= 5(1 - 2137) \\
&= 3{,}9315 \ \frac{\text{clientes}}{\text{hora}}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$W_q = \frac{1{,}621}{3{,}9315} \approx 0{,}412 \text{ horas}$$

3. El peluquero está inactivo cuando el sistema se encuentra en P_0. Luego, el peluquero está inactivo aproximadamente el 22.72 % del tiempo.

Problema 6 (12 puntos)

Considere una variable aleatoria X con una función de densidad de probabilidad triangular (α, β, γ):

$$
f(x) = \begin{cases}
\dfrac{2(x-\alpha)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} & \alpha \leq x \leq \gamma \\
\dfrac{2(\beta-x)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} & \gamma \leq x \leq \beta \\
0 & \text{en otro caso}
\end{cases}
$$

1. (9 puntos) Desarrolle un algoritmo de Aceptación y Rechazo para generar instancias de X.
2. (3 puntos) Si se usa su algoritmo, ¿cuál es el valor esperado de la cantidad de iteraciones necesarias para generar una instancia de X?

Solución Problema 6

1. En primer lugar, se debe determinar una función $t(x)$ que acote superiormente a la función $f(x)$ en todo su dominio. Una forma de hacer esto es a través una función constante cuyo valor es el máximo de $f(x)$ en el dominio respectivo. Como $f(x)$ está compuesta por dos rectas, una creciente y otra decreciente, su valor máximo se encuentra en el límite superior/inferior de cada intervalo respectivamente, es decir, en $x = \gamma$. Se define entonces:

$$t(x) = f(\gamma) = \frac{2}{\beta - \alpha}, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

Como $t(x)$ no es una función de densidad, se debe definir un c que normalice esta función. El valor adecuado de c se encuentra integrando $t(x)$ en el dominio de $f(x)$, esto es:

$$
\begin{aligned}
c &= \int_\alpha^\beta t(x)\, dx \\
&= \frac{2}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta 1\, dx \\
&= \frac{2}{\beta - \alpha} \cdot (\beta - \alpha) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Luego,

$$h(x) = \frac{t(x)}{c} = \frac{1}{\beta - \alpha}$$

Como la función de densidad $h(x)$ es $\frac{1}{\beta-\alpha}$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$, $h(x) \sim \text{Uniforme}(\alpha, \beta)$. Finalmente, definimos:

$$g(x) = \frac{f(x)}{t(x)} = \begin{cases} \frac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}, & \alpha \leq x \leq \gamma \\ \frac{\beta-x}{\beta-\gamma}, & \gamma \leq x \leq \beta \end{cases}$$

Con todos los elementos necesarios ya calculados, el algoritmo de Aceptación y Rechazo es el siguiente:

a) Generar una instancia $U_1 \sim \text{Uniforme}(0, 1)$.

b) Generar una instancia de $Y \sim h(y)$, utilizando otra instancia $U_2 \sim \text{Uniforme}(0, 1)$ mediante el método de la transformada inversa. Esto es $y = (\beta - \alpha)u_2 + \alpha$.

c) Si $u_1 \leq g(y)$, entonces hacer $x = y$.

d) Volver al primer paso.

2. Como la probabilidad de aceptar una instancia en cada iteración es $\frac{1}{c}$, el número esperado de iteraciones requeridas para obtener una instancia de X es $c = 2$.

Distribución	**PDF ($f(x)$)**	**CDF ($F(x)$)**	**Esperanza**	**Varianza**
Poisson(λ)	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Binomial(n, p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Uniforme(a, b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Geométrica(p)	$(1-p)^{x-1} p$	$1 - (1-p)^x$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

Sistema	$\boldsymbol{P_0}$	$\boldsymbol{P_n}$	**L**	$\mathbf{L_q}$
M/M/1	$1 - \frac{\lambda}{\mu}$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad \forall i \in \{1, 2, ...\}$	$\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
M/M/1/K	$\frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad \forall i \in \{1, 2, ..., K\}$	$\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K - K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K + K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}\right)}\right)$	$L - \frac{\lambda(1-P_K)}{\mu}$
M/M/c	$\left[\sum_{n=0}^{c}\left(\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right) + \frac{\lambda^c}{c!\mu^c} \cdot \frac{\frac{\lambda}{c\mu}}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}}\right]^{-1}$	$\frac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0 \quad \forall i \in \{1, 2, ..., c\}$ $\frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} P_0 \quad \forall i \in \{c+1, ...\}$	$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!(1-\frac{\lambda}{c\mu})^2}\frac{\lambda}{\mu}$	$L - \frac{\lambda}{\mu}$
M/M/c/K	$\left[\sum_{n=0}^{c}\left(\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right) + \frac{\lambda^c}{c!\mu^c} \cdot \frac{\lambda}{c\mu} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c}}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}}\right]^{-1}$	$\frac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0 \quad \forall i \in \{1, 2, ..., c\}$ $\frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} P_0 \quad \forall i \in \{c+1, ..., K\}$	$\sum_{n=0}^{K} nP_n$	$L - \frac{\lambda(1-P_K)}{\mu}$