Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos 1-2026
Profesora: Verónica Godoy

Examen

Duración: 2 horas 30 minutos

Para el examen debe responder 4 de los 5 problemas.

Problema 1 (Procesos de Poisson)

Al puerto de Marparaíso las naves llegan de acuerdo a un proceso de Poisson a razón de α [naves/día] para naves nacionales y β [naves/día] para naves extranjeras. Usted debe analizar el registro de la llegada de naves durante esta semana.

a) **(5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la primera nave extranjera de la semana haya llegado al puerto el martes.

Solución: Sea t=0 el lunes a las 0:00 horas. El tiempo se mide en días.

$N_1(t)$: cantidad de naves nacionales que llega al puerto hasta el instante t

$N_2(t)$: cantidad de naves extranjeras que llega al puerto hasta el instante t

Sea T: tiempo de llegada de la primera nave extranjera $\sim$ Exp(β) (en días)

Que la primera nave extranjera haya llegado el martes equivale a: $1 < T < 2$

$Pr[1 < T < 2] = Pr[T < 2] - Pr[T < 1] = 1 - e^{-2\beta} - (1 - e^{-\beta}) = e^{-\beta} - e^{-2\beta}$

También equivale a que el lunes no llegue ninguna nave y que el martes llegue al menos una.

$Pr[N_2(1) = 0, N_2(1,2) \geq 1] = Pr(N_2(1) = 0] \cdot Pr[N_2(1) \geq 1] = e^{-\beta} \cdot (1 - e^{-\beta})$

Puntaje:
5p Expresión completa correcta.

b) **(5 puntos)** Si hasta ayer habían llegado (exactamente) cinco naves al puerto, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas sean nacionales?.

Solución: Sea $N(t) = N_1(t) + N_2(t) \sim Poisson(\alpha + \beta)$

$$Pr[N_1(4) \geq 2 | N(4) = 5] = \frac{Pr[N_1(4) \geq 2, N(4) = 5]}{Pr[N(4) = 5]} = \sum_{k=2}^{5} \frac{Pr[N_1(4) = k, N_2(4) = 5 - k]}{Pr[N(4) = 5]} =$$

$$\sum_{k=2}^{5} \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k} = 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k}$$

con $p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ la probabilidad que una nave cualquiera sea nacional.

Puntaje:
5p Expresión completa correcta.

c) **(5 puntos)** Si la carga de una nave distribuye uniforme entre 20.000 y 40.000 toneladas para naves nacionales y entre 30.000 y 60.000 toneladas para naves extranjeras, determine el valor esperado de la carga que llega al puerto durante una semana cualquiera si $\alpha = 0,5$ [naves/día] y $\beta = 1,35$ [naves/día].

Solución:

Sea X: carga de una nave nacional $\sim$ [20.000, 40.000]

Sea Y: carga de una nave extranjera $\sim$ [30.000, 60.000].

Sea $C(t)$: carga que llega al puerto durante un tiempo t

$E[C(7)] = E[N_1(7)] \cdot E[X] + E[N_2(7)] \cdot E[Y] = 3.5 \cdot 30.000 + 9.45 \cdot 45.000.$

R: Se espera que lleguen 530.250 toneladas a la semana al puerto de Marpaíso.

Puntaje:
0.5p Valor esperado carga nave nacional.
0.5p Valor esperado carga nave extranjera.
4p Expresión completa correcta.

Problema 2 (Cadena Markov Tiempo Discreto)

Felipe y José tienen dos monedas cada uno y proponen el siguiente juego: en cada jugada cada uno lanza una de sus monedas. Si ambas coinciden (salen dos caras o dos sellos), gana Felipe, si no, gana José. El que gana la jugada se queda con las dos monedas lanzadas. El juego termina cuando uno de ellos se queda con todas las monedas.

Las monedas no son balanceadas. La probabilidad de que salga cara en una moneda cualquiera es p.

a) **(6 puntos)** Modele la cantidad de monedas que tiene Felipe como una CMTD. Defina X_n, Ω y la matriz P.

Solución:
Sea X_n: cantidad de monedas que tiene Felipe **al inicio** de la jugada n; $\Omega = \{0,1,2,3,4\}$

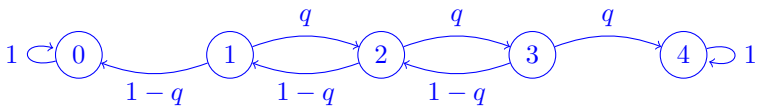
Sea $q = p^2 + (1-p)^2$ la probabilidad que Felipe gane una jugada (saca dos caras o dos sellos)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-q & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 1-q & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1-q & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puntaje:
1p Definición de X_n y Ω.
2p Probabilidad de que Felipe gane una jugada.
3p Matriz de transición correcta.

b) **(3 puntos)** Determine las clases de estados y sus propiedades (transiente/recurrente, periódica/aperiódica)

Solución:



$C_1 = \{0\}$, recurrente aperiódica
$C_2 = \{1, 2, 3\}$, transiente periódica, d=2
$C_3 = \{4\}$, recurrente aperiódica

Puntaje:
3p Todo correcto. 1 punto por cada clase correcta.

c) **(3 puntos)** Determine $P^{(n)}$ cuando $n \to \infty$. Utilice las variables x, y, z para los valores que sean diferentes de 0 y 1.

Solución:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & 0 & 0 & x \\ 1-y & 0 & 0 & 0 & y \\ 1-z & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con $x = F(1,4); y = F(2,4); z = F(3,4)$ donde $F(i,4)$ es la probabilidad que Felipe gane el juego si tiene i monedas al inicio de la jugada.

Puntaje:
3p Todo correcto.

d) **(3 puntos)** Plantee (no resuelva) las ecuaciones necesarias para obtener la cantidad esperada de jugadas que dura el juego.

Solución:

Se define $Fin = \{0, 4\}$ (Fin del juego) Como parten con dos monedas cada uno se necesita calcular $E[T(2, Fin)]$

$E[T(2, Fin)] = 1 + q \cdot E[T(3, Fin)] + (1 - q) \cdot E[T(1, Fin)]$
$E[T(3, Fin)] = 1 + (1 - q) \cdot E[T(2, Fin)]$
$E[T(1, Fin)] = 1 + q \cdot E[T(2, Fin)]$

R: La duración esperada del juego es $E[T(2, Fin)]$ jugadas.

Puntaje:
3p Todo correcto.

Problema 3 (Sistemas de Espera)

Al puerto de Marparaíso las naves llegan de acuerdo a un proceso de Poisson a razón de 0,5 [naves/día] para naves nacionales y 1,35 [naves/día] para naves extranjeras. En el puerto existe un muelle para naves nacionales y tres muelles para naves extranjeras. El tiempo de descarga de una nave se puede considerar exponencialmente distribuido con media 1,6 días para naves nacionales y 2 días para naves extranjeras.

Las naves nacionales son atendidas por orden de llegada solo en el muelle para naves nacionales, mientras que las naves extranjeras son atendidas por orden de llegada solo en los muelles para naves extranjeras. Si una nave llega cuando todos los muelles que la pueden atender están ocupados, espera su turno en la bahía de Marparaíso.

Se desea analizar el comportamiento del puerto de Marparaíso en estado estacionario. Bajo estas condiciones de operación, la probabilidad de que todos los muelles para naves extranjeras estén desocupados en un instante cualquiera es 0,0249.

a) **(3 puntos)** Calcule el porcentaje de utilización por tipo de muelle.

Solución: Sea $i = 1$ para naves nacionales y $i = 2$ para naves extranjeras.

Sea $\mu_1 = \frac{1}{1.6} = 0.625; U_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{0.5}{0.625} = 0.8$

Sea $\mu_2 = \frac{1}{2} = 0.5; U_2 = \frac{\lambda_2}{3 \cdot \mu_2} = \frac{1.35}{1.5} = 0.9$

La utilización también se puede calcular como:

$$U = \frac{L_s}{c}; L_s = \sum_{n=1}^{c-1} n \cdot P_n + \sum_{n=c}^{\infty} c \cdot P_n$$

donde L_s es la cantidad esperada de servidores ocupados.

R: El porcentaje de utilización del muelle nacional es 80% y de los muelles extranjeros es 90%.

Puntaje:
1p Porcentaje de utilización para naves nacionales.
2p Porcentaje de utilización para naves extranjeras.

b) **(6 puntos)** Calcule el tiempo promedio de espera en la bahía por tipo de nave.

Solución:

$Lq_1 = \frac{\lambda_1^2}{\mu_1 \cdot (\mu_1 - \lambda_1)} = \frac{0.5^2}{0.625 \cdot (0.625 - 0.5)} = 3.2$ naves; $Wq_1 = \frac{Lq_1}{\lambda_1} = \frac{3.2}{0.5} = 6.4$ días.

$Lq_2 = P_0 \cdot \frac{\lambda_2^3}{3! \cdot \mu_2^3} \cdot \frac{\rho_2}{(1-\rho_2)^2} = 0.0249 \cdot \frac{1.35^3}{3! \cdot 0.5^3} \cdot \frac{0.9}{(1-0.9)^2} = 7.35$ naves; $Wq_2 = \frac{Lq_2}{\lambda_2} = \frac{7.35}{1.35} = 5.4$ días.

R: Las naves nacionales y extranjeras esperan 6.4 y 5.4 días en promedio en la bahía, respectivamente.

Puntaje:
1.5p Cálculo Lq para naves nacionales.
1p Cálculo Wq para naves nacionales (importante indicar unidad de medición).
2.5p Cálculo Lq para naves extranjeras.
1p Cálculo Wq para naves extranjeras (importante indicar unidad de medición).

c) **(6 puntos)** Calcule la probabilidad que, en un instante cualquiera, no haya naves en la bahía.

Solución:

Naves nacionales: $P_0 + P_1 = 0.2 + 0.2 \cdot 0.8 = 0.36$ (como c=1, a partir de $n = 2$ hay naves en la bahía)

Naves extranjeras: $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = P_0 \cdot (1 + 2.7 + 2.7^2/2! + 2.7^3/3!) = 0.0249 \cdot (1 + 2.7 + 3.645 + 3.2805) = 0.2646$ (como c=3, a partir de $n = 4$ hay naves en la bahía)

Para que no haya naves en la bahía, no debe haber naves nacionales ni extranjeras.

P(no hay naves en la bahía) = P(no hay naves nacionales, no hay naves extranjeras)
= P(no hay naves nacionales) · P(no hay naves extranjeras) = $0.36 \cdot 0.2646 = 0.09526$.

R: La probabilidad que no haya naves en la bahía en un instante cualquiera es 0.09526.

Puntaje:
1.5p Probabilidad que no haya naves nacionales en la bahía.
4p Probabilidad que no haya naves extranjeras en la bahía.
0.5p Respuesta final.

Problema 4 (CMTC)

Al puerto de Marparaíso las naves llegan de acuerdo a un proceso de Poisson a razón de α [naves/día] para naves nacionales y β [naves/día] para naves extranjeras. En el puerto existe un muelle para naves nacionales y tres muelles para naves extranjeras. El tiempo de descarga de una nave se puede considerar exponencialmente distribuido con media $1/\mu_1$ días para naves nacionales y $1/\mu_2$ días para naves extranjeras.

Las naves nacionales son atendidas por orden de llegada solo en el muelle para naves nacionales, mientras que las naves extranjeras son atendidas por orden de llegada solo en los muelles para naves extranjeras. Si una nave llega cuando todos los muelles que la pueden atender están ocupados, **y no hay naves en la bahía**, entonces espera su turno en la bahía de Marparaíso. Si una nave llega cuando ya hay otra nave (de cualquier tipo) esperando en la bahía, entonces la nave que llega es derivada al puerto de Marantonio.

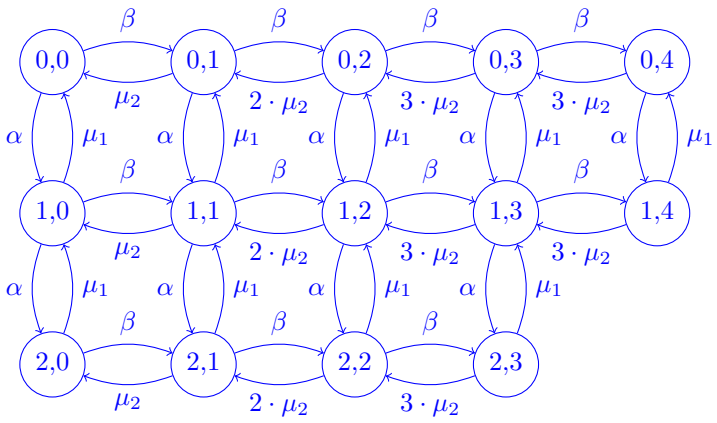
Para modelar esta situación debe utilizar CMTC, considerando como estado del sistema la tupla $(N_1(t), N_2(t))$, con:

$N_1(t)$ número de naves nacionales en el puerto de Marparaíso en el instante t

$N_2(t)$ número de naves extranjeras en el puerto de Marparaíso en el instante t

a) **(6 puntos)** Elabore el diagrama de transición de estados considerando todos los estados posibles del sistema y las tasas instantáneas de transición entre ellos.

Solución:



Puntaje:
2p Todos los estados correctos
0.5p Tasas de transición (i,j) a (i+1,j), todas correctas.
0.5p Tasas de transición (i,j) a (i,j+1), todas correctas.
1p Tasas de transición (i,j) a (i-1,j), todas correctas.
2p Tasas de transición (i,j) a (i,j-1), todas correctas.

b) **(3 puntos)** Plantee las ecuaciones de balance para los estados (1,2) y (2,1)

Solución:

Estado (1,2): $\pi_{1,2} \cdot (\alpha + \beta + \mu_1 + 2 \cdot \mu_2) = \pi_{0,2} \cdot \alpha + \pi_{1,1} \cdot \beta + \pi_{2,2} \cdot \mu_1 + \pi_{1,3} \cdot 3\mu_2$

Estado (2,1): $\pi_{2,1} \cdot (\beta + \mu_1 + \mu_2) = \pi_{1,1} \cdot \alpha + \pi_{2,0} \cdot \beta + \pi_{3,1} \cdot \mu_1 + \pi_{2,2} \cdot 2\mu_2$

Puntaje:
1.5p Ecuación de balance estado (1,2)
1.5p Ecuación de balance estado (2,1)

c) **(3 puntos)** ¿Qué relación deben cumplir los parámetros α, β, μ_1 y μ_2 para que existan probabilidades de largo plazo?. Justifique.

Solución: Como la cadena es **finita** y todos los estados se comunican entre sí, siempre existirán las probabilidades de largo plazo, por lo que no es necesario imponer condiciones a los parámetros.

Puntaje:
3p Todo correcto.

d) **(3 puntos)** Asumiendo que conoce las probabilidades de largo plazo $\pi_{(i,j)}$, determine la fracción de naves nacionales que son derivadas al puerto de Marantonio.

Solución: Las naves nacionales que llegan cuando hay dos naves nacionales en el puerto (una en el muelle y otra en la bahía) o cuando hay cuatro naves extranjeras (3 en los muelles y una en la bahía) y una nave nacional (en el muelle) son derivadas al puerto de Marantonio.

La fracción es $\pi_{(2,0)} + \pi_{(2,1)} + \pi_{(2,2)} + \pi_{(2,3)} + \pi_{(1,4)}$

Puntaje:
3p Todo correcto. Descontar 1 punto por cada probabilidad que falte o sobre.

Problema 5 (Simulación)

Para simular la operación de descarga del puerto de Marparaíso, usted ha considerado modelar el tiempo de descarga (en días) de naves extranjeras X mediante una distribución triangular de parámetros (1,2,3), pues no dispone de suficientes datos históricos para ajustar una distribución estadística más sofisticada. La función densidad de X es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1) & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ (3-x) & \text{si } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Con el fin de simular esta variable, usted decide aplicar el método de la **transformada inversa**.

a) **(5 puntos)** Determine explícitamente la función de distribución acumulada $F(x)$ y su función inversa $F^{-1}(U)$

Solución:

$F(x) = \int_1^x f(x)dx \quad$ si $1 \leq x \leq 2$

$F(x) = F(2) + \int_2^x f(x)dx \quad$ si $2 < x \leq 3$,

Resolviendo queda:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 1 - \frac{1}{2}(3-x)^2 & \text{si } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Ahora la inversa:

Cuando $1 \leq x \leq 2$ se tiene que $0 \leq U \leq 0.5$

$\frac{1}{2}(x-1)^2 = U$

$(x-1)^2 = 2U$

$x - 1 = \sqrt{2U}$

$x = 1 + \sqrt{2U}$

Cuando $2 < x \leq 3$ se tiene que $0.5 < U \leq 1$

$1 - \frac{1}{2}(3-x)^2 = U$

$\frac{1}{2}(3-x)^2 = 1 - U$

$(3-x)^2 = 2(1-U)$

$3 - x = \sqrt{2(1-U)}$

$x = 3 - \sqrt{2(1-U)}$

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} 1 + \sqrt{2U} & \text{si } 0 \leq U \leq 0.5, \\ 3 - \sqrt{2(1-U)} & \text{si } 0.5 < U \leq 1. \end{cases}$$

Puntaje:

2p $F(x)$

3p $F^{-1}(U)$

b) **(5 puntos)** Aplicando el método de la transformada inversa, determine los valores de la variable X para los siguientes valores generados para una variable uniforme entre 0 y 1: 0.582; 0.914; 0.137; 0.326.

Solución:

$F^{-1}(0.582) = 3 - \sqrt{2(1-0.582)} = 2.086$

$F^{-1}(0.914) = 3 - \sqrt{2(1-0.914)} = 2.585$

$F^{-1}(0.137) = 1 + \sqrt{2 \cdot 0.137} = 1.523$

$F^{-1}(0.326) = 1 + \sqrt{2 \cdot 0.326} = 1.807$

Puntaje:

2.5p Valores de X para $U > 0.5$

2.5p Valores de X para U ≤ 0.5

c) **(5 puntos)** Considere ahora que aplicará el método de **Aceptación y Rechazo**, para ello defina una función de cota superior $t(x)$ apropiada, la función $h(x)$ asociada, la función de aceptación $g(x)$ y la cantidad esperada de iteraciones requeridas para aceptar una variable aleatoria.

Solución:

Dado que $f(x)$ es máximo cuando $x = 2$, se puede definir la función $t(x) = f(2) = 1$ para $1 \leq x \leq 3$.

Entonces $h(x) = \frac{1}{2}$ para $1 \leq x \leq 3$, Uniforme [1,3]

$g(x) = \frac{f(x)}{t(x)} = f(x)$

Y la cantidad esperada de iteraciones hasta aceptar una variable es $c = \frac{t(x)}{h(x)} = 2$

Puntaje:

1p $t(x)$

2p $h(x)$

1p $g(x)$

1p Cantidad esperada

Formulario

Distribución	**PDF** $(f(x))$	**CDF** $(F(x))$	**Esperanza**	**Varianza**
Poisson(λ)	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Binomial(n, p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Uniforme(a, b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Geométrica(p)	$(1-p)^{x-1} p$	$1 - (1-p)^x$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Gamma(k, λ)	$\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$	$\int_0^x \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)}\, dt$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$

Sistema	P_0	P_n
M/M/1	$1 - \rho$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$
M/M/1/K	$\frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$
M/M/c	$\left[\sum_{n=0}^{c} \frac{\lambda^n}{\mu^n\, n!} + \frac{\lambda^c}{\mu^c\, c!} \frac{\rho}{1-\rho}\right]^{-1}$	$\begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0, & 0 \le n \le c, \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{c!\, c^{n-c}} P_0, & n \ge c+1, \end{cases}$
M/M/c/K	$\left(\sum_{n=0}^{c} \frac{\lambda^n}{n!\, \mu^n} + \frac{\lambda^c}{c!\, \mu^c} \cdot \frac{\rho\left(1-\rho^{K-c}\right)}{1-\rho}\right)^{-1}$	$\begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0, & 0 \le n \le c, \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{c!\, c^{n-c}} P_0, & c+1 \le n \le K, \end{cases}$

Con $\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu}$ y asumiendo condición de estabilidad $\rho < 1$ para M/M/1 y M/M/C.

Sistema	**L**	$\mathbf{L_q}$
M/M/1	$\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$
M/M/1/K	$\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)\left(\frac{1-\rho^K - K\rho^K + K\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}\right)$	$L - \frac{\lambda(1-P_K)}{\mu}$
M/M/c	$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{(\lambda/\mu)^c \rho}{c!\,(1-\rho)^2} P_0$	$P_0 \cdot \frac{\lambda^c}{c!\, \mu^c} \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$
M/M/c/K	$\sum_{n=0}^{K} n\, P_n$	$P_0 \cdot \frac{\lambda^c}{c!\, \mu^c} \cdot \frac{\rho\left(1-(K-c+1)\rho^{K-c} + (K-c)\rho^{K-c+1}\right)}{(1-\rho)^2}$

Con $\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu}$ y $\rho \neq 1$.