Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesores Maximiliano González, Nicolás Vargas y Andrés Navarro
Segundo Semestre 2025

Interrogación 2

Duración: 2 horas y 30 minutos

Problema 1 (22 puntos)

Suponga que usted desea monitorear en tiempo real la divulgación de una *fake news* en una población de $n \in \mathbb{N}$ individuos. Cada individuo puede ser ignorante (no conoce la *fake news*), mal informado (conoce la *fake news*) o bien informado (conoce la *fake news* pero sabe que es falsa). Los individuos reciben noticias de forma independiente según un Proceso de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ (noticias por día). Cuando un individuo recibe una noticia, con probabilidad $p \in (0,1)$ es la *fake news* que usted desea monitorear, con probabilidad $r \in (0,1)$ es una noticia que desmiente la *fake news* que usted desea monitorear y con probabilidad $1-p-r$ la noticia no está relacionada con la *fake news*. Si un individuo recibe una noticia que desmiente la *fake news* pasa a ser un individuo bien informado, independientemente de si conocía o no la *fake news* antes.

(a) **(5 puntos)** Modele la situación descrita como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo (CMTC) que permita determinar la cantidad de individuos ignorantes, mal informados y bien informados en un instante $t \geq 0$. Especifique el conjunto de estados y las tasas de transición instantánea entre cada estado.

Solución: Para modelar la cantidad de individuos ignorantes, mal informados y bien informados en un instante t definimos las variable aleatorias:

- $X(t) \in \mathbb{N}_0$: Cantidad de individuos ignorantes en el instante t.
- $Y(t) \in \mathbb{N}_0$: Cantidad de individuos mal informados en el instante t.
- $Z(t) \in \mathbb{N}_0$: Cantidad de individuos bien informados el instante t.

Luego, los estados de la CMTC corresponden a todas las posibles combinaciones del proceso $(X(t), Y(t), Z(t))$ tales que

$$\mathcal{S} := \{(x,y,z) \in \mathbb{N}_0^3 : x+y+z = n\}.$$

Las tasas de transición entre estados están dadas por

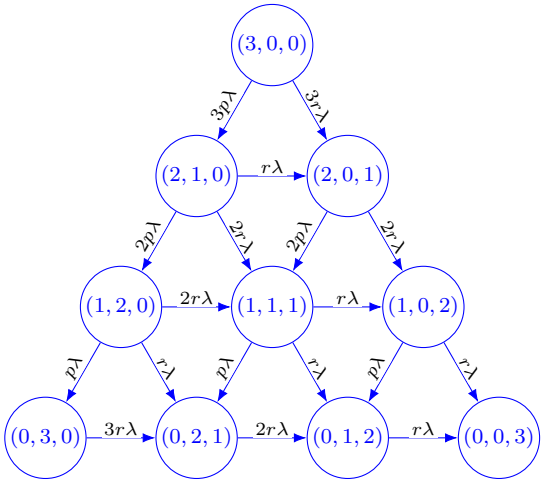
$$q_{(i,j,k),(i',j',k')} = \begin{cases} ip\lambda, & \text{si } (i',j',k') = (i-1,\, j+1,\, k), \\ ir\lambda, & \text{si } (i',j',k') = (i-1,\, j,\, k+1), \\ jr\lambda, & \text{si } (i',j',k') = (i,\, j-1,\, k+1), \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad \forall (i,j,k),(i',j',k') \in \mathcal{S}.$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Definición clara de variables de estados.
- **(2 puntos)** Planteamiento correcto del espacio de estados $\{(x, y, z) : x + y + z = n\}$.
- **(2 puntos)** Tasas de transición entre estados correctamente identificadas.

(b) **(4 puntos)** Dibuje el grafo asociado a la CMTC para $n = 3$.

Solución: Se tiene



Distribución de Puntaje:

- **(2 puntos)** Enumeración completa de los estados para $n = 3$.
- **(2 puntos)** Todas las transiciones correctas con tasas.

(c) **(4 puntos)** Explicite las ecuaciones de equilibrio de largo plazo que permitan determinar la proporción del tiempo que se pasa en cada estado para $n = 3$.

Solución: Utilizando $\nu_j P_j = \sum_{k \in S: k \neq j} q_{kj} P_k$, se tiene

$$
\begin{aligned}
P_{300}(3\lambda(p+r)) &= 0 \\
P_{210}(2p\lambda + 3r\lambda) &= 3p\lambda\, P_{300} \\
P_{201}(2\lambda(p+r)) &= 3r\lambda\, P_{300} + r\lambda\, P_{210} \\
P_{120}(p\lambda + 3r\lambda) &= 2p\lambda\, P_{210} \\
P_{111}(p\lambda + 2r\lambda) &= 2r\lambda\, P_{210} + 2p\lambda\, P_{201} + 2r\lambda\, P_{120} \\
P_{102}(p\lambda + r\lambda) &= 2r\lambda\, P_{201} + r\lambda\, P_{111} \\
P_{030}(3r\lambda) &= p\lambda\, P_{120} \\
P_{021}(2r\lambda) &= r\lambda\, P_{120} + p\lambda\, P_{111} + 3r\lambda\, P_{030} \\
P_{012}(r\lambda) &= r\lambda\, P_{111} + p\lambda\, P_{102} + 2r\lambda\, P_{021} \\
0 &= r\lambda\, P_{102} + r\lambda\, P_{012},
\end{aligned}
$$

Donde además se considera la ecuación de normalización

$$\sum_{i,j,k \in \{0,1,2,3\}: i+j+k=3} P_{ijk} = 1.$$

La solución de este sistema de ecuaciones es $P_{003} = 1$ y $P_{ijk} = 0$ para los demás estados.

Distribución de Puntaje:

- **(3 puntos)** Planteamiento correcto de ecuaciones de equilibrio estacionario.
- **(1 punto)** Normalización.

(d) **(3 puntos)** ¿Cuál es la cantidad esperada de individuos mal informados en el largo plazo para cualquier $n \in \mathbb{N}$?

Solución: Como el estado $(0, 0, n)$ es el único estado recurrente, en el largo plazo no hay individuos mal informados.

Distribución de Puntaje:

- **(2 puntos)** Justificación correcta de absorción/estado recurrente.
- **(1 punto)** Conclusión correcta: $\mathbb{E}[\cdot] = 0$.

Suponga ahora que los individuos bien informados pueden olvidar la noticia que desmentía la *fake news* y pasar a ser ignorantes nuevamente. El tiempo que pasa desde que un individuo conoce la noticia que desmentía la *fake news* y la olvida distribuye exponencial de parámetro $\mu > 0$ (en días) y es independiente para cada individuo.

(e) **(3 puntos)** Explique claramente qué modificaciones deben realizarse a la CMTC anterior para modelar esta nueva situación. En particular, describa las nuevas transiciones, tasas asociadas y cómo cambian los estados involucrados, sin necesidad de reconstruir toda la cadena desde cero.

Solución: El conjunto de estados se mantiene igual a $\mathcal{S}$. Se añade la transición

$$q_{(i,j,k),(i+1,j,k-1)} = k\mu, \qquad \forall (i,j,k) \in \mathcal{S} \text{ con } k \geq 1.$$

El resto de tasas se mantienen.

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Mantiene mismo espacio de estados.
- **(2 puntos)** Transición de olvido correctamente incorporada.

(f) **(3 puntos)** Considerando la nueva situación, ¿cuál es la cantidad esperada de individuos mal informados en largo plazo? Asuma que conoce la distribución de largo plazo asociada a la nueva cadena.

Solución: Se tiene

$$\mathbb{E}[\text{ Individuos mal informados }] = \sum_{(i,j,k)\in\mathcal{S}} j\, P_{ijk}$$

Distribución de Puntaje:

- **(3 puntos)** Expresión correcta de la esperanza como suma sobre la distribución estacionaria.

Problema 2 (22 puntos)

Considere un casino donde los clientes llegan a almorzar de acuerdo a un Proceso de Poisson de tasa $\lambda > 0$ (clientes por hora). Cuando llegan a la entrada, cuentan la cantidad de gente que hay dentro. Si hay 4 o menos personas, entran con certeza y si hay más de 4 personas, entran con probabilidad $p_i := \frac{4}{i}$, donde i es la cantidad de personas en el sistema. Una vez que entran, permanecen en el casino un tiempo con distribución exponencial de tasa $\mu > 0$ (en horas). En este tiempo de permanencia se incluye la elección de plato, el pago en caja y el tiempo de almuerzo propiamente tal.

(a) **(6 puntos)** Suponiendo que el casino tiene capacidad infinita, modele el casino como un sistema de espera indicando explícitamente el conjunto de estados, las tasas de transición instantáneas y las probabilidades de transición instantáneas.

Solución: Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ el proceso estocástico que representa el número de personas en el casino en el instante t. El conjunto de estados queda representado por $\mathcal{S} := \{0, 1, 2, 3...\}$.

La tasa de llegada efectiva en el estado i (nacimiento) corresponde a

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda, & \text{si } i \leq 4, \\ \lambda \cdot \frac{4}{i}, & \text{si } i \geq 5. \end{cases}$$

Cada persona permanece un tiempo exponencial de tasa μ de forma independiente, por lo que si hay i personas en el sistema, así, la tasa de salida en el estado i (muerte)

$$\mu_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 0, \\ i\,\mu, & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

Con esto, el proceso corresponde a una cadena de nacimiento y muerte, cuyas tasas de transición instantáneas se definen como

$$q_{i,i+1} = \lambda_i, \qquad q_{i,i-1} = \mu_i, \qquad \forall i \in \mathbb{N}_0,$$

y

$$q_{i,j} = 0 \quad \text{para todo } j \notin \{i-1,\, i+1\}.$$

Las probabilidades de transición vienen dadas por

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = 0,\ j = 1, \\ \frac{\lambda}{\lambda + i\mu}, & 1 \leq i \leq 4,\ j = i+1, \\ \frac{i\mu}{\lambda + i\mu}, & 1 \leq i \leq 4,\ j = i-1, \\ \frac{\lambda \frac{4}{i}}{\lambda \frac{4}{i} + i\mu}, & i \geq 5,\ j = i+1, \\ \frac{i\mu}{\lambda \frac{4}{i} + i\mu}, & i \geq 5,\ j = i-1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad i, j \in \mathbb{N}_0.$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Definición del proceso y espacio de estados.

- **(1 punto)** Tasa de llegada efectiva λ_i correctamente planteada.
- **(1 punto)** Tasa de servicio μ_i correctamente definida.
- **(1 punto)** Por conjunto de tasas de transición instantáneas.
- **(2 puntos)** Por conjunto de probabilidades de transición instantáneas.

(b) **(5 puntos)** Encuentre una expresión explícita para las probabilidades de largo plazo para el sistema modelado. Indique claramente cuál es la condición necesaria para la convergencia de este sistema.

Hint: *Para un proceso de nacimiento y muerte se cumple*

$$P_n = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) P_0, \quad n \geq 1.$$

donde P_n denota la probabilidad estacionaria de estar en el estado $n \in \mathbb{N}_0$.

Solución: Sea P_n la probabilidad estacionaria de estar en el estado n, $n \geq 0$. Entonces

$$P_n = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) P_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{n!} \left(\dfrac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0, & 1 \leq n \leq 5, \\ \dfrac{4!\, 4^{n-5}}{n!\,(n-1)!} \left(\dfrac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0, & n \geq 6. \end{cases}$$

La condición de normalización es

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1,$$

es decir,

$$1 = P_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{4!\, 4^{n-5}}{n!\,(n-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right].$$

Por lo tanto,

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{4!\, 4^{n-5}}{n!\,(n-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}.$$

Para $n \geq 6$, si definimos

$$a_n = \frac{4!\, 4^{n-5}}{n!\,(n-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n,$$

se cumple

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4\lambda}{\mu\, n(n+1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

de modo que la serie anterior converge para todo $\lambda, \mu > 0$. En consecuencia, existe distribución estacionaria (probabilidades de largo plazo) para todo par de parámetros $\lambda, \mu > 0$, que es la condición necesaria de convergencia.

Distribución de Puntaje:

- **(2 puntos)** Uso correcto de fórmula general para P_n.
- **(2 puntos)** Expresiones correctas para distintos tramos de n y normalización.
- **(1 punto)** Discusión de convergencia.

(c) **(5 puntos)** Deduzca una expresión para el tiempo de permanencia en el sistema de los clientes que efectivamente entran. Puede dejar expresado en base a parámetros conocidos del problema.

Solución: Primero definimos la tasa efectiva de llegada de los clientes que sí entran al sistema. En estado i la tasa de llegada efectiva es λ_i, por lo que en régimen estacionario:

$$\lambda_e = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n.$$

Donde $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ corresponden a las probabilidades de largo plazo para el sistema modelado, explicitadas en (b).

Luego, podemos calcular el promedio de personas dentro del sistema como

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n.$$

Considerando los P_n calculados anteriormente, podemos aplicar ahora la ecuación de Little para los clientes que efectivamente entran, es decir

$$L = \lambda_e W,$$

donde W es el tiempo promedio de permanencia en el sistema. Así obtenemos,

$$W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n P_n}{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n}.$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Tasa efectiva de entrada bien definida.
- **(2 puntos)** Cálculo del número esperado en el sistema.
- **(2 puntos)** Aplicación correcta de Little: $W = L/\lambda_e$.

(d) **(6 puntos)** Considere nuevamente el sistema del casino descrito anteriormente, pero ahora asumiendo que los clientes, independientemente de la cantidad de personas dentro, entran siempre al casino con probabilidad 100%.

Suponga ahora que le solicitan realizar una simulación de este sistema para analizar su desempeño. Al comentar este trabajo con un amigo, usted le explica que en su modelo el tiempo de permanencia de cada cliente distribuye Exponencial(μ). Su amigo, en cambio, simuló el sistema suponiendo que todas las personas se demoran exactamente $1/\mu$ horas en salir del casino (es decir, empleó tiempos de atención determinísticos con el mismo valor esperado).

Su amigo argumenta que, dado que ambos modelos tienen el mismo tiempo promedio de atención/permanencia, los resultados de las simulaciones no deberían verse afectados frente a usar una distribución Exponencial.

Aplicando los conocimientos adquiridos en el curso, ¿quién está en lo correcto y por qué? Discuta brevemente cómo podría cambiar el comportamiento del sistema al pasar de tiempos de atención/permanencia exponenciales a determinísticos. En particular, comente las diferencias potenciales en métricas como L, W, L_q, W_q y en la variabilidad de dichos indicadores.

Solución: En este modelo ningún cliente espera: entra, permanece un tiempo dentro del casino y luego se va. Esto corresponde a un sistema de tipo $M/M/\infty$ (o $M/D/\infty$ si el tiempo es fijo), por lo que no hay cola. En particular,

$$L_q = 0, \qquad W_q = 0$$

tanto en el caso exponencial como en el determinístico.

En ambos modelos el tiempo promedio de permanencia es $1/\mu$, pero la distribución del tiempo de servicio es distinta. Con tiempos determinísticos ($M/D/\infty$) todos los clientes se "mueven" de forma más regular: la cantidad de personas dentro del sistema tiende a oscilar menos alrededor de su valor medio. Con tiempos exponenciales ($M/M/\infty$) la variabilidad es mayor (coeficiente de variación igual a 1), por lo que a veces muchos clientes se quedan más tiempo de lo "esperado" y el sistema se ve más lleno.

Eso se traduce en una ocupación más inestable bajo tiempos exponenciales: la distribución de

$$L \quad \text{y} \quad W$$

es más dispersa y hace más probable observar valores altos de número de clientes y tiempos de permanencia efectivos. En cambio, con tiempos determinísticos la ocupación es más pareja y predecible.

Por lo tanto, la afirmación de que "como el tiempo promedio es el mismo, los resultados no cambian" es incorrecta. Su amigo está equivocado, dado que aunque el promedio de servicio coincida, la variabilidad de la distribución de servicio afecta el comportamiento del sistema (en particular, la distribución de L y W, y en un sistema con cola también de L_q y W_q).

Distribución de Puntaje:

- **(2 puntos)** Identificar correctamente el argumento válido ($M/M/\infty$ vs $M/D/\infty$).
- **(2 puntos)** Explicar rol de la variabilidad.
- **(2 puntos)** Impacto en colas/tiempos y variabilidad del sistema.

Problema 3 (16 puntos)

(a) **(3 puntos)** Considere un método congruencial lineal (LCG) con $a = 3$, $c = 5$ y $m = 31$. Utilizando la semilla $x_0 = 43$, genere 5 instancias Uniforme$(0, 1)$. Redondee a 3 cifras decimales en caso de ser necesario.

Indicación: La semilla no cuenta dentro de las 5 instancias Uniforme$(0, 1)$ a generar.

Solución: Utilizando $X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m$ y $U_n = \frac{X_n}{m}$, la secuencia de valores uiformes obtenida es la siguiente:

i	x_i	U_i
0	43	-
1	10	0.323
2	4	0.129
3	17	0.548
4	25	0.806
5	18	0.581

Distribución de Puntaje:

- **(2 puntos)** Aplicación correcta de la recurrencia del generador congruencial.
- **(1 punto)** Conversión a U_n con formato correcto.

(b) **(6 puntos)** A partir de las instancias uniformes generadas en (a), obtenga todas las instancias numéricas posibles de la variable aleatoria X mediante el método de la transformada inversa, considerando que su función de densidad de probabilidad (PDF) está dada por

$$f(x) = \begin{cases} a(x+1)^3, & x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde a corresponde a la constante de normalización asociada a la distribución de X.

Solución: Primero, debemos determinar el valor del parámetro a para que $f(x)$ efectivamente corresponda a una función de densidad de probabilidad. Para ello

$$\int_{-1}^{1} a \cdot (x+1)^3 \, dx = 1$$

Sea $u = x + 1$, luego $du = dx$ y

$$\begin{aligned} a \cdot \int_0^2 (u)^3 \, du &= 1 \\ a \cdot \frac{u^4}{4} \Big|_0^2 &= 1 \\ 4a &= 1 \\ a &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Luego, determinamos la función de distribución acumulada, la que se obtiene integrando la función de densidad:

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{4}(t+1)^3 dt \quad \text{sea } u = t+1$$
$$F(x) = \int_{0}^{x+1} \frac{1}{4}u^3 dt$$
$$F(x) = \frac{1}{4}(\frac{(x+1)^4}{4} - \frac{0^4}{4})$$
$$F(x) = \frac{(x+1)^4}{16}$$

Aplicando el método de transformada inversa:

$$U = \frac{(x+1)^4}{16}$$
$$(x+1)^4 = 16 \cdot U$$
$$x+1 = (16 \cdot U)^{1/4}$$
$$X = (16 \cdot U)^{1/4} - 1$$
$$X = 2(U)^{1/4} - 1$$

Sustituyendo:

- $U = 0.323$

$$X_1 = 2(0.323)^{1/4} - 1 = 0.507$$

- $U = 0.129$

$$X_2 = 2(0.129)^{1/4} - 1 = 0.199$$

- $U = 0.548$

$$X_3 = 2(0.548)^{1/4} - 1 = 0.721$$

- $U = 0.806$

$$X_4 = 2(0.806)^{1/4} - 1 = 0.895$$

- $U = 0.581$

$$X_5 = 2(0.581)^{1/4} - 1 = 0.746$$

Distribución de Puntaje:

- **(1 punto)** Normalización correcta de la PDF.
- **(2 puntos)** CDF correctamente derivada.
- **(2 puntos)** Inversión de la CDF.
- **(1 punto)** Aplicación del método para generar instancias de X.

(c) **(7 puntos)** Sea Y una variable aleatoria cuya distribución está dada por

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{con probabilidad } \frac{1}{2}, \\ U, & \text{con probabilidad } \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad \text{donde } U \sim \text{Uniforme}(-5, 15).$$

A partir de las instancias Uniforme(0,1) generadas en (a), obtenga las correspondientes realizaciones numéricas de la variable aleatoria Y, empleando un método adecuado basado en la transformada inversa (u otro procedimiento equivalente).

Solución: Esta es una distribución mixta donde $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Primero se identifican las probabilidades y función de densidad de cada componente:

- Parte Discreta: $\mathbb{P}(x = 0) = 1/2$
- Parte Continua: Si $X \neq 0$, entonces X distribuye uniforme, así, $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{20}$ para $-5 \leq x \leq 15$.
  Sin embargo, la probabilidad de que $X \neq 0$ es $1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - 1/2 = 1/2$. Esto significa que la probabilidad para los valores no nulos esta escalada por esta probabilidad. De esta manera, si $X \neq 0$, entonces $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{40}$ para $x \in [-5, 15]$ y $x \neq 0$

Ahora, construimos la distribución acumulada, $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

- Para $x < -5$:
$$F(x) = 0$$
- Para $-5 \leq x < 0$:
$$F(x) = \int_{-5}^{x} \frac{1}{40} dt = \frac{x}{40} - \frac{-5}{40} = \frac{x+5}{40}$$
- Para $x = 0$:
$$\begin{aligned} F(0) &= \mathbb{P}(X \leq 0) \\ F(0) &= \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X = 0) \\ F(0) &= \frac{0+5}{40} + \frac{1}{2} \\ F(0) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \\ F(0) &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$
- Para $0 < x \leq 15$:
$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}(X \leq 0) + \int_{0}^{x} \frac{1}{40} dt \\ F(x) &= \frac{5}{8} + \frac{x}{40} \end{aligned}$$
- Para $x > 15$:
$$F(x) = 1$$

En resumen
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -5 \\ \frac{x+5}{40}, & -5 \leq x < 0 \\ \frac{5}{8}, & x = 0 \\ \frac{5}{8} + \frac{x}{40}, & 0 < x \leq 15 \\ 1, & x > 15 \end{cases}$$

Se puede apreciar en 1 la forma de la CDF de la variable aleatoria Y.

Ahora, para generar las instancias, tendremos:

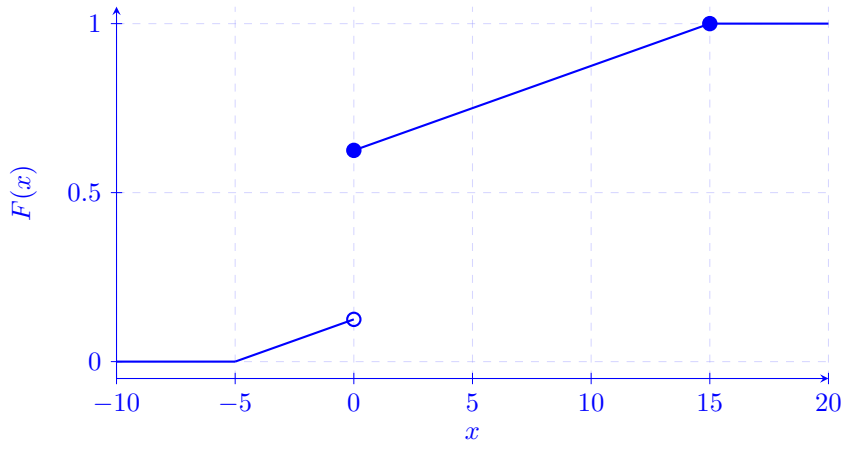


Figure 1: Función de distribución acumulada $F(x)$ de la variable aleatoria Y.

1. Caso 1: U cae en rango de $X \in [-5, 0)$.
   Esto ocurre en el intervalo de $F(0^-)$, es decir, la probabilidad de que $X \in [-5, 0)$ es $\frac{0+5}{40} = \frac{1}{8}$. Entonces, si U cae en el primer octavo de la probabilidad $X \in [-5, 0)$ ($U \in (0, 0.125]$)
2. Caso 2: U cae en rango de $\mathbb{P}(X = 0)$
   Esto ocurre entre los intervalos de $F(0^-)$ y $F(0)$, es decir, que si U esta en el intervalo $(0.125, 0.625]$, entonces $X = 0$.
3. Caso 3: U cae en rango de $X \in (0, 15]$
   Esto ocurre en el intervalo de $F(0)$ y $F(15)$. Entonces, si U cae en los últimos tres octavos de la probabilidad $X \in (0, 15]$ ($U \in (0.625, 1]$).

Resumiendo,

- Si $0 < U \leq 0.125$ (es decir $X \in [-5, 0)$), usamos $U = \frac{x+5}{40}$, y por ende, $x = 40U - 5$.
- Si $0.125 < U \leq 0.625$ (es decir $X = 0$), asignar $X = 0$.
- Si $0.625 < U \leq 1$ (es decir $X \in (0, 15]$), usamos $U = \frac{5}{8} + \frac{x}{40}$, y por ende, $x = 40U - 25$.

Finalmente, se generan las instancias para los valores entregados:

- $U = 0.323$, como $0.125 < U \leq 0.625$:
$$X_1 = 0$$
- $U = 0.129$, como $0.125 < U \leq 0.625$:
$$X_2 = 0$$
- $U = 0.548$, como $0.125 < U \leq 0.625$:
$$X_3 = 0$$
- $U = 0.806$, como $0.625 < U \leq 1$:
$$X_4 = 40 \cdot 0.806 - 25 = 7.258$$
- $U = 0.581$, como $0.125 < U \leq 0.625$:
$$X_5 = 0$$

Distribución de Puntaje:

- **(2 puntos)** Identificación correcta de estructura mixta.
- **(2 puntos)** CDF por tramos correctamente construida.
- **(2 puntos)** Método por rangos de U correctamente planteado.
- **(1 punto)** Cálculo correcto de realizaciones finales.

Formulario

Distribución	**PDF ($f(x)$)**	**CDF ($F(x)$)**	**Esperanza**	**Varianza**
Poisson(λ)	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Binomial(n, p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Uniforme(a, b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Geométrica(p)	$(1-p)^{x-1} p$	$1 - (1-p)^x$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Gamma(k, λ)	$\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$	$\int_0^x \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)}\, dt$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$

Sistema	P_0	P_n	**L**	$\mathbf{L_q}$
M/M/1	$1 - \frac{\lambda}{\mu}$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0,\ \forall n \geq 1$	$\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$
M/M/1/K	$\frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0,\ \forall n = 0, \ldots, K$	$\frac{\lambda}{\mu} \frac{1 - (K+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K + K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}\right)}$	$L - \frac{\lambda(1-P_K)}{\mu}$
M/M/c	$\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}}\right]^{-1}$	$\begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0, & 0 \leq n \leq c, \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c!\, c^{n-c}} P_0, & n \geq c+1, \end{cases}$	$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{\lambda}{c\mu}}{c!\left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)^2} P_0$	$L - \frac{\lambda}{\mu}$
M/M/c/K	$\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!} \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}}\right]^{-1}$	$\begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0, & 0 \leq n \leq c, \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c!\, c^{n-c}} P_0, & c+1 \leq n \leq K, \end{cases}$	$\sum_{n=0}^{K} n P_n$	$L - \frac{\lambda(1-P_K)}{\mu}$

Suponiendo siempre estabilidad: para M/M/1, M/M/c, $\lambda < \mu$ o $\lambda < c\mu$.