Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 Modelos Estocásticos
Profesor Maximiliano González R.
Primer Semestre 2024

Interrogación 1

Tiempo total: 2 horas

Problema 1 (40 puntos)

a) **(5 puntos)** La probabilidad de que un neumático desgastado de auto sufra un pinchazo un día cualquiera es de 0.05 si se utiliza en asfalto, y de dos quintos si se utiliza en tierra y en asfalto. Cuatro de cada cinco autos con un neumático desgastado circulan únicamente en caminos de asfalto, mientras que el porcentaje restante utiliza también los de tierra. Suponga que usted encontró un auto con un neumático desgastado, pero no estaba pinchado. ¿Cuál es la probabilidad de que el auto haya circulado por caminos de tierra ese día?

b) **(5 puntos)** Un juego consiste en lanzar sucesivamente un dado. Los instantes en que se lanza el dado corresponden a los instantes de ocurrencia de eventos de un Proceso de Poisson con tasa λ (lanzamientos por minuto). En cada lanzamiento se aplica la siguiente regla: si el resultado del dado es impar, se gana esa cantidad de puntos, y si el resultado del dado es par, se pierde esa cantidad de puntos. Determine el valor esperado del total de puntos que se acumulan en el intervalo $[0, x]$ (donde $x > 0$ y x está en minutos).

c) **(5 puntos)** Suponga que la ocurrencia de terremotos en Chile se puede modelar como un proceso de Poisson de tasa λ eventos por cada 10 años. Calcule la probabilidad de que los próximos n terremotos ocurran con una separación de no más de t años entre ellos.

d) **(5 puntos)** Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetros α y β, respectivamente. Calcule el valor esperado del máximo entre X e Y condicionando en que $X + Y = 5$.

Para los incisos e) al h) considere un proceso de Poisson de tasa λ eventos por minuto.

e) **(5 puntos)** Si se sabe que han ocurrido al menos dos eventos en los primeros tres minutos. Calcule la probabilidad de que en los primeros tres minutos ocurran más de 5 eventos.

f) **(5 puntos)** Si se sabe que $n \leq N(1) \leq n + 4$, donde n es un entero no negativo, calcule la probabilidad de que en el intervalo [0, 1/4] (en minutos) no haya ocurrido ningún evento.

g) **(5 puntos)** Calcule $P(S_n \leq x \cap S_{n+3} > x)$ para $x > 0$ y $n > 0$.

h) **(5 puntos)** Sean los instantes de tiempo x, y y t tales que $0 < x < y < t$. Demuestre que

$$P(S_1 \leq x, S_2 \leq y | N(t) = 2) = \frac{2xy - x^2}{t^2}$$

.

Hint: Recuerde la relación entre $F_{S_k}(t)$ y $N(t)$.

Luego, dado $t = 5$ minutos, asigne al menos dos valores a x y dos valores a y (razonables), e interprete los valores obtenidos para la probabilidad.

Problema 2 (20 puntos)

a) Suponga que usted está evaluando colocar un nuevo restaurante en una concurrida calle de Santiago de Janeiro. Para atraer clientes usted decide colocar un gran y luminoso cartel, además de contar con promotores que invitan a los peatones a probar este nuevo lugar.

Suponga que los peatones transitan por el frente de su local según un proceso de Poisson de tasa α personas por hora. Además, por esta calle circulan dos tipos de vehículo: autos particulares y buses de turismo, cuyo paso también se modela como un proceso de Poisson de tasas β y μ vehículos por hora, respectivamente.

Usted ha notado que los promotores son muy efectivos, logrando que dos quintas partes de los peatones pasen a probar el local, mientras que en el caso de los vehículos (autos y buses), solo un 10% de ellos se detiene en el local y prueban la comida.

Finalmente, luego de un exhaustivo análisis, usted logró determinar que los autos particulares transportan 1, 2, 3 o 4 personas con probabilidad 0.3, 0.5, 0.15 y 0.05 respectivamente, mientras que los buses de turismo transportan una cantidad de pasajeros que distribuye $Uniforme(10, 19)$.

i) **(5 puntos)** Si cada cliente le significa en promedio una ganancia $\$q$, ¿cuál es la ganancia esperada en una hora de funcionamiento?

ii) **(5 puntos)** Suponga $\alpha = 20$, $\beta = 8$ y $\mu = 5$. ¿Qué porcentaje de eficacia debiesen tener al menos los promotores para que en promedio visiten el local más peatones que clientes de buses de turismo?

b) Luego de una exitosa apertura de su restaurante, usted ha comenzado a notar que muchos otros emprendedores le han "echado el ojo" a su negocio y han decidido abrir sus propios restaurantes en la misma calle, lo que ha aumentado la competencia por captar clientes.

Sin embargo, usted tiene la ventaja que ha tenido más tiempo para analizar el proceso de llegada de clientes y emplear sus conocimientos de Modelos Estocásticos. Gracias a ello, usted ha identificado que las tasas de los distintos tipos de clientes no son constantes a lo largo del día, es más, los clientes sin importar su medio de transporte arriban a comer a su restaurante según un proceso de Poisson de tasa $\lambda(t) = \dfrac{1}{t+2}$ con t en horas. Es decir, a medida que avanza el día, más competencia hay y menos clientes llegan en promedio a su local.

Suponiendo que el local funciona desde las 9 de la mañana ($t = 0$), hasta la media noche:

i) **(5 puntos)** Calcule el valor esperado del número de pedidos que llegan entre entre el mediodía y las 3 de la tarde.

ii) **(5 puntos)** Calcule la probabilidad de que entre las 12:00 y las 18:00 lleguen más de 20 personas dado que al almuerzo (1 a 4 p.m) llegaron exactamente 10 personas.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesor Maximiliano González R.
Primer Semestre 2024

Pauta Interrogación 1

Solución Problema 1

(a) Definiremos los siguientes eventos:

- A: Un auto con neumático desgastado circula únicamente por caminos de asfalto.
- T: Un auto con neumático desgastado circula por caminos de tierra y asfalto.
- X: Un neumático desgastado de auto sufre un pinchazo.

Nos dan las siguientes probabilidades:

- $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{5}$
- $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{5}$
- $\mathbb{P}(X|A) = 0.05$
- $\mathbb{P}(X|T) = \frac{2}{5}$

Luego, nos piden

$$\mathbb{P}(T|\bar{X})$$

Usando el teorema de Bayes, se tiene que

$$\mathbb{P}(T|\bar{X}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{X}|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(\bar{X}|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{X}|T)\mathbb{P}(T)}$$

Con $\mathbb{P}(\bar{X}|A) = 1 - \mathbb{P}(X|A) = 0.95$ y $\mathbb{P}(\bar{X}|T) = 1 - \mathbb{P}(\bar{X}|T) = \frac{3}{5}$. Finalmente,

$$\mathbb{P}(T|\bar{X}) = \frac{0.6 \cdot 0.2}{0.95 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.2} = 0.1363$$

(b) Definimos las siguientes variables aleatorias:

- N_x: Cantidad de lanzamientos efectuados en el intervalo $[0, x]$.
- B_i: Beneficio obtenido por el lanzamiento del i-ésimo dado.

Sabemos que $N_x \sim \text{Poisson}(\lambda x)$ y la distribución de B_i es la siguiente:

$$\mathbb{P}(B_i = x) = \frac{1}{6}, \quad x \in \{1, -2, 3, -4, 5, -6\}$$

Con esperanza

$$\mathbb{E}[B_i] = \frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6}{6} = -\frac{1}{2}$$

Finalmente, los puntos totales vienen dados por:

$$Z = \sum_{i=1}^{N_x} B_i$$

Luego, usando esperanzas iteradas y que las variables aleatorias B_i son independientes entre sí, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z|N_x]] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_x} B_i \middle| N_x\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_x} \mathbb{E}[B_i]\right] \\
&= -\frac{1}{2}\mathbb{E}[N_x] \\
&= -\frac{\lambda x}{2}
\end{aligned}$$

(c) Definimos $N(t)$: como la cantidad de terremotos que han ocurrido en $[0,t]$, con t en años, por lo que se debe convertir la tasa años: $\frac{\lambda}{10}\frac{\text{terremotos}}{\text{año}}$. Por lo tanto, $N(t) \sim$ Poisson $(\frac{\lambda}{10})$. Finalmente, nos piden,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\max\{T_1,\ldots,T_n\} < t) &= \mathbb{P}(T_1 < t, \ldots, T_n < t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i < t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\frac{\lambda t}{10}}) \\
&= (1 - e^{-\frac{\lambda t}{10}})^n
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\max\{X,Y\}|X+Y=5] &= \sum_{i=3}^{5} i \cdot \mathbb{P}(\max\{X,Y\} = i | X+Y=5) \\
&= \sum_{i=3}^{5} i \cdot \frac{\mathbb{P}(\max\{X,Y\} = i, X+Y=5)}{\mathbb{P}(X+Y=5)} \\
&= \frac{5!}{(\alpha+\beta)^5 e^{-(\alpha+\beta)}} \sum_{i=3}^{5} i \cdot \mathbb{P}(\max\{X,Y\} = i, X+Y=5) \\
&= \frac{5!}{(\alpha+\beta)^5 e^{-(\alpha+\beta)}} \sum_{i=3}^{5} i \cdot (\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=5-i) + \mathbb{P}(Y=i)\mathbb{P}(X=5-i))
\end{aligned}$$

(e) Definimos $N(t)$ como el número de eventos que han ocurrido hasta t. $N(t) \sim$ Poisson(λt). Nos piden,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(3) > 5 | N(3) \geq 2) &= \frac{\mathbb{P}(N(3) > 5, N(3) \geq 2)}{\mathbb{P}(N(3) \geq 2)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(N(3) > 5)}{\mathbb{P}(N(3) \geq 2)} \\
&= \frac{1}{\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(3\lambda)^j e^{-3\lambda}}{j!}} \sum_{i=6}^{\infty} \frac{(3\lambda)^i e^{-3\lambda}}{i!} \\
&= \frac{1}{1 - e^{3\lambda} - 3\lambda e^{-3\lambda}} \left(1 - \sum_{i=0}^{5} \frac{(3\lambda)^i e^{-3\lambda}}{i!}\right)
\end{aligned}$$

(f) Nos piden,

$$\mathbb{P}(N(1/4) = 0 | n \leq N(1) \leq n+4) = \frac{\mathbb{P}(N(1/4) = 0, n \leq N(1) \leq n+4)}{\mathbb{P}(n \leq N(1) \leq n+4)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathbb{P}(N(1/4)=0, n \leq N(1)-N(1/4) \leq n+4)}{\mathbb{P}(n \leq N(1) \leq n+4)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(N(1/4)=0)\mathbb{P}(n \leq N(3/4) \leq n+4)}{\mathbb{P}(n \leq N(1) \leq n+4)} \\
&= e^{-\frac{\lambda}{4}} \frac{\sum_{i=n}^{n+4} \frac{e^{-\frac{3\lambda}{4}}(\frac{3}{4}\lambda)^i}{i!}}{\sum_{j=n}^{n+4} \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}} \\
&= \frac{\sum_{i=n}^{n+4} \frac{(\frac{3}{4}\lambda)^i}{i!}}{\sum_{j=n}^{n+4} \frac{\lambda^j}{j!}}
\end{aligned}
$$

(g) Nos piden,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \leq x \cap S_{n+3} > x) &= \mathbb{P}(n \leq N(x) \cap N(x) < n+3) \\
&= \mathbb{P}(n \leq N(x) < n+3) \\
&= \sum_{i=n}^{n+2} \frac{(\lambda x)^i e^{-\lambda x}}{i!}
\end{aligned}
$$

(h) Nos piden

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_1 \leq x, S_2 \leq y | N(t)=2) &= \mathbb{P}(N(x) \geq 1, N(y)=2 | N(t)=2) \\
&= \frac{\mathbb{P}(N(x) \geq 1, N(y)=2)}{\mathbb{P}(N(t)=2)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(N(x)=1, N(y)=2)}{\mathbb{P}(N(t)=2)} + \frac{\mathbb{P}(N(x)=2, N(y)=2)}{\mathbb{P}(N(t)=2)} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \frac{\mathbb{P}(N(x)=i, N(y)-N(x)=2-i, N(t)-N(y)=0)}{\mathbb{P}(N(t)=2)} \\
&= \frac{2}{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}} \left(\lambda x e^{-\lambda x} \lambda (y-x) e^{-\lambda(y-x)} e^{-\lambda(t-y)} + \frac{(\lambda x)^2 e^{-\lambda x}}{2} e^{-\lambda(y-x)} e^{-\lambda(t-y)} \right) \\
&= \frac{2}{\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t}} \left(\lambda^2 x(y-x) e^{-\lambda t} + \frac{\lambda^2 x^2}{2} e^{-\lambda(t)} \right) \\
&= 2\frac{xy-x^2}{t^2} + \frac{x^2}{t^2} \\
&= \frac{2xy-x^2}{t^2}
\end{aligned}
$$

Solución Problema 2

(a) i) La ganancia esperada corresponderá a la suma de las ganancias esperadas por cada proceso Poisson. Podemos definir los siguientes procesos:

$\{N_p(t), t \geq 0\}$ proceso Poisson(α) $\rightarrow$ tránsito de peatones frente al local

$\{N_a(t), t \geq 0\}$ proceso Poisson(β) $\rightarrow$ tránsito de autos particulares frente al local

$\{N_b(t), t \geq 0\}$ proceso Poisson(μ) $\rightarrow$ tránsito de buses de turismo frente al local

Para el proceso de tránsito de peatones, la ganancia esperada en una hora de funcionamiento corresponde a:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G_p] &= \mathbb{E}[N_p(1)] \cdot \frac{2}{5} \cdot \$q \\ &= \alpha \cdot \frac{2}{5} \cdot \$q\end{aligned}$$

Luego, para el proceso de tránsito de autos identificamos que este corresponde a un proceso de Poisson compuesto, por lo que el tránsito de pasajeros frente al local en realidad corresponde a:

$$Z_a(t) = \sum_{i=1}^{N_a(t)} X_i$$

donde X_i es la cantidad de pasajeros en el auto particular.

Además, sabemos que:

$$\mathbb{E}[Z_a(t)] = \mathbb{E}[X_i] \cdot \mathbb{E}[N_a(t)]$$

Con esto, la cantidad esperada de pasajeros que transitan frente al local en autos particulares, durante una hora de funcionamiento es:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_a(1)] &= \mathbb{E}[X_i] \cdot \mathbb{E}[N_a(1)] \\ &= (1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,05) \cdot \beta \\ &= 1,95 \cdot \beta\end{aligned}$$

Considerando que solo un 10% de los autos se detiene, la ganancia esperada es:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G_a] &= \mathbb{E}[Z_a(1)] \cdot 0,1 \cdot \$q \\ &= 1,95 \cdot \beta \cdot 0,1 \cdot \$q \\ &= 0,195 \cdot \beta \cdot \$q\end{aligned}$$

De manera similar, el proceso de tránsito de buses de turismo también corresponde a un proceso de Poisson compuesto:

$$Z_b(t) = \sum_{i=1}^{N_b(t)} Y_i$$

donde Y_i es la cantidad de pasajeros en el bus de turismo.

Así, la cantidad esperada de pasajeros que transitan frente al local en buses de turismo, durante una hora de funcionamiento es:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_b(1)] &= \mathbb{E}[Y_i] \cdot \mathbb{E}[N_b(1)] \\ &= \frac{10+19}{2} \cdot \mu \\ &= 14,5 \cdot \mu\end{aligned}$$

Considerando que solo un 10% de los buses se detiene, la ganancia esperada es:

$$\mathbb{E}[G_b] = \mathbb{E}[Z_b(1)] \cdot 0,1 \cdot \$q$$

$$= 14,5 \cdot \mu \cdot 0,1 \cdot \$q$$
$$= 1,45 \cdot \mu \cdot \$q$$

Finalmente, la ganancia total esperada es:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G] &= \mathbb{E}[G_p + G_a + G_b] \\ &= \mathbb{E}[G_p] + \mathbb{E}[G_a] + \mathbb{E}[G_b] \\ &= \$q(0,4 \cdot \alpha + 0,195 \cdot \beta + 1,45 \cdot \mu)\end{aligned}$$

ii) Para que en promedio visiten el local más peatones que clientes de buses de turismo, se necesita cumplir que:

$$p \cdot \mathbb{E}[N_p(t)] \geq 0,1 \cdot \mathbb{E}[Z_b(t)]$$

donde p es la eficacia de los promotores.

Del inciso anterior sabemos:

$$\mathbb{E}[N_p(t)] = \alpha \cdot t \qquad\qquad \mathbb{E}[Z_b(t)] = 14,5 \cdot \mu \cdot t$$

Por lo tanto, despejando p se tiene:

$$p \geq \frac{0,1 \cdot 14,5 \cdot \mu \cdot t}{\alpha \cdot t}$$

Reemplazando con los valores del enunciado:

$$p \geq 0,3625$$

Con esto, los promotores deben tener un porcentaje de eficacia de al menos 36,25% para que en promedio visiten el local más peatones que clientes de buses de turismo.

(b) i) $\{X(t), t \geq 0\}$ proceso Poisson($\lambda(t)$) $\rightarrow$ llegada de clientes al restaurante

Nos piden:

$$\mathbb{E}(N(15{:}00) - N(12{:}00))$$
$$= m(6) - m(3)$$

Con $m(t) = \int_0^t \lambda(t)dt$

$$\begin{aligned}m(6) - m(3) &= \int_3^6 \lambda(t)dt \\ &= \int_3^6 \frac{1}{t+2}dt \\ &= ln(t+2)\Big|_3^6 \\ &= ln(8) - ln(5) \\ &\approx 0,47\end{aligned}$$

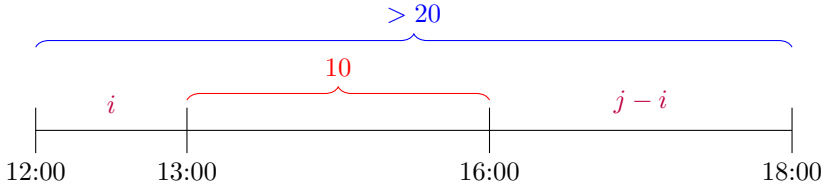
ii) La probabilidad que nos piden es la siguiente:

$$\mathbb{P}(N(18{:}00) - N(12{:}00) > 20 \mid N(16{:}00) - N(13{:}00) = 10)$$

Por probabilidad condicional tenemos:

$$\frac{\mathbb{P}(N(18{:}00) - N(12{:}00) > 20 \ , \ N(16{:}00) - N(13{:}00) = 10)}{\mathbb{P}(N(16{:}00) - N(13{:}00) = 10)}$$

Utilizando una línea de tiempo, podemos definir intervalos disjuntos:



$$\sum_{j=21}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}\frac{\mathbb{P}(N(18{:}00)-N(16{:}00)=j-i\ ,\ N(16{:}00)-N(13{:}00)=10\ ,\ N(13{:}00)-N(12{:}00)=i)}{\mathbb{P}(N(16{:}00)-N(13{:}00)=10)}$$

Por incrementos independientes:

$$\sum_{j=21}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}\frac{\mathbb{P}(N(18{:}00)-N(16{:}00)=j-i)\cdot\mathbb{P}(N(16{:}00)-N(13{:}00)=10)\cdot\mathbb{P}(N(13{:}00)-N(12{:}00)=i)}{\mathbb{P}(N(16{:}00)-N(13{:}00)=10)}$$

$$\sum_{j=21}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}\mathbb{P}(N(18:00)-N(16:00)=j-i)\cdot\mathbb{P}(N(13:00)-N(12:00)=i)$$

$$=\sum_{j=21}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}(e^{-(m(9)-m(7))}\cdot\frac{(m(9)-m(7))^{j-i}}{(j-i)!})\cdot(e^{-(m(4)-m(3))}\cdot\frac{(m(4)-m(3))^{i}}{i!})$$

$$=\sum_{j=21}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}(e^{-ln(11/9)}\cdot\frac{(ln(11/9))^{j-i}}{(j-i)!})\cdot(e^{-ln(6/5)}\cdot\frac{(ln(6/5))^{i}}{i!})$$