Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos 1-2026
Profesora: Verónica Godoy

Interrogación 2

Duración: 2 horas 30 minutos

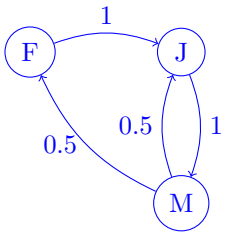
Problema 1 (18 puntos)

a) **(6 puntos)** Felipe, José y Mateo están jugando con una pelota. Felipe siempre le pasa la pelota a José y José siempre se la pasa a Mateo. Mateo por su parte, le pasa la pelota indistintamente a Felipe o a José.

i. Modele la situación descrita como una CMTD. Argumente si el proceso tiene distribución límite.

Solución:

X_n: niño que tiene la pelota al inicio de la jugada n, $X_n \in \{F$ (Felipe), J (José), M (Mateo) $\}$

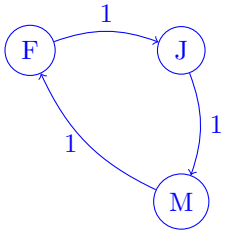


La cadena es irreductible (todos los estados se comunican), finita (solo tres estados posibles), aperiódica (si el proceso inicia en el estado F se puede estar en F en las etapas 3,5,6,7,8,...), por lo que SI tiene distribución límite.

ii. Proponga una modificación a la dinámica del juego de manera tal que cambie su respuesta anterior (por ejemplo, si en i. dijo que el proceso SI tenía distribución límite en ii. NO la tiene). Arme la nueva cadena y justifique.

Solución:

Si Mateo siempre le pasa la pelota a Felipe la cadena quedaría así:



Y sería periódica de periodo 3, razón por la cual la distribución límite NO existe.

Puntaje:

2p Modelo (definición, estados, grafo o matriz).

2p Argumentos para justificar la existencia de distribución límite.

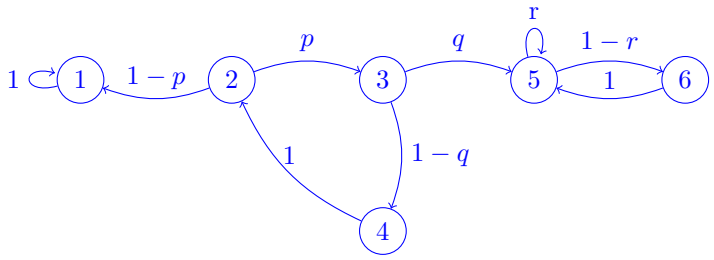
2p Nuevo dinámica, grafo y argumentos para justificar la no existencia de distribución límite.

b) **(6 puntos)** Francisca y Javiera están estudiando el comportamiento de largo plazo de una CMTD. Para ello han parametrizado algunos valores de las probabilidades de transición ($0 < p, q, r < 1$), obteniendo la siguiente matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-q & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-r & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine la matriz $P^{(100)}$. Para aquellas celdas (i, j) que sean distintas de 0 y 1 utilice las variables x, y, z. Justifique.

Solución:



La cadena tiene tres clases: $C_1 = \{1\}$ recurrente $C_2 = \{2, 3, 4\}$ transiente $C_3 = \{5, 6\}$ recurrente

Si j es recurrente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \frac{F(i,j)}{\mathbb{E}(T(j,j))}$$

La matriz $P^{(100)}$ tiende a:

$$P^{(100)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & x(1-y) & (1-x)(1-y) \\ z & 0 & 0 & 0 & x(1-z) & (1-x)(1-z) \\ y & 0 & 0 & 0 & x(1-y) & (1-x)(1-y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 1-x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 1-x \end{pmatrix}$$

donde:

$$x = \frac{1}{\mathbb{E}(T(5,5))}$$

$$1 - x = \frac{1}{\mathbb{E}(T(6,6))}$$

$$y = F(2,1); F(2,1) + F(2,5) = 1; F(2,5) = F(2,6) = 1 - y$$

$$z = F(3,1); F(3,1) + F(3,5) = 1; F(3,5) = F(3,6) = 1 - z$$

$$F(4,1) = P_{42} \cdot F(2,1) = y$$

Puntaje:

2 pts Determinación de clases y su tipo.

4 pts Matriz.

c) **(6 puntos)** Considere una CMTC con la siguiente matriz de transición:

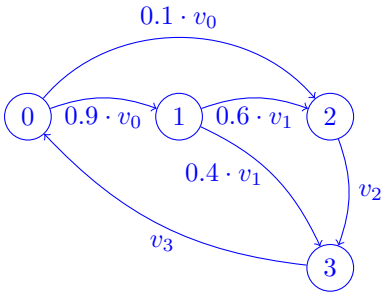
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El tiempo de permanencia en el estado i $(i = 0, 1, 2, 3)$ distribuye exponencial de tasa $v_i > 0 \quad \forall\, i$

i. Elabore el diagrama de transición de estados. Especifique claramente las tasas de transición instantáneas.

ii. Plantee las ecuaciones necesarias para obtener las probabilidades de largo plazo de esta cadena.

Solución:



Ecuaciones de equilibrio:

$P_0 \cdot v_0 = P_3 \cdot v_3$

$P_1 \cdot v_1 = P_0 \cdot 0.9 \cdot v_0$

$P_2 \cdot v_2 = P_0 \cdot 0.1 \cdot v_0 + P_1 \cdot 0.6 \cdot v_1$

$P_3 \cdot v_3 = P_1 \cdot 0.4 \cdot v_1 + P_2 \cdot v_2$

$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$

Puntaje:

3p Grafo, transiciones y tasas de transición.

3p Ecuaciones de cada estado y ecuación de normalización.

Problema 2 (24 puntos)

Una empresa de delivery utiliza cajas plásticas reutilizables para transportar los pedidos de sus clientes. Al inicio de cada semana la empresa revisa cada caja y la clasifica como: buena, aceptable o estropeada. Cada caja estropeada es eliminada y reemplazada por una caja nueva la cual demora una semana en llegar a la empresa.

El registro de la empresa indica que, **a la semana siguiente**: el 90% de las cajas nuevas se clasifican como buenas y las restantes como aceptables, el 20% de las cajas buenas se clasifican como aceptables y el 10% como estropeadas, mientras que el 40% de las cajas aceptables se clasifican como estropeadas.

a) **(6 puntos)** Modele la situación descrita como una CMTD.

Solución:

X_n : Estado de la caja **al inicio** de la semana n; $X_n \in \{N$ (Nueva), B (Buena), A (Aceptable), E (Estropeada) $\}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puntaje:
2p Definición, estados;
4p Matriz de transición o grafo. .

b) **(6 puntos)** ¿Cuántas semanas, en promedio, tarda una caja nueva en estropearse?

Solución: Se pide calcular $E[T(N, E)]$
1) $E[T(N, E)] = 1 + 0,9 \cdot E[T(B, E)] + 0,1 \cdot E[T(A, E)]$
2) $E[T(B, E)] = 1 + 0,7 \cdot E[T(B, E)] + 0,2 \cdot E[T(A, E)]$
3) $E[T(A, E)] = 1 + 0,6 \cdot E[T(A, E)]$

De 3) se obtiene que $E[T(A, E)] = 2,5$ semanas. Se reemplaza en 2) y se obtiene que $E[T(A, E)] = 5$ semanas. Se reemplazan en 1) y se obtiene que $E[T(B, E)] = 5,75$ semanas.

R: Una caja nueva tarda 5,75 semanas, en promedio, en estropearse.

Puntaje:
2p Sistema de ecuaciones.
3p Resolución.
1p Respuesta.

c) **(6 puntos)** Si al inicio de la semana una caja está buena, ¿cuál es la probabilidad que dure cuatro semanas más?

Solución: Las transiciones posibles son: BBBBE, BBBAE, BBAAE, BAAAE.

$P(BBBBE) = 0.7^3 \cdot 0.1$
$P(BBBAE) = 0.7^2 \cdot 0.2 \cdot 0.4$
$P(BBAAE) = 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.4$
$P(BAAAE) = 0.2 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4$

R: La probabilidad que una caja buena dure cuatro semanas más es 0.1359

Puntaje (resolución 1):
2p Casos favorables.
3p Cálculo probabilidades.
1p Respuesta.

Obs: También se puede realizar calculando $\mathrm{F}_4(B, E)$

$F_4(B,E) = 0.7 \cdot F_3(B,E) + 0.2 \cdot F_3(A,E) = 0.1071 + 0.0288 = 0.1359$
$F_3(B,E) = 0.7 \cdot F_2(B,E) + 0.2 \cdot F_2(A,E) = 0.105 + 0.048 = 0.153$
$F_3(A,E) = 0.6 \cdot F_2(A,E) = 0.144$
$F_2(B,E) = 0.7 \cdot \ 0.1 + 0.2 \cdot 0.4 = 0.15$
$\mathrm{F}_2(A,E) = 0.6 \cdot \ 0.4 = 0.24$

Puntaje (resolución 2):
2p Sistema de ecuaciones.
3p Resolución.
1p Respuesta. .

d) **(6 puntos)** Si la empresa inicia su operación con 10.000 cajas nuevas ¿cuántas cajas de cada tipo espera tener durante una semana cualquiera, después de muchas semanas de operación?

Solución: Se calculan las probabilidades de largo plazo.

$\pi_N = \pi_E$
$\pi_B = 0.9\pi_N + 0.7\pi_B$
$\pi_A = 0.1\pi_N + 0.2\pi_B + 0.6\pi_A$
$\pi_E = 0.1\pi_B + 0.4\pi_A$
$\pi_N + \pi_B + \pi_A + \pi_E = 1$

Resolviendo se obtiene $\Pi = (\frac{4}{27}, \frac{12}{27}, \frac{7}{27}, \frac{4}{27})$

Si parte con 10.000 cajas nuevas, en una semana cualquiera espera tener:

$10.000 \cdot \frac{4}{27} \approx 1481$ cajas nuevas $10.000 \cdot \frac{12}{27} \approx 4444$ cajas buenas $10.000 \cdot \frac{7}{27} \approx 2593$ cajas aceptables

Puntaje:
2p Sistema de ecuaciones.
2p Cálculo probabilidades.
2p Respuesta.

.

Obs: Plantee **explícitamente** todas las ecuaciones que necesite para obtener sus resultados.

Problema 3 (18 puntos)

En un paradero de la ciudad los buses pasan de acuerdo a un proceso de Poisson a tasa β (buses/hora), mientras que las personas llegan de acuerdo a un proceso de Poisson a tasa α (personas/hora). Una fracción p de las personas prefiere viajar sentada en el bus.

La dinámica en el paradero es la siguiente: en la fila 1 se forman las personas que prefieren viajar sentadas (están dispuestas a esperar lo que sea necesario para subir a un bus que tenga asientos disponibles), mientras que en la fila 2 se forman las restantes (se suben al primer bus que pase, aunque tengan que viajar de pie). Cuando pasa un bus por el paradero, primero se suben las personas de la fila 1; cuando se acaban los asientos disponibles del bus o la fila 1 se queda vacía (lo que ocurra primero), se suben las personas de la fila 2. Suponga que la subida de personas al bus no toma tiempo.

Considere que cada bus que llega al paradero tiene K asientos disponibles y capacidad suficiente para llevar a todos los pasajeros que quieran viajar de pie, a su vez, la capacidad del paradero es infinita, por lo que todas las personas que llegan al paradero pueden quedarse esperando hasta subirse a un bus.

a) **(10 puntos)** Modele la cantidad de personas en el paradero como una CMTC. Especifique claramente los estados y las tasas de transición (instantánea) entre estados.

Solución: Sea

$N_1(t)$: número de personas en la fila 1 en el instante t
$N_2(t)$: número de personas en la fila 2 en el instante t
$X(t) = [N_1(t), N_2(t)]$: estado del paradero en el instante t

Si $X(t) = (i, j)$, las transiciones posibles son a:

- $(i+1, j)$ a tasa $\alpha \cdot p \quad \forall\, i, j$ (llega una persona que prefiere viajar sentada)
- $(i, j+1)$ a tasa $\alpha \cdot (1-p) \quad \forall\, i, j$ (llega una persona que no le importa viajar de pie)
- $(i-K, 0)$ a tasa $\beta \quad$ si $i \geq K,\ j \geq 0$ (pasa un bus, se ocupan todos los asientos con personas de la fila 1 y se suben todas las personas de la fila 2 (si las hay))
- $(0, 0)$ a tasa $\beta \quad$ si $0 \leq i < K,\ j > 0$ (pasa un bus, se suben todas las personas que están en la fila 1 (sobran asientos) y se suben todas las personas de la fila 2 (algunas podrían irse sentadas))

Puntaje:
2p Definición, estados.
2p Por cada transición posible.

b) **(4 puntos)** ¿Qué relación deben cumplir los parámetros α, β, p y K para que existan probabilidades de largo plazo? Justifique.

Solución: $\alpha \cdot p < \beta \cdot K$

De esta forma, los buses que, en promedio, pasan por hora tienen suficientes asientos disponibles ($\beta \cdot K$ asientos/hora) como para llevarse a las personas que, en promedio, llegan al paradero por hora ($\alpha \cdot p$ personas/hora) y que prefieren irse sentadas. Así, la fila 1 no crece indefinidamente.

Puntaje:
2p Relación entre los parámetros.
2p Justificación.

Considere ahora que las personas que están en la fila 1 se pueden cambiar a la fila 2 de la siguiente manera: si una persona que prefiere viajar sentada tiene la certeza que no alcanzará a subirse en el próximo bus que pase, esperará un tiempo exponencial de valor esperado $1/\gamma$ horas para cambiarse a la fila 2.

c) **(4 puntos)** Modifique la cadena anterior para modelar esta nueva situación. Especifique claramente los cambios realizados.

Solución:

Si $X(t) = (i, j)$, se agrega la transición a:

$(i-1, j+1)$ a tasa $\gamma \cdot (i - K)$ si $i > K$

Las primeras K personas de la fila 1 tienen certeza de que se irán en el siguiente bus que pase pues tiene K asientos disponibles, por tanto, sólo se cambiaran a la fila 2 las personas que están a partir de la posición $K+1$ en la fila 1.

Puntaje:

1p Transición.

2p Tasa de transición.

1p Condición.