N° Lista

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS
ICS 1513 INTRODUCCIÓN A LA ECONOMÍA, SEM 01-2025
PROFESORES: Alamo, R., Bisso, C., De Geyter, M., Irarrázaval, F., Namur, E., Olea, I.

INTERROGACIÓN 2: INSTRUCCIONES

INSTRUCCIONES

- La interrogación es presencial: no se pueden ocupar apuntes de clases, ayudantías, ni lecturas.
- La interacción y comunicación con cualquier otra persona está prohibida, sus respuestas deben ser propias e individuales, escritas con sus propias palabras y comprensión de la materia.
- La prueba tendrá un único cuadernillo de respuestas.
- Antes de comenzar la interrogación, deben escribir en el cuadernillo de respuestas su nombre y número de alumno.
- Se recomienda leer cuidadosamente todo el enunciado antes de comenzar.
- La interrogación tiene 100 puntos en total. Los puntajes de cada pregunta están indicados al comienzo de cada una.
- La interrogación dura 2:30 horas. Distribuya adecuadamente su tiempo. Sea breve y conciso con sus respuestas.
- Durante la interrogación no se permite tener consigo dispositivos que permitan almacenar información ni comunicación con terceros (por ejemplo, no se puede usar el teléfono, computador, tablets, relojes inteligentes, ni calculadoras programables). Sólo se permite el uso de calculadoras no programables.
- Cuando termine el tiempo de la prueba, deberá escanear su desarrollo y subirlo a Canvas en la tarea para dicho propósito. Para esto tendrá 15 minutos. No se recibirán entregas fuera de plazo.
- Al entregar la interrogación, deberá dejar el cuadernillo de respuestas completo (sin separar hojas) adelante, de acuerdo con las instrucciones de los ayudantes. Deberá dejar el enunciado también adelante. No serán corregidas hojas sueltas.

COMPROMISO DE INTEGRIDAD ACADÉMICA

Entiendo que el Código de Honor de la Universidad está vigente en esta evaluación. Me comprometo a no entregar ni recibir ayuda indebida en esta evaluación. Esto incluye discutir la evaluación con compañeros que aún no lo han rendido. También declaro que si me percato de que existe fraude de cualquier tipo en esta evaluación, tengo el deber de comunicárselo al profesor del curso. Las violaciones a la integridad académica serán sancionadas siguiendo los procedimientos establecidos en la reglamentación de la Escuela de Ingeniería y de la Pontificia Universidad Católica de Chile para estos efectos.

DECLARACIÓN

Declaro solemnemente que estoy de acuerdo con el Código de Honor y las normas que rigen la prueba, y me comprometo a cumplir con ellas en su totalidad durante el proceso de evaluación.

Nombre completo: .....

Firma: .....

Fecha: 06 de junio de 2025

Pregunta 1: 25 PUNTOS

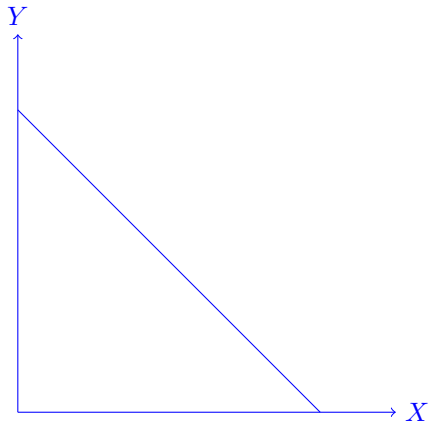
Teoría del Consumidor

a) **[4 puntos]** Suponga que existen dos bienes normales. Justifique y describa la forma geométrica de la curva de indiferencia cuya tasa marginal de sustitución sea constante en toda su extensión.

Solución:

La tasa marginal de sustitución (TMS) constante indica que el consumidor está dispuesto a intercambiar a lo largo de toda la curva de indiferencia una cantidad fija de un bien por otro. Esto ocurre en el caso de bienes perfectamente sustitutos.

Para ilustrar lo anterior, se presenta a continuación una representación gráfica de la curva:



Puntaje:

- **(2 puntos)** Por mencionar que son bienes sustitutos perfectos y justificar correctamente.
- **(2 puntos)** Por describir la forma geométrica de la curva. Por ejemplo, a partir de un gráfico ilustrativo.

b) **[3 puntos]** ¿Cuándo una familia de curvas de indiferencia puede tener pendiente positiva?

Solución:

Para que esto ocurra, debe suceder que uno de los bienes sea un "mal" o un bien no deseado. La lógica detrás de esto es que cuando un bien es un mal, se requiere más del otro para compensar la utilidad.

Esto también puede suceder en el caso de saciedad o de preferencias no convencionales.

Puntaje:

- **(1.5 puntos)** Por mencionar que uno debe ser un "mal".
- **(1.5 puntos)** Por justificar correctamente las implicancias de un "mal" en las decisiones del consumidor.

Teoría del Productor

a) **[4 puntos]** Demuestre que la curva de costo marginal intersecta a la curva de costo medio en su mínimo global (asuma que la curva de costo total es creciente y diferenciable, y que el costo medio tiene efectivamente un punto mínimo). Interprete, en términos de eficiencia, lo que ello implica.

Solución:

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir una curva de costo total $C(q)$ cualquiera que depende de la cantidad producida $q \geq 0$. A partir de lo anterior, se cumple que:

$$CMe(q) = \frac{C(q)}{q}$$

$$CM(q) = \frac{dC(q)}{dq}$$

Donde $CMe(q)$ corresponde al costo medio y $CM(q)$ al costo marginal.

Dadas las condiciones, para determinar el punto mínimo global de la curva de costo medio planteamos la condición de primer orden:

$$\frac{dCMe(q)}{dq} = \frac{d}{dq}\left[\frac{C(q)}{q}\right] = 0$$

$$\frac{dCMe(q)}{dq} = \left[\frac{CM(q) \cdot q - C(q) \cdot 1}{q^2}\right] = 0$$

$$\frac{dCMe(q)}{dq} = \left[\frac{CM(q) - CMe(q)}{q}\right] = 0$$

Finalmente, despejamos la expresión y obtenemos:

$$CM(q) = CMe(q)$$

Por lo tanto, $CM(q) = CMe(q)$ implica que $CMe(q)$ la curva de costo marginal intersecta a la curva de costo medio en su mínimo global. Este, entonces, es el punto de mayor eficiencia.

Puntaje:

- **(2 puntos)** Por plantear condición de primer orden.
- **(0.5 puntos)** Por explicitar $CM(q)$ en la expresión obtenida.
- **(0.5 puntos)** Por explicitar $CMe(q)$ en la expresión obtenida.
- **(1 punto)** Por interpretar correctamente.

Monopolio

a) **[4 puntos]** Utilizando herramientas de cálculo diferencial, demuestre que, bajo una función de demanda inversa lineal, la curva de ingreso marginal de un monopolista presenta una pendiente que es el doble de pronunciada (en valor absoluto) que la pendiente de la curva de demanda.

Solución:

Supongamos que un monopolio enfrenta una demanda lineal inversa tal que:

$$p(q) = a - bq, \qquad a, b > 0.$$

Para encontrar el ingreso total del monopolista, multiplicamos el precio por la cantidad vendida, obteniendo:

$$IT(q) = p(q) \cdot q = (a - bq) \cdot q = aq - bq^2.$$

Finalmente, el ingreso marginal se obtiene derivando el ingreso total con respecto a la cantidad:

$$IM(q) = \frac{d\,IT(q)}{dq} = a - 2bq.$$

Así, la pendiente de la función de demanda lineal inversa es $-b$, mientras que la del ingreso marginal es $-2b$, duplicando su magnitud en valor absoluto.

Puntaje:

- **(1 punto)** Por plantear demanda lineal inversa correctamente.
- **(1 punto)** Por plantear ingreso total.
- **(1 punto)** Por derivar ingreso total (ingreso marginal).
- **(1 punto)** Por concluir correctamente.

b) **[3 puntos]** Explique brevemente por qué la curva de demanda que enfrenta una empresa es horizontal en competencia perfecta y con pendiente negativa en monopolio.

Solución:

En competencia perfecta, la empresa es tomadora de precios. Dado esto, puede vender cualquier cantidad pero siempre al precio del mercado dado que jamás influirá en este. Asimismo, al ser un competencia perfecta, existe gran cantidad de empresas oferentes de un mismo bien, de modo que la demanda es perfectamente elástica dado la cantidad de sustitutos existentes. Por estas razones, su curva de demanda es horizontal.

Por otro lado, en un monopolio la empresa es el único agente oferente, por lo que recibe toda la demanda del mercado. Por esto, debe disminuir el precio para poder vender más. Esto se condice con la Ley de la Demanda, la cual establece que, a mayor precio de un bien, menor será la cantidad demandada por el mercado. Es por esto que enfrenta una curva de demanda con pendiente negativa.

Puntaje:

- **(1.5 puntos)** Por explicar correctamente el caso de competencia perfecta.
- **(1.5 puntos)** Por explicar correctamente el caso de monopolio.

Oligopolio

a) **[4 puntos]** Empleando una matriz de pagos al estilo "dilema del prisionero", ejemplifique el escenario donde, en un duopolio, se puede llegar a un equilibrio en el que ambas empresas opten por no cooperar.

Solución:

Considere dos empresas A y B. Ambas pueden cooperar (C) o no cooperar (NC). Un ejemplo de matriz de pagos al estilo del dilema del prisionero es la siguiente:

	Empresa B: C	Empresa B: NC
Empresa A: C	(3, 3)	(1, 4)
Empresa A: NC	(4, 1)	(2, 2)

Ambas empresas prefieren no cooperar sin importar lo que haga la otra ya que es lo que más les conviene (estrategia dominante), por lo que (NC, NC) es un equilibrio de Nash. Sin embargo, cooperar les daría un mejor resultado conjunto.

Puntaje:

- **(2 puntos)** Por plantear una matriz que represente el caso.

- **(2 puntos)** Por ejemplificar y explicar correctamente el caso.

b) **[3 puntos]** Desde la perspectiva del bienestar ciudadano, ¿qué instituciones estatales específicas tienen como función evitar la colusión entre miembros de un oligopolio? ¿Qué mecanismo institucional incentiva a que un integrante de un cartel se auto-acuse y entregue antecedentes relevantes?

Solución:

Para este fin, en Chile existe la Fiscalía Nacional Económica (FNE) y el Tribunal de Defensa de la Libre Competencia (TDLC). Estas dos instituciones se encargan de evitar la colusión entre los miembros de un oligopolio.

Por otro lado, en Chile existe el mecanismo de la Delación Compensada, el cual otorga inmunidad al primer integrante de un cartel que se entrega y brinda información.

Puntaje:

- **(1 punto)** Por mencionar la Fiscalía Nacional Económica.
- **(1 punto)** Por mencionar el Tribunal de la Libre Competencia.
- **(1 punto)** Por mencionar o explicar el mecanismo de la delación compensada.

Pregunta 2: 30 PUNTOS

a) **[15 puntos]** Suponga que se le ha encomendado determinar, de forma preliminar, un modelo que permita representar adecuadamente las decisiones de un consumidor racional respecto a dos bienes, x e y, que conforman una canasta C. Sea $C_i(x_i, y_i)$ una canasta i cualquiera, cuyas cantidades son x_i e y_i para cada bien. Para desarrollar su propuesta, se le ha entregado la siguiente información:

- Canastas Estudiadas:

- $C_1 = (1, 1)$
- $C_2 = (1, 2)$
- $C_3 = (2, 1)$
- $C_4 = (1.5, 1.5)$

- Preferencias declaradas por el consumidor:

- $C_3 \succ C_1$
- $C_3 \sim C_2$
- $C_4 \succ C_2$

A partir de la información expuesta, justifique cuál de las siguientes funciones de utilidad utilizaría para representar las preferencias del consumidor, analizando cada una de las tres opciones disponibles. Fundamente su respuesta en los principios de la Teoría del Consumidor y los modelos en cuestión de forma analítica.

i.- $U(x, y) = \alpha x + \beta y \qquad (\alpha, \beta) > 0$
ii.- $U(x, y) = \min\{x, y\}$
iii.- $U(x, y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1$

Solución:

Se debe analizar si cada una de las funciones de utilidad propuestas puede racionalizar las preferencias declaradas por el consumidor:

- $C_3 \succ C_1$
- $C_3 \sim C_2$
- $C_4 \succ C_2$

Opción i: $U(x, y) = \alpha x + \beta y$, con $\alpha, \beta > 0$ (sustitutos perfectos).

Evaluando:

$$U(C_1) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = \alpha + \beta$$
$$U(C_2) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 = \alpha + 2\beta$$
$$U(C_3) = \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 1 = 2\alpha + \beta$$
$$U(C_4) = \alpha \cdot 1.5 + \beta \cdot 1.5 = 1.5(\alpha + \beta)$$

De las preferencias declaradas: $C_3 \sim C_2 \Rightarrow U(C_3) = U(C_2)$

$$2\alpha + \beta = \alpha + 2\beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

Además, se requiere que $U(C_4) > U(C_2)$:

$$1.5(\alpha + \beta) > \alpha + 2\beta = 3\beta \Rightarrow 1.5(2\beta) > 3\beta \Rightarrow 3\beta > 3\beta \Rightarrow \text{Contradicción.}$$

Por tanto, la función de utilidad de sustitutos perfectos no es consistente con las preferencias del consumidor, ya que, según la información disponible, dichas preferencias son estrictamente convexas.

Opción ii: $U(x, y) = \min\{x, y\}$ (complementos perfectos).

Evaluando:

$$\begin{aligned} U(C_1) &= \min\{1, 1\} = 1 \\ U(C_2) &= \min\{1, 2\} = 1 \\ U(C_3) &= \min\{2, 1\} = 1 \\ U(C_4) &= \min\{1.5, 1.5\} = 1.5 \end{aligned}$$

Entonces:

- $U(C_3) = U(C_2) = U(C_1)$, lo que contradice $C_3 \succ C_1$
- $U(C_4) > U(C_2)$ se cumple.

Por lo que esta función no representa adecuadamente las preferencias estrictamente monótonas.

Opción iii: $U(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1$ (Cobb-Douglas)

Evaluando:

$$\begin{aligned} U(C_1) &= 1^\alpha 1^{1-\alpha} = 1 \\ U(C_2) &= 1^\alpha 2^{1-\alpha} = 2^{1-\alpha} \\ U(C_3) &= 2^\alpha 1^{1-\alpha} = 2^\alpha \\ U(C_4) &= 1.5^\alpha 1.5^{1-\alpha} = 1.5 \end{aligned}$$

Ahora, se debe imponer $C_3 \sim C_2 \Rightarrow 2^\alpha = 2^{1-\alpha} \Rightarrow \alpha = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$

Evaluando con $\alpha = \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} U(C_1) &= 1 \\ U(C_2) &= \sqrt{2} \approx 1.414 \\ U(C_3) &= \sqrt{2} \approx 1.414 \\ U(C_4) &= 1.5 \end{aligned}$$

Se cumple:

- $C_3 \succ C_1$ porque $1.414 > 1$
- $C_3 \sim C_2$ porque ambos valen $\sqrt{2}$
- $C_4 \succ C_2$ porque $1.5 > \sqrt{2}$

Se concluye que la función Cobb-Douglas con $\alpha = \dfrac{1}{2}$ representa correctamente las preferencias del consumidor.

Puntaje:

Para cada función de utilidad (5 puntos c/u, 15 puntos en total):

- **(3 puntos)** Evaluación y discusión analítica de las preferencias dadas.
- **(2 puntos)** Conclusión clara y justificada sobre si la función representa o no correctamente las preferencias.

b) Se ha determinado que las decisiones de un consumidor se pueden modelar a partir de la siguiente función de utilidad:

$$U(x,y) = ln(x) + y$$

Donde x e y representan las cantidades consumidas por este agente económico. Además, se cuenta con la información sobre los precios de dichos bienes, p_x y p_y, además del ingreso del consumidor, m. Se asume que $m \gg p_x \ \wedge m \gg p_y$, es decir, el ingreso es suficientemente alto en relación con los precios. A partir de esta información, responda lo siguiente:

i.- **[5 puntos]** Determine la función de demanda Marshalliana para los bienes x e y. Interprete, a partir de sus resultados, qué comportamiento tiene el agente económico en términos de su consumo.

Solución:

Se debe maximizar la utilidad del consumidor:

$$U(x,y) = \ln(x) + y$$

sujeto a la restricción presupuestaria:

$$p_x x + p_y y = m$$

Para encontrar el punto óptimo, se utiliza la condición de equilibrio del consumidor, que establece que en el óptimo se debe cumplir:

$$\frac{UM_x}{UM_y} = \frac{p_x}{p_y}$$

Calculando las utilidades marginales:

$$UM_x = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad UM_y = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = 1$$

Sustituyendo en la condición de equilibrio:

$$\frac{1/x}{1} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow x = \frac{p_y}{p_x}$$

Ahora, sustituyendo este valor de x en la restricción presupuestaria para encontrar y:

$$p_x \cdot \frac{p_y}{p_x} + p_y y = m \Rightarrow p_y + p_y y = m \Rightarrow y = \frac{m - p_y}{p_y}$$

Por lo tanto, las funciones de Demanda Marshalliana quedan definidas por las siguientes expresiones:

$$x^*(p_x, p_y, m) = \frac{p_y}{p_x}, \quad y^*(p_x, p_y, m) = \frac{m - p_y}{p_y}$$

Por ende, el agente económico presenta un consumo de x que se mantiene constante frente a variaciones en el ingreso, ya que este depende exclusivamente del cociente entre los precios $\frac{p_y}{p_x}$. Por otro lado, el consumo de y varía linealmente con el ingreso disponible. Una vez que el consumidor ha asegurado una cantidad fija de x, destina el resto de su presupuesto a la adquisición del bien y.

Puntaje:

- **(1 punto)** Planteamiento correcto del problema de maximización sujeto a la restricción presupuestaria.
- **(1.5 puntos)** Obtención correcta de la demanda Marshalliana de x.
- **(1.5 puntos)** Obtención correcta de la demanda Marshalliana de y.
- **(1 punto)** Interpretación económica correcta: consumo fijo de x, el resto del presupuesto destinado a y .

ii.- **[10 puntos]** Suponga que el precio del bien y cambia a p'_y, tal que $p'_y = (1+\lambda)p_y$, donde $\lambda > 0$. Asuma que el ingreso sigue siendo suficientemente alto, es decir, $m \gg p'_y$. Determine el cambio total en la cantidad demandada del bien y, descomponiéndolo en efecto ingreso y efecto sustitución bajo la ecuación de Slutsky e interpretando el signo de cada uno.

Solución:

Dado un aumento en el precio del bien y, de p_y a $p'_y = (1+\lambda)p_y$, se analiza el cambio total en la cantidad demandada de dicho bien, definido como:

$$\Delta y = y(p_x, p'_y, m) - y(p_x, p_y, m)$$

Aplicando la función de demanda:

$$\Delta y = \frac{m-(1+\lambda)p_y}{(1+\lambda)p_y} - \frac{m-p_y}{p_y}$$

Para igualar denominadores y facilitar el análisis, se expresa el resultado como una sola fracción:

$$\Delta y = \frac{m-(1+\lambda)p_y}{(1+\lambda)p_y} - \frac{m-p_y}{p_y} = \frac{m-(1+\lambda)p_y-(1+\lambda)m+(1+\lambda)p_y}{(1+\lambda)p_y} = \frac{-\lambda m}{(1+\lambda)p_y}$$

Aunque no es estrictamente necesario para efectos de la pregunta, este resultado puede ser útil como control de consistencia más adelante.

Para determinar los efectos ingreso y sustitución, se debe calcular $y(p_x, p'_y, m')$, donde m' es el ingreso compensado. Es decir, el ingreso que permite alcanzar la misma canasta inicial, pero enfrentando el nuevo precio del bien y.

La canasta original del consumidor es:

$$x^* = \frac{p_y}{p_x}, \qquad y^* = \frac{m-p_y}{p_y}$$

Por tanto, el ingreso compensado se obtiene como:

$$m' = m + y(p_x, p_y, m)\cdot(p'_y - p_y) = m + \left(\frac{m-p_y}{p_y}\right)\cdot\lambda p_y = m + \lambda(m-p_y) = (1+\lambda)m - \lambda p_y$$

Ahora, se calcula el efecto sustitución:

$$\Delta y^S = y(p_x, p'_y, m') - y(p_x, p_y, m)$$

Reemplazando:

$$\Delta y^S = \frac{(1+\lambda)m - \lambda p_y - (1+\lambda)p_y}{(1+\lambda)p_y} - \frac{m-p_y}{p_y}$$

$$\Delta y^S = \frac{(1+\lambda)m - \lambda p_y - (1+\lambda)p_y - (1+\lambda)m + (1+\lambda)p_y}{(1+\lambda)p_y}$$

$$\Delta y^S = \frac{-\lambda p_y}{(1+\lambda)p_y}$$

$$\Delta y^S = -\frac{\lambda}{1+\lambda}$$

Como el precio del bien y aumentó, el consumidor reduce su consumo por efecto sustitución. Esto es coherente con la teoría: el bien se vuelve relativamente más caro, por lo que el consumidor sustituye hacia el bien x.

El efecto ingreso se obtiene como:

$$\Delta y^N = y(p_x, p'_y, m) - y(p_x, p'_y, m')$$

Reemplazando ambas expresiones:

$$\Delta y^N = \frac{m-(1+\lambda)p_y}{(1+\lambda)p_y} - \frac{m'-(1+\lambda)p_y}{(1+\lambda)p_y} = \frac{m-m'}{(1+\lambda)p_y}$$

$$= \frac{m-[(1+\lambda)m - \lambda p_y]}{(1+\lambda)p_y} = \frac{-\lambda m + \lambda p_y}{(1+\lambda)p_y} = -\frac{\lambda(m-p_y)}{(1+\lambda)p_y}$$

Este efecto ingreso también es negativo, lo cual tiene sentido: el ingreso real del consumidor ha disminuido tras el alza del precio, por lo que su consumo del bien y se ve reducido (bien normal).

Finalmente, al sumar ambos efectos:

$$\Delta y = \Delta y^S + \Delta y^N = -\frac{\lambda p_y}{(1+\lambda)p_y} - \frac{\lambda(m-p_y)}{(1+\lambda)p_y} = -\frac{\lambda(p_y+m-p_y)}{(1+\lambda)p_y} = -\frac{\lambda m}{(1+\lambda)p_y}$$

Este resultado coincide con el cambio total calculado al inicio del ejercicio, verificando así la consistencia interna del procedimiento.

Puntaje:

- **(1 punto)** Cálculo correcto del ingreso compensado m'.
- **(1 punto)** Planteamiento correcto del efecto sustitución (ES).
- **(2 puntos)** Cálculo correcto del efecto sustitución.
- **(1 punto)** Interpretación correcta del signo del efecto sustitución.
- **(1 punto)** Planteamiento correcto del ingreso (EI).
- **(2 puntos)** Cálculo correcto del efecto ingreso.
- **(1 punto)** Interpretación correcta del signo del efecto ingreso.
- **(1 punto)** Cálculo correcto del cambio total y consistencia con la suma $\Delta y = \Delta y^S + \Delta y^N$.

Pregunta 3: 20 PUNTOS

Considere una empresa que produce un bien específico q y cuyos costos totales del corto plazo para cada cantidad pueden ser calculados utilizando la siguiente expresión: $C_{CP}(q) = \frac{q^3}{3} - 5q^2 + 25q + 40$. Esta empresa enfrenta una demanda: $p(q) = 25 - q$. Asuma que la empresa no puede actuar discriminando precios.

a) **[10 puntos]** Determine la curva de oferta de la empresa en el corto plazo $s_{CP}(p)$.

Solución:

La curva de oferta en el corto plazo de una empresa competitiva corresponde al tramo creciente del costo marginal por sobre el costo variable medio mínimo, pues esta solo produce si cubre sus costos variables.

Si se tiene una función de costos totales en el corto plazo igual a:

$$C_{CP}(q) = \frac{q^3}{3} - 5q^2 + 25q + 40$$

Entonces la parte variable (CV) será equivalente a la siguiente expresión:

$$CV_{CP}(q) = \frac{q^3}{3} - 5q^2 + 25q$$

Pues 40 corresponde a un costo fijo. Luego, para calcular el costo variable medio, se debe dividir la expresión anterior por q, de la siguiente forma:

$$CVMe_{CP}(q) = \frac{CV_{CP}(q)}{q} = \frac{\frac{q^3}{3} - 5q^2 + 25q}{q} = \frac{q^2}{3} - 5q + 25$$

Paralelamente, es necesario obtener el costo marginal. Para ello, se deriva la expresión de costos totales en el corto plazo respecto a q, de la siguiente manera:

$$CM_{CP}(q) = \frac{dC_{CP}(q)}{dq} = q^2 - 10q + 25$$

Para definir el inicio de la curva de oferta de la empresa en el corto plazo, es necesario resolver la siguiente igualdad:

$$CM_{CP}(q) = CVMe_{CP}(q)$$
$$q^2 - 10q + 25 = \frac{q^2}{3} - 5q + 25$$
$$\frac{2q^2}{3} - 5q = 0$$
$$q^2 - 7.5q = 0$$
$$q(q - 7.5) = 0$$
$$q_1 = 7.5$$
$$q_2 = 0$$

Se debe elegir $q = 7.5$, ya que éste corresponde al tramo creciente del $CM(q)$. Esta cantidad corresponde la cantidad de inicio para la curva de oferta. Para encontrar el precio correspondiente, reemplazamos este valor en alguna de las dos curvas determinadas previamente. Utilizando el costo marginal:

$$CM_{CP}(7.5) = (7.5)^2 - 10(7.5) + 25 = 56.25 - 75 + 25 = 6.25$$

Así, la empresa solamente producirá si el precio de mercado cumple que $p \geq 6.25$. En el caso que $p < 6.25$, la empresa no producirá nada. Así, en el caso de que produzca, la oferta se determinará según el precio, siguiendo la siguiente relación:

$$CM_{CP}(q) = p$$

$$q^2 - 10q + 25 = p$$
$$(q-5)^2 = p$$
$$q - 5 = \pm\sqrt{p}$$
$$q = \pm\sqrt{p} + 5$$

Se debe elegir el tramo creciente en p (Ley de la Oferta), obteniendo:

$$q(p) = \sqrt{p} + 5$$

Así, la curva de oferta en el corto plazo queda determinada de la siguiente manera:

$$s_{CP}(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 6.25 \\ 5 + \sqrt{p} & \text{si } p \geq 6.25 \end{cases}$$

Puntaje:

- **(1 punto)** Por determinar la función de costos variables.
- **(1 punto)** Por determinar la curva de costo variables medio.
- **(1 punto)** Por determinar la curva de costo marginal.
- **(2 puntos)** Por plantear la igualdad entre costo variable medio y costo marginal, en pos de determinar la curva de oferta.
- **(1 punto)** Por determinar $q^* = 7.5$
- **(1 punto)** Por determinar $p^* = 6.25$
- **(1 punto)** Por plantear igualdad $CM_{CP} = p$ para determinar la curva de oferta.
- **(2 puntos)** Por determinar correctamente la curva de oferta en el corto plazo $s_{CP}(p)$.

b) **[5 puntos]** En el corto plazo, determine cuál sería la cantidad y el precio óptimo de venta, asumiendo que se comporta como un productor más en un mercado competitivo. Calcule el beneficio de la empresa.

Solución:

Debido a que no tiene el poder de determinar precios, debe vender su producción al precio determinado por $p(q)$. Así, el precio se maximiza cuando:

$$CM_{CP}(q) = p(q)$$
$$q^2 - 10q + 25 = 25 - q$$
$$q^2 - 9q = 0$$
$$q(q-9) = 0$$
$$q_1 = 9$$
$$q_2 = 0$$

Así, la cantidad óptima es $q^* = 9$. Para obtener el precio óptimo, simplemente se debe remplazar este valor en la función de demanda, de la siguiente manera:

$$p(9) = 25 - 9 = 16$$

El precio óptimo es $p^* = 16$. Finalmente, para obtener el beneficio de la empresa, se debe calcular la diferencia entre el ingreso total y los costos totales. Se obtiene el ingreso total a partir del producto entre la cantidad y precio óptimos:

$$IT = p^* \cdot q^* = 16 \cdot 9 = 144$$

Por otro lado, los costos totales se obtienen reemplazando q^* en la función de costos entregada en el enunciado:

$$CT = C_{CP}(9) = \frac{(9)^3}{3} - 5(9)^2 + 25(9) + 40 = 243 - 405 + 225 + 40 = 103$$

Finalmente, el beneficio de la empresa es:

$$\pi = IT - CT = 144 - 103 = 41$$

Puntaje:

- **(1 punto)** Por definir la igualdad $CM_{CP}(q) = p(q)$ como condición de optimalidad en este escenario.
- **(1 punto)** Por determinar $q^* = 9$
- **(1 punto)** Por determinar $p^* = 16$
- **(1 punto)** Por plantear que el beneficio corresponde a $\pi = IT - CT$
- **(1 punto)** Por determinar que el beneficio de la empresa es igual a 41.

c) **[5 puntos]** En el corto plazo, determine cuál sería la cantidad y el precio óptimo de venta, asumiendo que se comporta como un monopolista. Calcule el beneficio de la empresa.

Solución:

El ingreso total del monopolista es igual a:

$$IT(q) = p(q) \cdot q = (25 - q) \cdot q = 25q - q^2$$

Su ingreso marginal corresponde a

$$IM(q) = \frac{d}{dq} IT(q) = 25 - 2q$$

Así, el monopolista maximiza su beneficio cuando el ingreso marginal es igual al costo marginal, de la siguiente forma:

$$IMg(q) = CMg(q)$$
$$25 - 2q = q^2 - 10q + 25$$
$$q^2 - 8q = 0$$
$$q(q - 8) = 0$$
$$q_1 = 8$$
$$q_2 = 0$$

Así, $q* = 8$. Para obtener p^*, simplemente se debe remplazar este valor en la función de demanda, de la siguiente manera:

$$p(8) = 25 - 8 = 17$$

Se determina que $p^* = 17$. Ahora, de la misma forma que la parte b), se obtiene el beneficio de la empresa:

$$IT = p^* \cdot q^* = 17 \cdot 8 = 136$$

Por otro lado, los costos totales se obtienen reemplazando $q*$ en la función de costos entregada en el enunciado:

$$CT = C_{CP}(8) = \frac{(8)^3}{3} - 5(8)^2 + 25(8) + 40 = 90.67$$

Finalmente, el beneficio de la empresa es:

$$\pi = IT - CT = 136 - 90.67 = 45.33$$

Puntaje:

- **(1 punto)** Por determinar el ingreso marginal $IM(q) = \frac{d}{dq} IT(q)$
- **(1 punto)** Por definir la igualdad $CM_{CP}(q) = IM(q)$ como condición de optimalidad en este escenario.
- **(0.5 puntos)** Por determinar que $q^* = 8$
- **(0.5 puntos)** Por determinar que $p^* = 17$
- **(1 punto)** Por plantear que el beneficio corresponde a $\pi = IT - CT$
- **(1 punto)** Por determinar que el beneficio de la empresa es igual a 45.33.

Pregunta 4: 25 PUNTOS

En esta pregunta se derivará una propiedad distintiva de los monopolios: la capacidad de segmentar el mercado en múltiples grupos de consumidores y ofrecer cantidades diferenciadas, lo que permite también cobrar precios distintos por cada segmento.

Suponga que un monopolio opera en un mercado con una función de costos $c(x)$ y enfrenta una función de demanda inversa $p(x)$, donde x representa la cantidad total ofrecida por la firma.

a) **[6 puntos]** Plantee el problema de maximización del monopolio y derive la condición de primer orden para este problema.

Solución:

El monopolio elige la cantidad x que maximiza sus beneficios:

$$\max_x \{p(x) \cdot x - c(x)\}$$

Para encontrar la cantidad óptima, se debe derivar la función objetivo respecto de x:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x) \cdot x - c(x)\right] = 0$$

Aplicando la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x) \cdot x\right] - \frac{d}{dx}c(x) = 0$$

$$\left(p(x) + \frac{dp(x)}{dx} \cdot x\right) - \frac{d}{dx}c(x) = 0$$

Donde:

- $p(x) + \dfrac{dp(x)}{dx} \cdot x = IM(x)$, ingreso marginal.
- $\dfrac{d}{dx}c(x) = CM(x)$, costo marginal.

Y así, la condición de primer orden resulta:

$$IM(x) - CM(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad IM(x) = CM(x)$$

Puntaje:

- **(3 puntos)** Planteamiento correcto del problema de maximización.
- **(2 puntos)** Derivación correcta de la condición de primer orden.
- **(1 punto)** Entendimiento de significado de expresiones, indicando que el ingreso marginal se iguala al costo marginal.

b) **[7 puntos]** Se ha determinado que el precio óptimo, dada la cantidad óptima, que cobra el monopolio puede expresarse como

$$p(x)\left[\frac{|\varepsilon^x_{p(x)}| - 1}{|\varepsilon^x_{p(x)}|}\right] = CM(x)$$

donde $\varepsilon^x_{p(x)}$ es la elasticidad–precio de la demanda respecto de x, y $CM(x)$ corresponde al costo marginal del monopolio. Utilizando la condición de primer orden obtenida en a), demuestre que esta expresión es válida. A partir de sus resultados, interprete el significado de esta relación en términos de la estrategia de fijación de precios de un monopolista.

Solución:

En el óptimo se cumple en:

$$IM(x) = p(x) + \frac{dp(x)}{dx} \cdot x$$

Factorizando:

$$IM(x) = p(x) \cdot \left(1 + \frac{\frac{dp(x)}{dx} \cdot x}{p(x)}\right)$$

Notando que la expresión de la elasticidad precio de la demanda se define como:

$$\varepsilon^x_{p(x)} = \frac{dx}{dp(x)} \cdot \frac{p(x)}{x}$$

Reemplazando, la expresión anterior equivale a:

$$IM(x) = p(x) \cdot \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^x_{p(x)}}\right)$$

Y debido a que la derivada de la demanda es negativa, se utiliza su valor absoluto para reordenar la expresión de la forma:

$$p(x) \cdot \left(\frac{|\varepsilon^x_{p(x)}| - 1}{|\varepsilon^x_{p(x)}|}\right) = CM(x)$$

Con esto, se demuestra la expresión propuesta. Esta relación muestra que el precio cobrado por el monopolista está por encima del costo marginal, dependiendo de la elasticidad de la demanda. Mientras más inelástica sea la demanda (menor módulo de la elasticidad), mayor será el margen sobre el costo marginal. Nótese que se cumple que $|\varepsilon^x_{p(x)}| \not> 1$: El monopolista siempre opera en el tramo elástico de la demanda.

Esto refleja el poder de mercado del monopolista para fijar precios por encima del costo marginal.

Puntaje:

- **(2 puntos)** Sustitución correcta del ingreso marginal con la condición de primer orden.
- **(3 puntos)** Desarrollo algebraico correcto para llegar a la expresión con elasticidad.
- **(2 puntos)** Interpretación económica correcta del resultado.

Descuento: En caso de no respetar el orden lógico de la demostración —comenzando por los supuestos conocidos y finalizando con la expresión que se desea demostrar— se descontará 1 punto. En caso de que no obtenga puntaje sobre 0 puntos, no se descuenta.

Ahora, suponga que el monopolio puede separar el mercado en dos segmentos de consumidores. La cantidad total ofrecida por el monopolio corresponde a $x = x_1 + x_2$, donde x_i representa la cantidad ofrecida al segmento $i \in \{1, 2\}$. Cada segmento cuenta con su propia función de demanda inversa $p_i(x_i)$. Adicionalmente, dada la estructura de costos del monopolio, se da que el costo total de producción depende de la suma de las cantidades, tal que $c(x_1, x_2) = c(x_1 + x_2)$.

c) **[6 puntos]** A partir de este nuevo escenario, plantee el problema de maximización del monopolio bajo discriminación de precios y determine las condiciones de primer orden para este problema. Analice lo que dichas condiciones implican en términos prácticos para el monopolista.

Solución:

Al igual que el inciso *a*), el monopolio maximiza sus beneficios de la forma:

$$\max_{x_1, x_2} \{\ p_1(x_1) \cdot x_1\ +\ p_2(x_2) \cdot x_2\ -\ c(x)\ \}$$

Condición de Primer Orden (CPO): Sea i el segmento estudiado:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\, p_i(x_i)\cdot x_i \;+\; p_j(x_j)\cdot x_j \;-\; c(x) \,\right] = 0$$

Trabajando la expresión:

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\, p_i(x_i)\cdot x_i \,\right]}_{\mathrm{IM}_i(x_i)} + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\, p_j(x_j)\cdot x_j \,\right]} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\, c(x) \,\right]}_{\underbrace{\frac{\partial c(x)}{\partial x}\cdot\cancelto{1}{\frac{\partial x}{\partial x_i}}}_{\mathrm{CM}(x)}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad p_i(x_i) + \frac{\partial p_i(x_i)}{\partial x_i}\cdot x_i = IM_i(x_i) = CM(x) \qquad \forall i = 1, 2$$

$$\Rightarrow \quad IM_1(x_1) = IM_2(x_2)$$

Se concluye que:

- El ingreso marginal de cada segmento se iguala al costo marginal de producción. Por lo tanto, no hay incentivos para el monopolista a producir más unidades.
- A su vez, el ingreso marginal de cada segmento es igual entre si, por lo que el monopolista no tiene incentivos a cambiar la asignación de unidades entre segmentos.

Puntaje:

- **(2 puntos)** Planteamiento correcto del nuevo problema de maximización.
- **(2 puntos)** Derivación correcta de la condición de primer orden.
- **(2 puntos)** Correcto análisis de los resultados, identificando ambas conclusiones expuestas (1pt por cada una).

d) **[6 puntos]** A partir del análisis anterior, se puede establecer que, para cada segmento $i \in \{1, 2\}$, se cumple la siguiente condición de optimalidad:

$$p_i(x_i)\left[\frac{|\varepsilon^{x_i}_{p_i(x_i)}| - 1}{|\varepsilon^{x_i}_{p_i(x_i)}|}\right] = CM(x) \qquad i = 1,\, 2$$

donde $\varepsilon^{x_i}_{p_i(x_i)}$ es la elasticidad–precio de la demanda del segmento i con respecto a x_i. Utilizando esta expresión, en conjunto con su resultado en c), analice cuál de las siguientes expresiones es verdadera en el contexto del problema óptimo del monopolio con discriminación de precios:

- "Ante discriminación de precios, el monopolio cobrará un precio mayor al segmento más inelástico".
- "Ante discriminación de precios, el monopolio cobrará un precio mayor al segmento más elástico".

Justifique su elección en base en las expresiones obtenidas.

Solución:

Como se cumple que $IM_1(x_1) = CM(x) = IM_2(x_2)$

$$\Rightarrow p_1(x_1)\left[\frac{\left|\varepsilon^{x_1}_{p_1(x_1)}\right| - 1}{\left|\varepsilon^{x_1}_{p_1(x_1)}\right|}\right] = p_2(x_2)\left[\frac{\left|\varepsilon^{x_2}_{p_2(x_2)}\right| - 1}{\left|\varepsilon^{x_2}_{p_2(x_2)}\right|}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{p_1(x_1)}{p_2(x_2)} = \frac{\dfrac{\left|\varepsilon^{x_2}_{p_2(x_2)}\right| - 1}{\left|\varepsilon^{x_2}_{p_2(x_2)}\right|}}{\dfrac{\left|\varepsilon^{x_1}_{p_1(x_1)}\right| - 1}{\left|\varepsilon^{x_1}_{p_1(x_1)}\right|}}$$

Sea $f(x) = \dfrac{x-1}{x} \Rightarrow f(x) = 1 - \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

De esta forma, Cuando x aumenta, $f(x)$ también lo hace para $x > 1$. Análogamente, cuando la elasticidad de un segmento aumenta, también aumenta la expresión que depende de ésta.

Suponiendo que el mercado 2 es más elástico, sin pérdida de generalidad; se cumple que:

$$\frac{\left|\varepsilon^{x_2}_{p_2(x_2)}\right| - 1}{\left|\varepsilon^{x_2}_{p_2(x_2)}\right|} > \frac{\left|\varepsilon^{x_1}_{p_1(x_1)}\right| - 1}{\left|\varepsilon^{x_1}_{p_1(x_1)}\right|}$$

$$\Rightarrow \frac{p_1(x_1)}{p_2(x_2)} > 1 \Rightarrow p_1(x_1) > p_2(x_2)$$

$\therefore$ Ante discriminación de precios, el monopolio cobrará un precio mayor al segmento más inelástico.

Puntaje:

- **(2 puntos)** Por plantear que el ingreso marginal es igual al costo marginal para ambos segmentos
- **(2 puntos)** Por desarrollo algebraico correcto (pasar de la igualdad de condiciones de optimalidad a la razón entre precios) y comparar correctamente la razón de precios entre segmentos.
- **(2 puntos)** Por elegir la afirmación correcta y justificarla con base en el desarrollo matemático.

Observación: la pregunta debe ser respondida en base a lo obtenido en c). Si la respuesta no es justificada matemáticamente no se otorgará puntaje.