ICS1113 OPTIMIZACION, 2010/2.
INTERROGACION 1.

Instrucciones: La prueba tiene 4 partes que totalizan 100 puntos. Responda la prueba en los cuadernillos que se le han entregado, son uno por parte. Coloque su **nombre, sección y número de lista (no número de alumno)** en cada una de las hojas de los cuadernillos. **Si no se atiene a estas instrucciones se le descontarán 5 puntos del puntaje de la prueba, sin derecho alguno a reclamo posterior.** No puede usar calculadoras programables ni teléfonos celulares. Tiene 150 minutos.

Parte 1 (25 pts).

a) (10pts) Considerando el siguiente problema de optimización continua:

$$
\begin{aligned}
&Min: \quad -x-y \\
&s.a. \\
&\quad 2y-x \le 10 \\
&\quad 16y+9x^2-72x \le 0 \\
&\quad \ln(x) \le y \\
&\quad x \ge 0
\end{aligned}
$$

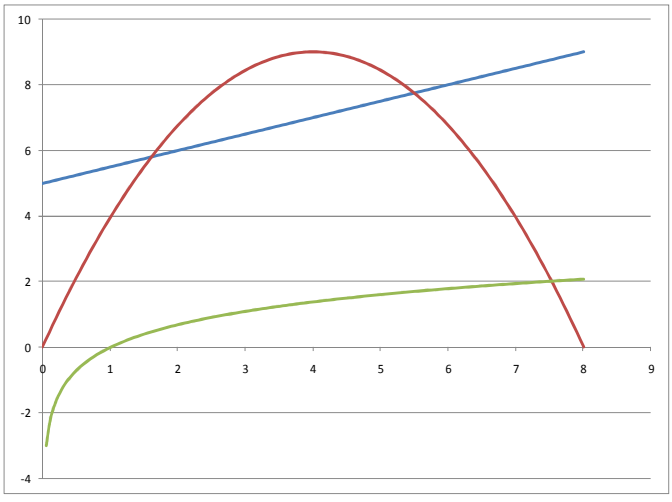
i. (7pts) ¿Tiene solución óptima? Si responde que si, justifíquelo.
ii. (3pts) ¿Es el problema convexo? ¿Por qué?

Respuesta:

i.

a- La función es continua sobre el dominio, pues $f(x) = -x - y$ es un polinomio. No existen puntos de indefinición.
b- El dominio es cerrado, pues sólo hay desigualdades no estrictas. ($\le, \ge$)
c- El dominio es distinto del vacío, pues el origen es factible.

Analizando gráficamente:



d- Podemos ver que el único punto de indefinición es el punto x = 0, y = - infinito. En este punto la función objetivo diverge hacia el infinito positivo.

Por a,b,c y d, podemos concluir que existe solución óptima.

ii. Claramente el dominio no es convexo, pues la restricción y<= ln(x) no lo es. Luego el problema no es convexo.

b) (15pts) Considere ahora el siguiente problema de maximización:

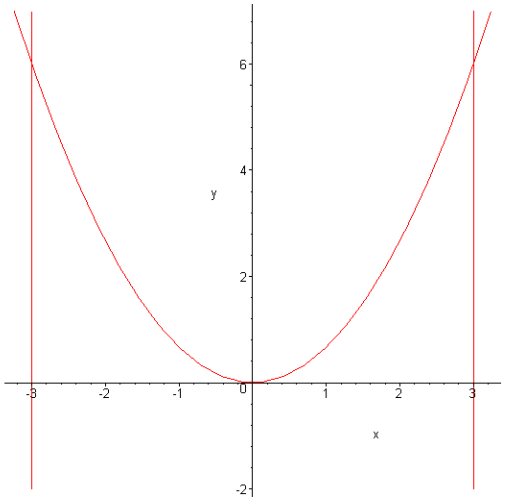
$$Max: \ \min\{x+3y, 3y-x\}$$
$$s.a.$$
$$3y \le 2x^2$$
$$|x| \le 3$$

i. (10pts) Resuelva gráficamente el problema a través del dibujo de curvas de nivel. Entregue claramente la solución óptima y el valor óptimo.

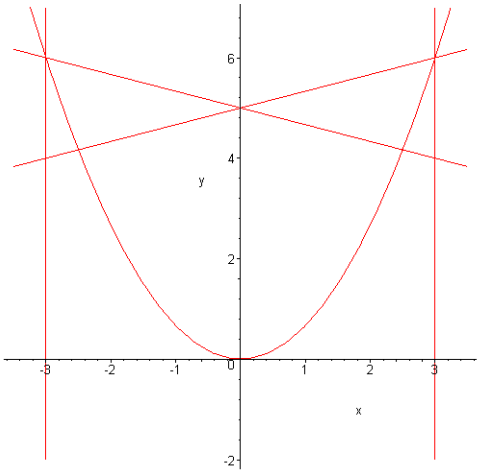
ii. (5pts) Entregue un problema equivalente diferenciable (es decir con restricciones y función objetivo diferenciables).

Respuesta:

i. El gráfico de las restricciones sería el siguiente, considerando el dominio bajo la parábola y entre las rectas verticales. Notar que el "y" es libre, es decir, el dominio incluye los puntos bajo el eje x.



Las curvas de nivel en el óptimo serías las siguientes:



Finalmente, la resolución gráfica entrega a los puntos (3,6) y (-3,6) como soluciones óptimas con valor = 15.

ii. Un problema equivalente y diferenciable sería:

$$
\begin{aligned}
&Max: \ \mu \\
&s.a. \\
&\quad x + 3y \geq \mu \\
&\quad 3y - x \geq \mu \\
&\quad x \ + \ y \leq x^2 \\
&\quad x \leq 3 \\
&\quad x \geq -3
\end{aligned}
$$

Asignación de puntaje:

a)

i)

Forma I:

- Por nombrar y **explicar** los tres primeros requisitos de la extensión del Teorema de Bolzano-Weirtrass, 1 punto cada uno (a,b y c). En c, se podía mencionar cualquier punto perteneciente al dominio.
- Por indicar el rayo de escape y explicar que según éste la función no se minimiza infinitamente, 3 puntos.
- Por concluir que existe solución óptima, gracias a a,b,c y d, 1 punto.

FormaII:

- Por graficar correctamente el problema de optimización, indicando claramente el dominio y el sentido de crecimiento de las curvas de nivel, 4 puntos.
- Por explicar que según el rayo de escape, la función objetivo diverge hacia infinito positivo, es decir, no se minimiza infinitamente, 2 puntos.
- Por concluir que existe solución óptima, 1 punto. (Sólo luego de graficar correctamente y dando la explicación correspondiente)

ii)

- Por indicar que la tercera restricción (y<= ln(x)) no era convexa, lo que hacía el problema no convexo, 3 puntos.
- También se podía trazar un línea que uniera dos puntos de la función logarítmica e indicar que habían puntos que quedaban fuera del dominio. Luego explicar que esto hacía al problema no convexo.
- Finalmente, también es válido haber demostrado que ln(x) es no convexa por definición de convexidad.

b)

i)

* Por graficar correctamente el dibujo, indicando correctamente el dominio y las curvas de nivel, 4 puntos.

* Por indicar las soluciones óptimas, 4 puntos (2 puntos cada una).

* Por indicar el valor óptimo, 2 puntos.

ii)

- Por reemplazar la función objetivo por u, 1 punto.
- Por agregar correctamente las dos restricciones que involucran a u, 2 puntos. (1 punto cada una)
- Por escribir el valor absoluto de x en dos restricciones nuevas, 2 puntos (1 punto cada uno)

Nota: Para recibir los 5 puntos, era necesario escribir finalmente las 5 restricciones.

Parte 2 (25 pts).

Considere el siguiente problema de Optimización Lineal (LP):

$$
\begin{aligned}
&Max: 2x + 6y \\
&s.a. \\
&x + \ y \geq 6 \\
&2x - \ y \leq 9 \\
&6y - 7x \leq 10 \\
&x + 6y \leq 50 \\
&x, y \geq 0
\end{aligned}
$$

i) Se le pide que utilizando el algoritmo SIMPLEX de *Tableau* de dos fases resuelva el problema encontrando la solución óptima (no se permiten argumentos gráficos). Cuál es la solución óptima y el valor óptimo' ¿Qué restricciones están activas en el óptimo?

ii) ¿Es única la solución? En caso de no serlo encuentre una expresión para representar al conjunto de soluciones óptimas.

Respuesta pregunta 2:

(i)

Primero estandarizamos el problema:

$$
\begin{aligned}
&Min: -2x - 6y \\
&s.a. \\
&x + \ y - h_1 = 6 \\
&2x - \ y + h_2 = 9 \\
&6y - 7x + h_3 = 10 \\
&x + 6y + h_4 = 50 \\
&x, y, h_1, h_2, h_3, h_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Luego comenzamos la fase I agregando la variable artificial:

$$
\begin{aligned}
&Min: z \\
&s.a. \\
&x + \ y - h_1 + z = 6 \\
&2x - \ y + h_2 = 9 \\
&6y - 7x + h_3 = 10 \\
&x + 6y + h_4 = 50 \\
&x, y, h_1, h_2, h_3, h_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Con este problema, creamos el primer tableau:

x	y	h1	h2	h3	h4	z	LD
1	1	-1	0	0	0	1	6
2	-1	0	1	0	0	0	9
-7	6	0	0	1	0	0	10
1	6	0	0	0	1	0	50
-2	-12	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0

Primera iteración:

x	y	h1	h2	h3	h4	z	LD
1	1	-1	0	0	0	1	6
2	-1	0	1	0	0	0	9
-7	6	0	0	1	0	0	10
1	6	0	0	0	1	0	50
-2	-12	0	0	0	0	0	0
-1	-1	1	0	0	0	0	-6

Segunda iteración, entra x sale h2:

x	y	h1	h2	h3	h4	z	LD
0	1,5	-1	-0,5	0	0	1	1,5
1	-0,5	0	0,5	0	0	0	4,5
0	2,5	0	3,5	1	0	0	41,5
0	6,5	0	-0,5	0	1	0	45,5
0	-13	0	1	0	0	0	9
0	-1,5	1	0,5	0	0	0	-1,5

Tercera iteración, entra y sale z:

x	y	h1	h2	h3	h4	z	LD
0	1	-0,66666667	-0,33333333	0	0	0,66666667	1
1	0	-0,33333333	0,33333333	0	0	0,33333333	5
0	0	1,66666667	4,33333333	1	0	-1,66666667	39
0	0	4,33333333	1,66666667	0	1	-4,33333333	39
0	0	-8,66666667	-3,33333333	0	0	8,66666667	22
0	0	0	0	0	0	1	0

Con esto llegamos al óptimo, podemos eliminar la variable z, y comenzamos la fase II:

x	y	h1	h2	h3	h4	LD
0	1	-0,66666667	-0,33333333	0	0	1
1	0	-0,33333333	0,33333333	0	0	5
0	0	1,66666667	4,33333333	1	0	39
0	0	4,33333333	1,66666667	0	1	39
0	0	-8,66666667	-3,33333333	0	0	22

Primera iteración, entra h1 sale h4:

x	y	h1	h2	h3	h4	LD
0	1	0	-0,07692308	0	0,15384615	7
1	0	0	0,46153846	0	0,07692308	8
0	0	0	3,69230769	1	-0,38461538	24
0	0	1	0,38461538	0	0,23076923	9
0	0	0	0	0	2	100

Llegamos al óptimo (costos reducidos mayores a cero), pero notamos que la solución no es única, ya que los costos reducidos para h2 es igual a cero.
En este caso, la primera solución que notamos es:

X1= 8
7
9
0
24
0

Con valor óptimo igual a -100, para el problema de maximización igual a 100.
(ii)
Hacemos otra iteración, haciendo que entre h2 a la base, y sacando h3:

x	y	h1	h2	h3	h4	LD
0	1	0	0	0,02083333	0,14583333	7,5
1	0	0	0	-0,125	0,125	5
0	0	0	1	0,27083333	-0,10416667	6,5
0	0	1	0	-0,10416667	0,27083333	6,5
0	0	0	0	0	2	100

Llegamos a otro óptimo (costos reducidos mayores a cero), que es:

X2= 5
7,5
6,5
6,5
0
0

Luego, la solución al problema es la combinación convexa de x_1 y x_2:

$$X = \lambda \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \\ 0 \\ 24 \\ 0 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} 5 \\ 15/2 \\ 13/2 \\ 13/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Puntaje asignado:
(i)
5 ptos. por escribir bien la estandarización y el problema de fase I
10 ptos. por terminar la fase I
15 ptos. por no terminar el problema pero explicar bien cómo se hace.
Entre 16 y 18 ptos. por llegar a una solución pero tener errores de cálculo.
20 ptos. por llegar a la solución correcta y decir el valor óptimo.

(ii)

1 pto. Por tener un tableau sin costos reducidos y decir que por eso la solución es única.
3 ptos. por decir que la combinación convexa de las dos soluciones es la solución general pero no escribir ambas soluciones.
5 ptos por escribir ambas soluciones, y decir que no es única por tener un costo reducido igual a cero.

Parte 3 (25 pts).

Tome en cuenta el modelo de planificación de inventario para bienes divisibles (no enteros) visto en clases con *N* productos, *M* materias primas y *T* periodos:

$$Min: \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(c_{i,t}X_{i,t} + h_i I_{i,t}\right)$$

$s.a.$

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{N} a_{i,j}X_{i,t} \le b_{j,t} \qquad \forall j \in \{1,..,M\} \quad \forall t \in \{1,..,T\}$$

$$(2)\quad I_{i,t} + d_{i,t} = I_{i,t-1} + X_{i,t} \qquad \forall i \in \{1,..,N\} \quad \forall t \in \{2,..,T\}$$

$$(3)\quad I_{i,1} + d_{i,1} = X_{i,1} \qquad \forall i \in \{1,..,N\}$$

$$(4)\quad I_{i,T} = 0 \qquad \forall i \in \{1,..,N\}$$

$$(5)\quad X_{i,t} \ge 0, I_{i,t} \ge 0 \qquad \forall i \in \{1,..,N\} \quad \forall t \in \{1,..,T\}$$

Donde las variables del problema son:
$X_{i,t}$: cantidad de productos "i" a fabricar en el periodo "t".
$I_{i,t}$: cantidad de productos "i" a almacenar del periodo "t" al periodo "t+1".

Los datos del modelo son:
$c_{i,t}$: costo de fabricación del producto "i" en periodo "t".
h_i : costo de inventario en bodega de un producto "i" por periodo.
$a_{i,j}$: requerimientos de materia prima "j" para fabricar el producto "i".
$d_{i,t}$: demanda por producto "i" en periodo "t".
$b_{j,t}$: Recursos disponibles de la materia prima "j2 en el periodo "t".

i. **(10pts) Explique en palabras la función objetivo y las restricciones (máximo una plana).**

Respuesta:

a. La función objetivo minimiza el costo de producción más el costo de inventario. (2 punto)
b. La primera restricción señala que los recursos son limitados y que no se puede utilizar más materia prima que la disponible. La segunda restricción es una restricción de continuidad de inventario y satisfacción de demanda. Señala que el inventario del periodo anterior, más la producción es igual a la demanda a satisfacer más lo que se dejará en inventario para el próximo periodo. (4 punto)

c. La tercera restricción es una condición de borde que señala que en el primer periodo no hay nada almacenado.
d. La cuarta restricción, también condición de borde, señala que no se dejará nada en inventario después del último periodo. (2 puntos por c y d)
e. La quinta restricción exige no negatividad de producción (no se produce negativamente) y de inventario (no se queda debiendo productos). . (2 punto)

ii. (7,5pts) ¿Qué pasaría si al comienzo del horizonte de planificación existe un costo fijo de F_i que se hace presente al fabricar el producto "i" en cualquier instante de tiempo (arriendo de equipos, bodegas, capacitación de personal,…)? Explique cómo cambia el modelo.

Respuesta:

1. Se debe agregar una variable binaria que controle si se produce o no "i" → Y_i
2. Se debe modificar la función objetivo: $Min: \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(c_{i,t}X_{i,t}+h_iI_{i,t}\right)+\sum_{i=1}^{N}F_iY_i$. (3 puntos)
3. Se debe agregar 2 restricciones adicionales: $\sum_{t=1}^{T}X_{i,t} \le MY_i \quad \forall i \in \{1,..,N\}$ (3 puntos)
   $Y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \{1,..,N\}$ (1,5 puntos)

El problema queda:

(NO ES NECESARIO ESCRIBIR EL MODELO DENUEVO)

$$Min: \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(c_{i,t}X_{i,t}+h_iI_{i,t}\right)+\sum_{i=1}^{N}F_iY_i$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{N}a_{i,j}X_{i,t} \le b_{j,t} \quad \forall j \in \{1,..,M\} \ \ \forall t \in \{1,..,T\}$$
$$I_{i,t}+d_{i,t}=I_{i,t-1}+X_{i,t} \quad \forall i \in \{1,..,N\} \ \ \forall t \in \{2,..,T\}$$
$$I_{i,1}+d_{i,1}=X_{i,1} \quad \forall i \in \{1,..,N\}$$
$$I_{i,T}=0 \quad \forall i \in \{1,..,N\}$$
$$X_{i,t}, I_{i,t} \ge 0 \quad \forall i \in \{1,..,N\} \ \ \forall t \in \{1,..,T\}$$
$$\sum_{t=1}^{T}X_{i,t} \le MY_i \quad \forall i \in \{1,..,N\}$$
$$Y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \{1,..,N\}$$

iii. (7,5pts) Considerando el modelo inicial: ¿Qué pasaría si sólo se pudiese fabricar el producto "i" por lotes de *K* unidades? Explique cómo cambia el modelo.

Respuesta:

1. La variable $X_{i,t}$ pasaría a ser el número de lotes (3 punto) a fabricar en cada periodo y sería entera (1 puntos). La producción de "i" en "t" sería: $X_{i,t}K$

Luego el modelo quedaría:

$$Min: \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(c_{i,t}X_{i,t}K + h_i I_{i,t}\right)$$

$$s.a.$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_{i,j}X_{i,t}K \le b_{j,t} \qquad \forall j \in \{1,..,M\} \quad \forall t \in \{1,..,T\}$$

1. $I_{i,t} + d_{i,t} = I_{i,t-1} + X_{i,t}K \quad \forall i \in \{1,..,N\} \quad \forall t \in \{2,..,T\}$ (3,5 puntos)

$$I_{i,1} + d_{i,1} = X_{i,1}K \qquad \forall i \in \{1,..,N\}$$

$$I_{i,T} = 0 \qquad \forall i \in \{1,..,N\}$$

$$X_{i,t} \in \square^{+}\{0\}, I_{i,t} \ge 0 \qquad \forall i \in \{1,..,N\} \quad \forall t \in \{1,..,T\}$$

(NO ES NECESARIO ESCRIBIR EL MODELO DENUEVO SÓLO SEÑALAR DONDE HACER LOS CAMBIOS)

Parte 4 (25 pts).

Considere el siguiente problema con un costo *"a"* desconocido:

$$Min: -x + ay$$

$$s.a.$$

$$3y + x \le 12 \ (1)$$

$$3x + y \le 12 \ (2)$$

$$x, y \ge 0$$

i) (12,5 pts) Indique el rango de valores de *"a"* para que ambas restricciones (1) y (2) estén activas en el óptimo, la solución debe ser única.
ii) (5 pts) Para qué valores de "a" existe solución múltiple. Qué restricción estaría siempre activa.
iii) (2,5 pts) Que pasa si a= -1, cuál es la solución óptima y el valor óptimo.
iv) (5 pts) Considere ahora el siguiente problema:

$$Min: -x - y - z$$

$$s.a.$$

$$3y + x + 3z \le 12 \ (1)$$

$$3x + y + 3z \le 12 \ (2)$$

$$x, y \ge 0$$

¿Puede decir cuál es la solución óptima si recurrir a resolverlo?

Solución:

i) Nos piden un óptimo con ambas holguras nulas. Hacemos el tableau:

x	Y	H1	H2	LD

1	3	1	0	12
3	1	0	1	12
-1	a	0	0	0

Entra x1 sale Min(12/1,12/3) → sale h2

x	Y	H1	H2	LD
0	8/3	1	-1/3	8
1	1/3	0	1/3	4
0	a+1/3	0	1/3	4

Este vértice no puede ser el óptimo (todavía está la holgura h1 con valor positivo)

Primera condición: $a+1/3 < 0 \rightarrow a < -1/3$

Puntaje: 5 puntos por el tableau y 2 por la primera restricción de "a".

Luego entra Y sale Min(8/(8/3),4/(1/3))=3 Sale h1

X	Y	H1	H2	LD
0	1	3/8	-1/8	3
1	0	-1/8	3/8	3
0	0	-3a/8-1/8	3/8+a/8	3 – 3a

En este tableau están activas las restricciones (1) y (2). Luego debe ser óptimo.

Segunda condición: $-3a/8-1/8 > 0 \rightarrow a < -1/3$
Tercera condición: $3/8+a/8 > 0 \rightarrow a > -3$

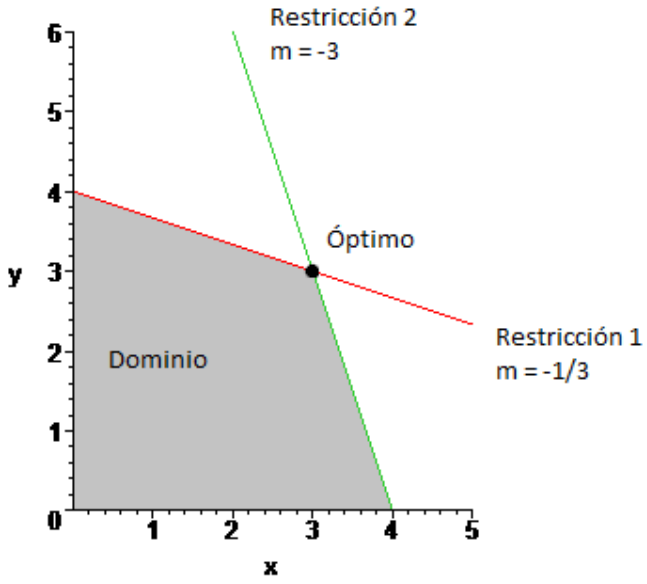
Puntaje: 4 ptos por el tableau y 1,5 por las condiciones.

Luego la condición pedida es que: $-3 < a < -1/3$

Alternativa II: También se puede hacer con análisis matricial de los costos reducidos utilizando la base óptima.

Alternativa III: Resolver el problema gráficamente con las restricciones en 2D.
La pendiente debe encontrarse entre las pendientes de ambas restricciones, es decir:

$-3 < -1/a < -1/3$ por lo tanto $-3 < a < -1/3$



i) Dos casos posibles para solución múltiple:

1. Si a= -1/3, habría solución múltiple y se daría en el trazo de la restricción (2) que pertenece al dominio. (restricción 2 siempre activa).
2. Si a =-3, habría solución múltiple y se daría en el trazo de la restricción (1) que pertenece al dominio. (restricción 1 siempre activa).

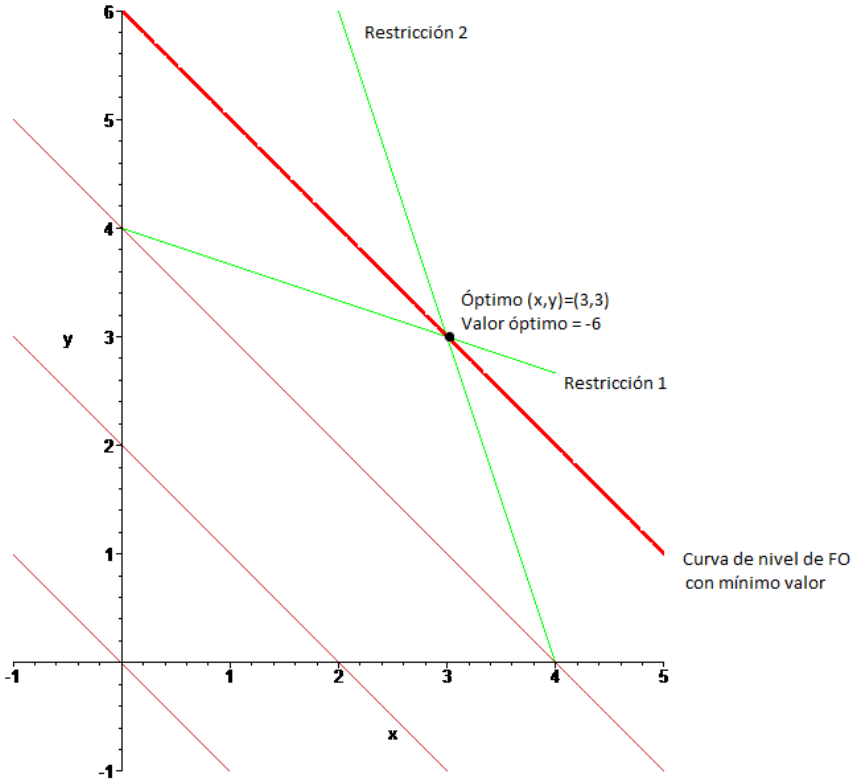
Puntaje: 1,5 ptos por cada valor de "a" y 1 pto por la mención de cada restricción activa.

iii) El vértice óptimo del problema a = -1 es x=3, y=3 con valor óptimo = -6

X	Y	H1	H2	LD
0	1	3/8	-1/8	3
1	0	-1/8	3/8	3
0	0	2/8	2/8	6

Puntaje: 1 punto por cada uno de los valores de las variables y 0,5 por el de la FO

Alternativa II: También se puede hacer con análisis gráfico, graficando la pendiente de la FO, hallando la intersección.



Alternativa III: Realizar el cálculo matricial para hallar el vector solución.

iv) Ahora, si incluyésemos a la variable z como no básica, este tableau sería un vértice factible del nuevo problema señalado. Para agregar a la variable z:

La columna de la variable z en este tableau será: $B^{-1}D_Z = B^{-1}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$

El costo reducido de z será: $r_Z = c_Z - c_B^T B^{-1} D_Z = -1 + \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} B^{-1}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$

Por otro lado en el tableau, las columnas de H1 y H2 son equivalentes a $B^{-1}D = B^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = B^{-1}$

Por lo tanto:

$$B^{-1}D_Z = \begin{bmatrix}3/8 & -1/8\\-1/8 & 3/8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6/8\\6/8\end{bmatrix}$$

$$r_Z = c_Z - c_B^T B^{-1} D_Z = -1 + \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/8 & -1/8\\-1/8 & 3/8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = -1 + \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6/8\\6/8\end{bmatrix} = -1 + 3/2 = 1/2$$

Luego no sería atractivo incluir a la variable z a la base y el vértice óptimo sería el mismo x=3, y=3, z=0

Puntaje: Asumiendo $z \geq 0$, se asignan 2 puntos por el análisis y 3 por decir que se mantiene la solución y el valor óptimo.

Alternativa II: Para aplicar simplex, se exige $z \geq 0$, luego como no está acotado, no es posible resolver el problema.