EXAMEN

ICS1113 Optimización – Sección 4

6 de Diciembre, 2010

INSTRUCCIONES: La prueba tiene XX puntos y durará XX minutos, sin extensión. No se permitirá el uso de calculadoras programables. La prueba tiene XX partes por lo que deberán contestar cada una en hojas separadas y no deben olvidar poner su nombre y su número a cada hoja. No se debe descorchetear el cuadernillo de respuestas en ningún momento durante la prueba. Se descontará 10 puntos a aquellos que no cumplan con alguna de estas instrucciones.

PARTE 1 (xx pts.)

Considere el siguiente problema de Programación Lineal.

$$
\begin{aligned}
P) Min \quad & -8x_1 - 6x_2 \\
s.a. \quad & \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 28 \\
& 5x_1 + 2x_2 \leq 42 \\
& x_2 \leq 8 \\
& 5x_1 + 2x_2 \geq 16 \\
& x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1. (X pts.) Reescriba el problema en formato estándar de Programación Lineal y encuentre una solución básica factible incial mediante Simplex para el problema de Fase 1. Luego formule el tableau inicial de Fase 2.

Tableau Inicial Fase 1

x1	x2	t	h1	h2	h3	e4	
3,0	2,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	28
5,0	2,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	42
0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	8
5,0	2,0	1,0	0,0	0,0	0,0	-1,0	16
-5,0	-2	0	0	0	0	1	0
-8	-6						

Tableau final Fase 1

0,0	0,8	-0,6	1,0	0,0	0,0	0,6	18
0,0	0,0	-1,0	0,0	1,0	0,0	1,0	26
0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	8
1,0	0,4	0,2	0,0	0,0	0,0	-0,2	3,2
0	0	1	0	0	0	0	0
0	-2,8	1,6	0	0	0	-1,6	0

Tableau Inicial Fase 2

x1	x2	h1	h2	h3	e4	
0,0	0,8	1,0	0,0	0,0	0,6	18
0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	1,0	26
0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0	8
1,0	0,4	0,0	0,0	0,0	-0,2	3
0	-2,8	0	0	0	-1,6	25,6

2. (X pts.) Si el tableau final de Fase 2 para el problema del enunciado es el siguiente:

x1	x2	r1	r2	r3	r4	
0,0	0,0	1,7	0,0	-1,3	1,0	20,0
0,0	0,0	-1,7	1,0	b	0,0	6,0
0,0	1,0	0,0	0,0	c	0,0	8,0
1,0	0,0	0,3	0,0	-0,7	0,0	d
0,0	0,0	e	0,0	a	0,0	80,0

Nota: columnas r1,…r4 corresponden a las variables de holgura/exceso de las restricciones 1, 2, 3 y 4.

a. ¿Qué condiciones deben darse para que este tableau arroje una solución óptima única? Fundamente su respuesta (*Hint: recuerde las propiedades fundamentales del método Simplex*) .

R/ **e**, **a** > 0 (mayor estricto → único) y **d** >=0. Con esto aseguramos que la solución encontrada es mejor que todo vértice adyacente, por lo tanto es óptima.

b. Responda cuál sería el valor óptimo, solución óptima (solución numérica), variables básicas y no básicas, y restricciones activas y no activas.

R/ Del tableau Z* = -80, X2*=8 → De la función objetivo se puede despejar X1*= 4. Variables básicas = x1, x2, r2 y r4. Variables no básicas = r1 y r3. Restricciones activas = 1 y 3.

c. El análisis de sensibilidad arroja que al aumentar el lado derecho de la restricción N°1 a 30 unidades la función objetivo mejora en 16/3 unidades. Y al disminuir el lado derecho de la restricción 3 a 7 unidades la función objetivo aumenta en 2/3 unidades. ¿Qué púede decir de los valores e y a?

R/ Restricción 1: $\mathbf{\Delta FO = -16/3 = (30\text{-}28)\lambda_1}$ → $\mathbf{\lambda_1}$= -8/3. **e** = - $\mathbf{\lambda_1}$= 8/3.
Restricción 3: $\mathbf{\Delta FO = +2/3 = (7\text{-}\ 8)\lambda_3}$ → $\mathbf{\lambda_3}$= -2/3. **a** = - $\mathbf{\lambda_2}$= 2/3.

d. ¿Qué condiciones deberían darse para que el Problema Dual asociado al problema sea infactible?

R/ Por teorema débil de dualidad: Dual infactible → Primal No Acotado → **b**, **c** < 0, **a** < 0 y **d** >=0.

3. Formule el Problema Dual asociado al problema de minimización del enunciado y determine la solución óptima.

R/

$$
\begin{aligned}
&P) Min \quad 28y_1 + 42y_2 + 8y_3 + 16y_4 \\
&s.a. \\
&\quad 3y_1 + 5y_2 + \quad 5y_4 \le -8 \\
&\quad 2y_1 + 2y_2 + y_3 + 2y_4 \le -6 \\
&\quad y_1, y_2, y_3 \le 0 \\
&\quad y_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

Del tableau final y respuesta 3.a y 3.b $W_{dual}^* = -80$. Y1=-8/3, Y2=0, Y3= -2/3, Y4=0.

PARTE 2 (xx pts.)

1. Para el siguiente problema de optimización responda:

$$
\begin{aligned}
&P) Min \quad x_1^2 + x_2 \\
&s.a. \\
&\quad 2x_1 + x_2 \le 5 \\
&\quad -2x_1 + x_2 \le 5 \\
&\quad x_1^2 + x_2^2 \le 25
\end{aligned}
$$

   a. Demuestre que el problema admite solución óptima.

R/ Aplicar cualquier teorema de existencia (ej. Bolzano-Weierstrass)

   b. Demuestre que este problema es convexo. ¿Qué puede decir acerca de un punto mínimo local? Sin resolver ¿Puede verificar si la solución será única?

R/ Convexidad: La matriz Hessiana de la F.O. es semidefinida positiva → FO convexa. Para dominio mostrar que es la intersección de 3 restricciones del tipo ≤ con funciones lineales y convexas. Luego el problema es convexo. Dado que es convexo, todo punto mínimo local es global. No se puede asegurar solución única pues la matriz Hessiana no es definida positiva (determinante 2 = 0).

2. Resuelva mediante Lagrange y responda cómo cambia el valor óptimo de la función objetivo ante pequeñas variación del parámetro K (escalar).

$$Min \ \ f(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}$$

$$s.a.$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = K$$

$$X \in \mathbb{R}^n$$

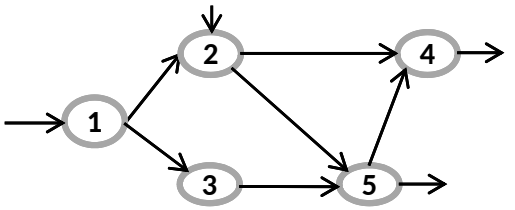
R/ $x_i = \sqrt[n]{K}$; Tasa de cambio: $\lambda = 2\sqrt[n]{K^{2-n}}$

PARTE 3 (xx pts.)

1. Una empresa debe distribuir un cierto producto a través de una red de transporte según el siguiente grafo:

		Unidades
Nodo 1	Oferta	5
Nodo 2	Oferta	8
Nodo 3	Centro de Transbordo	-
Nodo 4	Demanda	6
Nodo 5	Demanda	7

Arcos	1-2	1-3	2-5	2-4	3-5	5-4
Costo	4	2	6	4	2	3



a. (X pts.) Modele el problema como un problema de flujo a costo mínimo.
R/ Excel

b. (X pts.) Para la solución del cuadro de abajo dibuje su correspondiente árbol generador y demuestre que es una solución óptima al problema.

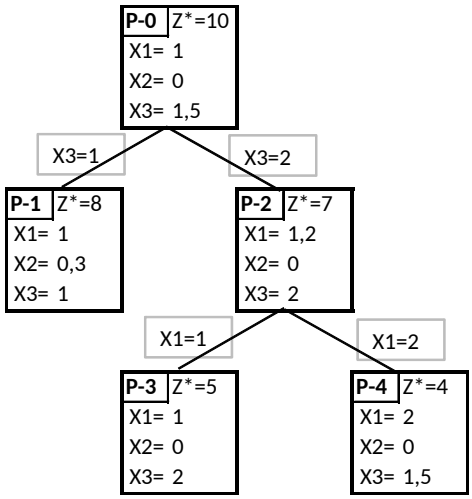
Arcos	1-2	1-3	2-5	2-4	3-5	5-4
Xij	0	5	2	6	5	0

R/ Excel

c. (X pts.) Explique qué interpretación tiene un cambio de base en el Simplex especializado a redes y qué función cumplen las variables duales.

R/ Dado que una base factible de un problema de redes corresponde a un árbol generador, un cambio de base es un cambio de árbol generador, es decir, el reemplazo de un arco por otro. Las variables duales permiten determinar los costos reducidos de las variables básicas y no básicas, de esta forma es posible saber cuál variable sale de la base y cuál entra en cada iteración.

2. Las primeras cuatro iteraciones de Branch and Bound para un problema de Programación Entera de maximización (variables x1, x2 y x3 enteras) arrojan los siguientes resultados:



a. ¿Cuál es la definición del Incumbente y cuál es su propósito en el algoritmo Branco and Bound? ¿Cuál es el valor del Incumbente en este caso?

R/ Es el valor de la MEJOR solución entera disponible hasta el momento. Permite "cortar" aquellas ramas que generan soluciones peores. Incumbente: Z=5 (P-3)

b. ¿Qué ramas deberían ser exploradas en las próximas iteraciones? ¿Cuáles no? Explique.

R/ Se debe desarrollar la rama bajo P-1, generando dos subproblemas x2=0 y X2=1. La rama P-3 ya es entera. La rama P-4 genera una solución peor que el Incumbente → cortamos.

c. Con la información disponible, ¿Puede establecer un rango (valor máximo y mínimo) para el valor de la solución óptima? Justifique su respuesta.

R/ Valor máximo Z= 10 (solución al problema relajado con variables continuas). Valor mínimo → Incumbente = 5. Si la solución al problema P-3 no es la óptima, entonces al menos cualquier solución entera encontrada en otra rama de ser a lo menos igual a 5.

PARTE 4 (xx pts.)

Una empresa debe realizara su planificación cuatrimestral de producción de un cierto producto. Las demandas para cada mes son 520, 720, 520 y 620 para los meses 1, 2, 3 y 4 respectivamente. La empresa cuenta con una dotación fija de 10 operarios, pero puede ajustar su producción a las fluctuaciones de la demanda mediante la contratación o despido de trabajadores temporarios. Un operario permanente produce a una tasa de 12 unidades mensuales y uno temporario sólo produce a 10 unidades debido a la menor experiencia. La empresa puede producir más que la demanda en cualquier mes y dejar en inventario el remanente para el mes siguiente, o producir menos y utilizar los productos en inventario para satisfacer la demanda. Asuma que no hay inventario inicial ni tampoco puede haber inventario remanente al final del cuarto mes. Cada vez que se contrata un nuevo operario la empresa debe pagar $200 y cada vez que despide a un trabajador debe incurrir en un costo de $400. Por cada unidad almacenada en inventario se incurre en un costo de $50 por unidad por mes. Desarrolle un modelo de optimización que permita determinar el plan óptimo que minimice todos los costos durante el cuatrimestre.

R/ Modelo Optimización



PARTE 5 (xx pts.)

Dado el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} &\text{Min } e^{-10x-y} \\ \text{s.a. } &(x-1)^2 + y^2 \leq 4 \\ &x + 2y \leq 3 \\ &y \leq 1 \\ &-x \leq 0 \end{aligned}$$

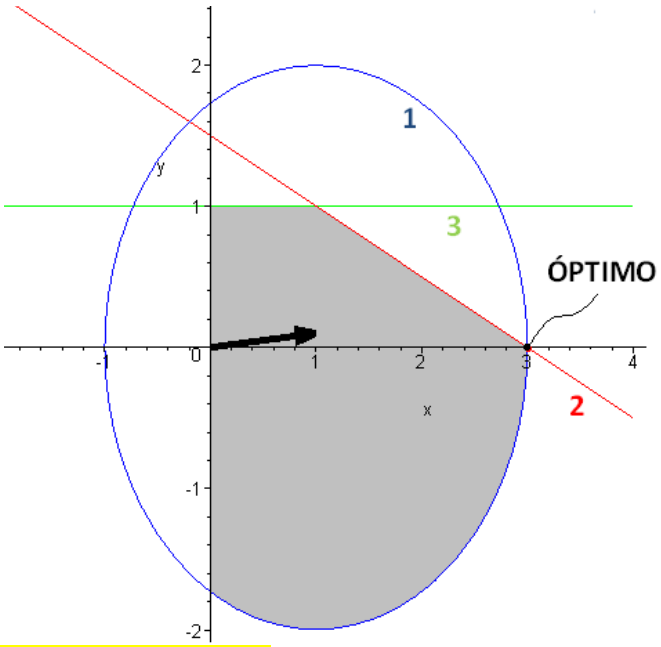
1. Encuentre gráficamente la solución del problema anterior.
2. Verifique si el punto anterior cumple con las restricciones de KKT de 1º orden. Determine el valor de los multiplicadores de Lagrange.
3. Mediante un análisis de regularidad clasifique el punto encontrado anteriormente.
4. ¿El punto encontrado es un mínimo? Justifique.

Solución:

1) Encuentre gráficamente la solución del problema anterior.

$$\begin{aligned} &\text{Min } -10x - y \\ \text{s.a. } &(x-1)^2 + y^2 \leq 4 \\ &x + 2y \leq 3 \\ &y \leq 1 \\ &-x \leq 0 \end{aligned}$$

Gráficamente el dominio se vería de la siguiente forma:



Por lo que el óptimo sería el punto (3,0).

2) Verifique si el punto anterior cumple con las restricciones de KKT de 1º orden. Determine el valor de los multiplicadores de Lagrange.

Reescribimos el problema para llevarlo al formato estándar:

$$\begin{aligned} \text{Min } & -10x - y \\ \text{s.a. } & (x-1)^2 + y^2 \le 4 \\ & x + 2y \le 3 \\ & y \le 1 \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

Planteamos el lagrangeano:

$$L(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = -10x - y + \mu_1\left((x-1)^2 + y^2 - 4\right) + \mu_2(x + 2y - 3) + \mu_3(y - 1)$$

Planteamos las condiciones de KKT de 1º orden:

(1) $\dfrac{dL}{dx} = -10 + 2\mu_1(x-1) + \mu_2 \ge 0$

(2) $x\dfrac{dL}{dx} = x(-10 + 2\mu_1(x-1) + \mu_2) = 0$

(3) $\dfrac{dL}{dy} = -1 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 + \mu_3 = 0$

(4) $\dfrac{dL}{d\mu_1} = (x-1)^2 + y^2 - 4 \le 0$

(5) $\mu_1\dfrac{dL}{d\mu_1} = \mu_1\left((x-1)^2 + y^2 - 4\right) = 0$

(6) $\frac{dL}{d\mu_2} = x + 2y - 3 \leq 0$

(7) $\mu_2 \frac{dL}{d\mu_2} = \mu_2(x + 2y - 3) = 0$

(8) $\frac{dL}{d\mu_3} = y - 1 \leq 0$

(9) $\mu_3 \frac{dL}{d\mu_3} = \mu_3(y - 1) = 0$

(10) $y, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$

Verificamos si el punto (3,0) cumple con las condiciones anteriores:

(3) $\rightarrow -1 + 2\mu_2 = 0 \rightarrow \mu_2 = \frac{1}{2}$

(2) $\rightarrow -10 + 4\mu_1 + \mu_2 = 0 \rightarrow \mu_1 = \frac{19}{8}$

(1) $\rightarrow 0 \geq 0$

(4) $\rightarrow 0 \leq 0$

(5) $\rightarrow \mu_1 0 = 0$

(6) $\rightarrow 0 \leq 0$

(7) $\rightarrow \mu_2 0 = 0$

(8) $\rightarrow -1 \leq 0$

(9) $\rightarrow \mu_3 - 1 = 0 \rightarrow \mu_3 = 0$

(10) se cumple

Por lo tanto el punto cumple con las condiciones de KKT de 1º orden.

3) Mediante un análisis de regularidad clasifique el punto encontrado anteriormente.

En el punto (3,0) se encuentran activas las restricciones 1 y 2, por tanto, para clasificarlo calculo el jacobiano asociado a esas 2 restricciones:

$$J = \begin{bmatrix} 2(x-1) & 2y \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow J(3,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Por lo que las filas son LI, lo que implica que el punto es **regular**.

4) ¿El punto encontrado es un mínimo?, argumente.

Ocupamos las condiciones de KKT de 2º orden, para eso debemos calcular el Hessiano del Lagrangeano y evaluarlo en el punto:

$$H(L) = \begin{bmatrix} 2\mu_1 & 0 \\ 0 & 2\mu_1 \end{bmatrix} \rightarrow H(L(3,0,19/8,1/2,0)) = \begin{bmatrix} 19/4 & 0 \\ 0 & 19/4 \end{bmatrix}$$

Los 2 subdeterminantes de la matriz anterior son mayores estrictos que cero, por tanto, el hessiano del lagrangeano evaluado en el punto es definido positivo; lo que implica que el punto es un mínimo.