ICS1113 OPTIMIZACION, 2010/1.
INTERROGACION 3, SOLUCION

Parte 1 (24 pts).
a) Responda brevemente las siguientes preguntas:

i) (4 pts) Para que un problema de flujo a costo mínimo sobre una red dirigida sea factible basta con que la oferta total sea igual a la demanda total. ¿Verdadero o Falso? Explique con precisión.

Falso. Si bien eso debe cumplirse, puede ocurrir que la orientación de los arcos haga imposible enviar flujo y cumplir con las demandas.

ii) (4 pts) Cuando se resuelve un problema de Programación Lineal de minimización usando el algoritmo SIMPLEX, siempre debe elegirse para entrar a la base la variable no básica con el costo reducido más negativo si es que queremos llegar al óptimo en el menor número de iteraciones. ¿Verdadero o Falso? Explique con precisión.

Falso: No necesariamente siempre. El elegir el más negativo sólo garantiza el mejor cambio marginal, pero en el total de iteraciones no podemos decir nada.

iii) (4 pts) Suponga que le dan un problema de Programación Lineal Entera el cual usted comienza a resolver usando el algoritmo de Ramificación y Acotamiento (Branch&Bound), hasta que encuentra una solución entera. Entonces, esa solución entera no es necesariamente la óptima. ¿Verdadero o falso? Explique con precisión.

Verdadero. Esa es sólo una solución entera factible. Podría haber otra mejor en otras ramas del árbol que no hayan sido aún exploradas.

iv) (6 pts) Considere un problema de transporte en el cual hay n puntos de origen que pueden enviar un producto a m puntos de destino. Hay un costo c_{ij} de enviar una unidad de producto desde i a j. En cada origen i hay una oferta máxima igual a b_i y en cada punto de destino j hay una demanda igual a d_j. Se tiene que $\sum_{i=1}^{n} b_i \geq \sum_{j=1}^{m} d_j$, es decir, la oferta total puede ser mayor a la demanda total. Explique con claridad cómo se puede resolver este problema usando el modelo general de flujo a costo mínimo en una red adecuada para poder usar el algoritmo SIMPLEX especializado a redes.

Esta construcción se hace agregando un nodo extra conectado a los orígenes que permita que la diferencia entre oferta total y demanda total se puede "descargar". De este modo la red queda balanceada (oferta es igual a demanda) y se puede aplicar el SIMPLEX especializado a redes.

b) (6 pts) Considere el siguiente Tableau de un problema de *minimización:*

Costos reducidos →

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
3	1	a_1	0	a_2	0	1
-1	0	-5	1	-1	0	2
a_3	0	-3	0	5	1	b
C_1	0	C_2	0	C_3	0	-15

Indique qué condiciones deben satisfacer los parámetros a_1, a_2, a_3, C_1, C_2, C_3 y b del Tableau para las siguientes situaciones:

i) **(2 pts)** La solución actual es óptima, pero no única.

Por ejemplo, $C_1>0$, $C_2>0$ **(0,5 pts.)**, $C_3=0$ **(1pt.).** Además debe tenerse b≥0 **(0,5 pts.).**

ii) **(2 pts)** El problema es no acotado.

Por ejemplo, $C_2 < 0$ **(0,5 pts.)**, $a_1 < 0$ **(1pt.)**. Además debe tenerse b≥0 **(0,5 pts.).**

iii) **(2 pts)** La solución básica actual es degenerada.

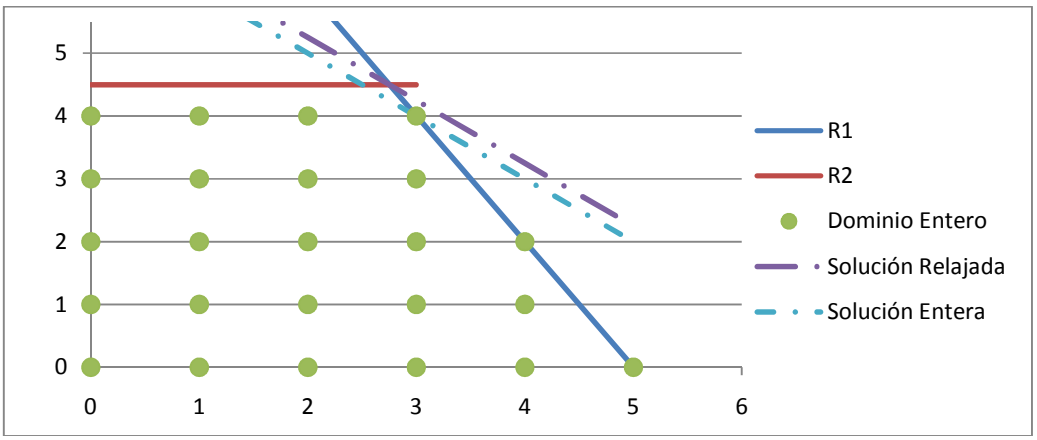
Para esto basta que b = 0.

Parte 2 (20 pts)

a) (10 pts) Considere el siguiente problema de Programación Lineal Entera

$$P) \quad \begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ s.a. & x_2 + 2x_1 \leq 10 \\ & 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \in \{0,1,2,3,...\} \end{array}$$

i) **(5 pts)** Haga un gráfico donde se muestren claramente los puntos enteros factibles del problema, la solución óptima de este y también la solución óptima de la relajación lineal del problema.

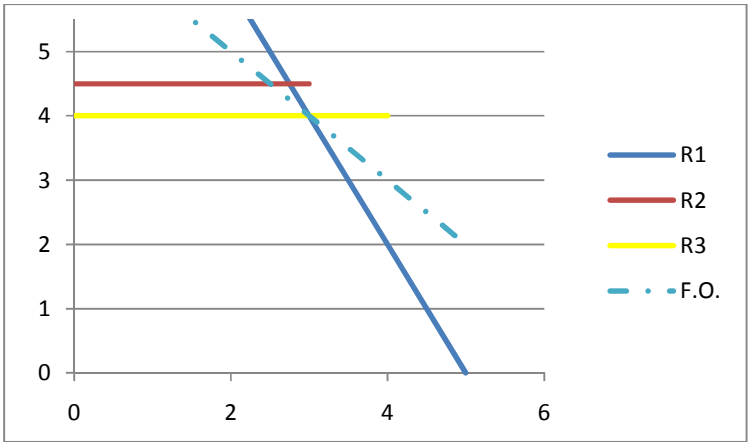


Solución Relajada: $x_1 = \frac{11}{4}, x_2 = \frac{9}{2}$
Solución Entera: $x_1 = 3, x_2 = 4$

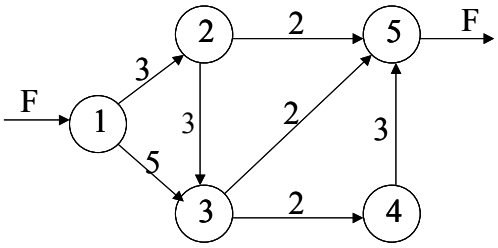
ii) **(3 pts)** Observe que la segunda restricción se puede también escribir como $x_2 \leq \frac{9}{2}$. Use esto para construir una restricción adicional tal que al agregarla a la relajación lineal del problema P), "corte" y deje fuera la solución de la relajación lineal. ¿Cuál es la solución óptima del nuevo problema (la relajación lineal más la nueva restricción)? Justifique con claridad (puede usar el argumento del gráfico).

A partir de la restricción $x_2 \leq \frac{9}{2}$, podemos construir entonces un corte donde la variable sea entera, esto es:

$$x_2 \leq 4$$



b) (10 pts) Considere el problema de enviar el máximo flujo posible entre el nodo 1 y el nodo 5 en la red que se muestra la siguiente figura. Los números al lado de los arcos son las capacidades de estos:



Un flujo factible sobre esta red es el siguiente: $f_{12}=2, f_{13}=2,\ f_{23}=0,\ f_{25}=2,\ f_{35}=0,\ f_{34}=2, f_{45}=2,$ que corresponde a enviar 4 unidades de 1 a 5. Muestre, usando el Teorema de Ford y Fulkerson, que este flujo no es óptimo (debe usar el resultado del teorema, no basta con que argumente "a ojo" que el flujo no es óptimo).

Por Teorema de Ford y Fulkerson el flujo máximo viene dado por la capacidad de corte mínima, por lo tanto:

Corte	Capacidad de Corte
{1}{2,3,4,5}	8
{1,2}{3,4,5}	10
{1,3}{2,4,5}	7
{1,2,3}{4,5}	6
{1,2,4}{3,5}	7
{1,2,3,4}{5}	7

Por lo tanto el flujo máximo es 6, entonces la solución entregada no es óptima.

Parte 3 (16 pts).
Considere el siguiente problema de Programación entera 0-1:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \\ s.a. \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 4 \\ & x_i \in \{0,1\}, i = 1,..,4. \end{aligned}$$

La solución óptima de la relajación lineal de este problema es: $x_1 = 0$, $x_2 = 1/3$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, con un valor objetivo de $z = 8$. Resuelva esta problema usando el algoritmo de Branch & Bound (Ramificación y Acotamiento). Resuelva los problemas en cada nodo "por inspección" (se puede, son

pocas variables y sólo una restricción, sea cuidadoso). Indique en cada nodo con claridad las variables que se fijan en 0 ó 1, los valores objetivos y los valores de su incumbente (si lo tiene).

Dada la solución del problema relajado, ramificamos en 2 nuevos problemas donde $x_2 = 0$ y $x_2 = 1$, respectivamente.

$$P1)\ Max\ Z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4$$
$$s.a$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 4$$
$$x_2 = 0$$
$$0 \leq x_i \leq 1, i = 1,3,4$$

Por inspección, las soluciones factibles con posibilidad de ser óptimo son:

x_1	x_2	x_3	x_4	Z
1	0	1	0.5	5.5
1	0	0	1	6
0.5	0	1	1	7.5

(4 ptos)

Encontramos un óptimo no entero.

$$P2)\ Max\ Z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4$$
$$s.a$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 4$$
$$x_2 = 1$$
$$0 \leq x_i \leq 1, i = 1,3,4$$

Por inspección, las soluciones factibles son:

x_1	x_2	x_3	x_4	Z
0	1	1	0	5
0	1	0	0	3

Por lo tanto tenemos una solución entera, actualizamos el incumbente, $Z^* = 5$
(4 ptos)

Ramificamos P1 en dos nuevos problema donde $x_1 = 0$ y $x_1 = 1$, respectivamente.

$$P11)\ Max\ Z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4$$
$$s.a$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 4$$
$$x_2 = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$0 \leq x_i \leq 1, i = 3,4$$

Las soluciones factibles son:

x_1	x_2	x_3	x_4	Z
0	0	1	1	7
0	0	0	1	5
0	0	1	0	2

Tenemos solución entera y actualizamos el incumbente, $Z^* = 7$
(4 ptos)

$$P12)\ Max\ Z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4$$
$$s.a$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 4$$
$$x_2 = 0$$
$$x_1 = 1$$
$$0 \leq x_i \leq 1, i = 3,4$$

Las soluciones factibles son:

x_1	x_2	x_3	x_4	Z
1	0	1	0.5	5.5
1	0	0	1	6
1	0	1	0	3

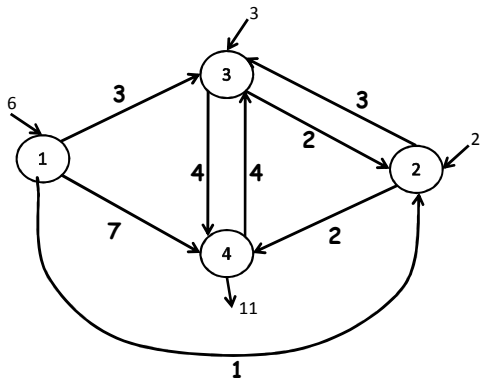
Encontramos solución entera, pero es menor que el incumbente, terminamos con la rama.
(4 ptos)

Finalmente encontramos el óptimo $x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 1; x_4 = 1$ y $Z^* = 7$

Total: 16 ptos, se descuentan 2 puntos por haber calculado mal algún incumbente pero tener el desarrollo correcto.

Parte 4 (22 pts).

a) (12 pts) Considere el problema de flujo a mínimo costo en la red que se muestra en la figura. Se indican en ella los costos por unidad de flujo en los arcos respectivos y la oferta (flecha entrante al nodo) o demanda (flecha saliente) según corresponda (específicamente, el nodo 1 tiene una oferta de 6, el nodo 2 tiene una oferta de 2, el nodo 3 tiene una oferta de 3 y el nodo 4 tiene una demanda de 11):



Suponga que la base óptima del problema correspondiente de flujo a costo mínimo está compuesta por los arcos: (1,2), (3,4) y (2,4).

i) **(3 pts)** Encuentre (como usted prefiera) los valores de los flujos en el árbol óptimo.

La base óptima debe cumplir las restricciones, es decir, que lo que sale del nodo menos lo que entra, debe ser igual a la oferta (o – demanda). Esto es:

$x_{1,2} = 6$ (nodo 1)
$x_{2,4} - x_{1,2} = 2$ (nodo 2)
$x_{3,4} = 3$ (nodo 3)
$-x_{2,4} - x_{3,4} = 11$ (nodo 4)

Por lo tanto los valores de los flujos son: $x_{1,2} = 6;\ x_{2,4} = 8; x_{3,4} = 3$

ii) **(3 pts)** Demuestre que efectivamente corresponde a una solución óptima del problema.

Para demostrar que es una solución óptima calculamos los costos reducidos de los arcos no básicos. Para esto de las variables básicas conocemos que:

$$\pi_1 - \pi_2 = c_{1,2} = 1$$
$$\pi_2 - \pi_4 = c_{2,4} = 2$$
$$\pi_3 - \pi_4 = c_{3,4} = 4$$

Fijamos $\pi_1 = 0$, entonces $\pi_2 = -1, \pi_3 = 1, \pi_4 = -3$
Calculamos los costos reducidos:

$$r_{1,3} = c_{1,3} - \pi_1 + \pi_3 = 3 - 0 + 1 = 4$$
$$r_{1,4} = c_{1,4} - \pi_1 + \pi_4 = 7 - 0 - 3 = 4$$
$$r_{2,3} = c_{2,3} - \pi_2 + \pi_3 = 3 + 1 + 1 = 5$$
$$r_{3,2} = c_{3,2} - \pi_3 + \pi_2 = 2 - 1 - 1 = 0$$
$$r_{4,3} = c_{4,3} - \pi_4 + \pi_3 = 4 + 3 + 1 = 8$$

Como todos los costos reducidos son mayores o iguales a cero entonces nos encontramos en el óptimo

iii) **(3 pts)**¿Qué reducción de costo tendría que tener el arco (1,4) para que cambie la solución óptima?

Para que cambie la solución necesitamos que $r_{1,4} < 0$, por lo tanto

$$r_{1,4} = c_{1,4} + \Delta c_{1,4} - \pi_1 + \pi_4 = 7 + \Delta c_{1,4} - 0 - 3 < 0$$
$$\Delta c_{1,4} < -4$$

Por lo tanto necesitamos una reducción mayor que 4

iv) (3 pts)¿En qué rango se puede mover el costo del arco (1,2) para mantener la solución optima?

Si cambiamos el costo de arco (1,2), tenemos que:

$$\pi_1 - \pi_2 = c_{1,2}$$
$$\pi_2 - \pi_4 = c_{2,4} = 2$$
$$\pi_3 - \pi_4 = c_{3,4} = 4$$

Fijando $\pi_1 = 0$, tenemos que: $\pi_2 = -c_{1,2}, \pi_3 = 2 - c_{1,2}, \pi_4 = -c_{1,2} - 2$

Para mantener el óptimo necesitamos que los costos reducidos sean mayores o iguales a cero. Esto es:

$$r_{1,3} = c_{1,3} - \pi_1 + \pi_3 = 3 - 0 + 2 - c_{1,2} \geq 0$$
$$r_{1,4} = c_{1,4} - \pi_1 + \pi_4 = 7 - 0 - c_{1,2} - 2 \geq 0$$
$$r_{2,3} = c_{2,3} - \pi_2 + \pi_3 = 3 + c_{1,2} + 2 - c_{1,2} \geq 0$$
$$r_{3,2} = c_{3,2} - \pi_3 + \pi_2 = 2 - 2 + c_{1,2} - c_{1,2} \geq 0$$
$$r_{4,3} = c_{4,3} - \pi_4 + \pi_3 = 4 + 2 + c_{1,2} - c_{1,2} + 2 - c_{1,2} \geq 0$$

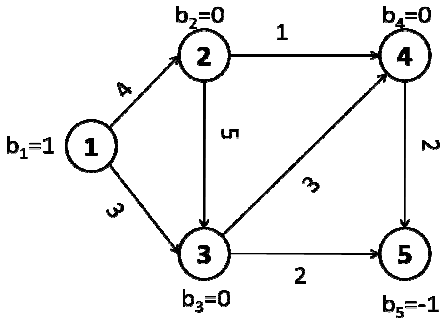
Esto es:

$$c_{1,2} \leq 5$$
$$c_{1,2} \leq 5$$
$$5 \geq 0$$
$$0 \geq 0$$
$$c_{1,2} \leq 8$$

Por lo tanto, tenemos que el costo de (1,2) se puede mover en el rango $c_{1,2} \leq 5$, para mantener el óptimo

b) (10 pts) Usted está en un parque de entretenciones y entra al "Camino de los Millones". Este juego consiste en una red de calles dirigidas como la que se muestra en la figura. Cada calle tiene un cierto

valor que usted recolectará cuando las recorra. Usted debe partir desde el inicio en el nodo 1 y llegar hasta el destino en el nodo 5, usando un camino formado por las calles de la red. Al final recolectará la cantidad total de valor de cada una de las calles por las que pasó. Una regla del juego es que, obviamente debe ser un camino: no podemos quedarnos dando vueltas dentro del juego y recolectar ganancias permanentemente.



En la figura se muestra el beneficio (valor) asociado a cada calle. A usted le interesa encontrar el camino dirigido desde el nodo 1 al nodo 5 que maximice sus beneficios y esto lo hará resolviendo un problema de "flujo a beneficio máximo", que consiste en poner una oferta de 1 en el nodo 1 y una demanda de 1 en el nodo 5 y resolviendo el correspondiente problema de flujo en el que en vez de minimizar costos va a maximizar beneficios. Considere la siguiente solución factible: $x_{13} = 1, x_{35} = 1$, $x_{ij} = 0$ para todos los demás arcos.

i) **(3 pts)** Sobre la base de la solución factible entregada, construya una solución básica factible al problema de "flujo a beneficio máximo" correspondiente.

Para construir la base factible necesitamos un ARBOL, por lo tanto a las dos variables distintas de cero que tenemos, debemos agregar 2 variables nulas. En esta caso, la base óptima será:

$$\{x_{13}, x_{12}, x_{34}, x_{35}\}$$

ii) **(5 pts)** Determine si esta solución es óptima o no y en caso de no serlo, haga una iteración del algoritmo SIMPLEX especializado a redes para este problema en cuestión. ¿Es su siguiente solución óptima?

Si cambiamos el problema a uno equivalente con todos sus contos negativos, entonces de las variables básicas sabemos que:

$$\pi_1 - \pi_2 = -c_{1,2} = -4$$
$$\pi_1 - \pi_3 = -c_{1,3} = -3$$
$$\pi_3 - \pi_4 = -c_{3,4} = -3$$
$$\pi_3 - \pi_5 = -c_{3,5} = -2$$

Para resolver debemos definir que $\pi_1 = 0$. Resolviendo el sistema:

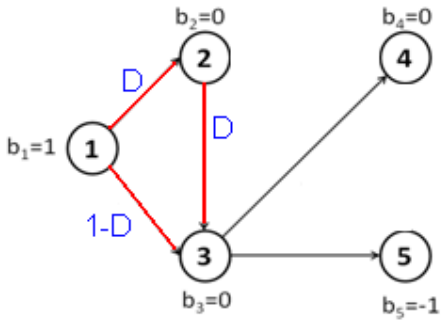
$\pi_2 = 4, \pi_3 = 3, \pi_4 = 7, \pi_5 = 5$

Como estamos resolviendo el equivalente de minimización, calculamos que todos los costos reducidos sean positivos o nulos.

$$r_{2,3} = -c_{2,3} - \pi_2 + \pi_3 = -5 - 4 + 3 = -6$$
$$r_{2,4} = -c_{2,4} - \pi_2 + \pi_4 = -1 - 4 + 7 = 2$$
$$r_{4,5} = -c_{4,5} - \pi_4 + \pi_5 = -2 - 7 + 5 = 0$$

Por lo tanto, no estamos en el óptimo. Debemos iterar, entra el arco (2,3)

Para definir quién sale utilizamos el siguiente diagrama:



Entonces el valor de $D = 1$, entonces la solución es:$x_{12} = 1; x_{23} = 1; x_{34} = 0; x_{35} = 1;$

Volvemos a calcular los costos reducidos para este caso:

$$\pi_1 - \pi_2 = -c_{1,2} = -4$$
$$\pi_2 - \pi_3 = -c_{2,3} = -5$$
$$\pi_3 - \pi_4 = -c_{3,4} = -3$$
$$\pi_3 - \pi_5 = -c_{3,5} = -2$$

Con $\pi_1 = 0$. Resolviendo el sistema: $\pi_2 = 4, \pi_3 = 9, \pi_4 = 12, \pi_5 = 11$

Los costos reducidos son:

$r_{1,3} = -c_{2,3} - \pi_2 + \pi_3 = -3 - 4 + 9 = 2$
$r_{2,4} = -c_{2,4} - \pi_2 + \pi_4 = -1 - 4 + 12 = 7$
$r_{4,5} = -c_{4,5} - \pi_4 + \pi_5 = -2 - 12 + 11 = -3$

Por lo tanto, esta solución tampoco es óptima.

Parte 5. (18 pts)
Una empresa produce *K* productos diferentes en *I* fábricas. Estos son enviados a *J* ciudades donde son demandados. Considere los siguientes datos, para k =1,...,*K*, i=1,...,*I*, j=1,...,*J*:

v_{ik} = costo variable de producir una unidad del producto k en la planta i
c_{ijk} = costo de transportar una unidad del producto k de la fábrica i a la ciudad j
M_{ik} = cantidad máxima del producto k que se puede producir en la fábrica i.
Q_i = total de horas disponibles en la planta i para producir los productos.
q_{ik} = cantidad de horas de la planta i que se usan en producir una unidad del producto k.
d_{jk} = demanda por el producto k en la ciudad j.

a) (10 pts) Escriba un modelo de programación lineal que determine las cantidades óptimas a producir de cada producto en cada planta y enviadas a cada ciudad de modo tal que se cumpla con la demanda, no se supere la capacidad productiva y se minimicen los costos totales de producción y transporte.

Las variables de decisión para este problema pueden ser:

x_{ijk} , la cantidad de producto *k* a transportar desde la planta *i* a la ciudad *k*.

z_{ik} , la cantidad del producto *k* producida en la planta *i*.

2,5 ptos. por definición de variables.

El modelo entonces es:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} c_{ijk}x_{ijk} + \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} v_{ik}z_{ik}$$ 2,5 ptos.

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^{J} x_{ijk} = z_{ik} \qquad \forall i,k$$ 1 pto.

$$\sum_{k=1}^{K} q_{ik}z_{ik} \le Q_i \qquad \forall i$$ 1 pto.

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ijk} = d_{jk} \qquad \forall j,k$$ 1 pto.

$$z_{ik} \le M_{ik} \qquad \forall i,k$$ 1 pto.

$$x_{ijk} \ge 0, z_{ik} \ge 0 \qquad \forall i,j,k$$ 1 pto.

b) (8 pts) Suponga que ahora se le dice que si el producto k se fabrica en la planta i, entonces se debe producir en una cantidad *mínima* m_{ik}. Escriba los elementos adicionales que debe agregar a su modelo de la parte a) para representar esta situación.

Para esto será necesario agregar un conjunto de variables binarias,

y_{ik} igual a 1 si se fabrica el producto *k* en la planta *i* y 0 si no. 2 ptos.

Con esto se puede representar la situación de producción mínima agregando dos conjunto de restricciones de la forma:

$$z_{ik} \le M_{ik}y_{ik}$$ 1,5 ptos.

$$z_{ik} \ge m_{ik}y_{ik}$$ 1,5 ptos.

La primera de ellas puede reemplazar al cuarto conjunto de restricciones en el modelo, las de capacidad individual por productos.

Además de eso, es necesario relajar la primera restricción a:

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ijk} \le z_{ik}$$ 3 ptos.

Esto es necesario ya que las producciones mínimas podrían obligar a fabricar más de lo que realmente se demanda.