PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2015
Profesores: P.Álvarez - M.Fuentes
J.Vera - A.Cataldo - D.Pozo

Tarea 1

Fecha de Entrega: 20 de Abril.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea debe ser desarrollada individualmente.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **nombre, sección**[1] **y número de alumno con letra clara y legible**.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día Lunes 20 de Abril a las 13:00 horas. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaria del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a la sección a la que están inscritos.
- ◇ La copia o intento de copia será castigada con la **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso.

Problema 1. (15 puntos)

(a) (4 puntos) Sea[2] $\delta \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ dado, y considere el siguiente problema de optimización:

$$
P) \quad \begin{array}{rrcl} \text{máx} & x + \delta y & & \\ \text{s.a.} & x + y & \geq & 1 \\ & y - 2x & \leq & 1 \\ & x + y & \leq & 4 \\ & y + 2x & \leq & 7 \\ & |x - 2| & \leq & 1 \\ & x, y & \geq & 0 \end{array}
$$

i) (1 punto) Demuestre la existencia del óptimo.

ii) (1 punto) Represente gráficamente el conjunto factible.

iii) (1 punto) Para el caso $\delta = 1$, grafique las curvas de nivel de la función objetivo y encuentre explícitamente el conjunto solución. Justifique geométricamente su respuesta.

iv) (1 punto) Encuentre explícitamente $S(P)$ (el conjunto solución de P) para el caso $\delta \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) - \{1\}$. Justifique geométricamente su respuesta.

b) (2 puntos) Describa en no más de dos líneas en qué situación se encontraría si llegara a la siguiente iteración al aplicar el algoritmo Simplex en un problema de minimización, en donde la primera fila de la tabla corresponde al vector de costos.

[1] La sección que deben escribir es aquella a la que están inscritos y no a la que asisten

[2] Recordemos que la notación (a, b) es un intervalo abierto.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
2	0	-1	1	0	0	2	1
-2	0	-1	1	0	1	-1	1
-1	1	0	-1	0	0	1	1
-1	0	0	1	1	0	-1	2

c) (3 puntos) Responda breve y justificadamente cada una de las siguientes preguntas.

i) (1 punto) Si la forma estándar de un problema de optimización lineal en variables continuas se definiese como máximo en lugar de mínimo, ¿qué cambios se deberían realizar en los criterios del algoritmo de Simplex?

ii) (2 puntos) Suponga que usted está resolviendo, utilizando Simplex, un problema que presenta el fenómeno de sobredeterminación. ¿En qué paso del método se daría cuenta de la existencia de dicho fenómeno, y cómo?

d) (2 puntos) Considere un poliedro en forma estándar $P = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ Ax = b\right\}$, donde las filas de la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ son linealmente independientes. Suponga que todas las soluciones básicas factibles son no degeneradas. Sea $x \in P$ tal que exactamente m de sus componentes son positivas. Muestre que x es una solución básica factible. ¿Qué ocurre si eliminamos el supuesto de no degeneradas?

e) (4 puntos) Responda breve y justificadamente cada una de las siguientes preguntas.

i) (2 puntos) Sean $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo, $f_1, f_2 : S \to \mathbb{R}$ funciones convexas y $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. Pruebe que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ es una función convexa.

ii) (2 puntos) Considere los escalares a, b y λ. Pruebe que si estos escalares se definen de manera de que $a, b \geq 0$ y $\lambda \in [0, 1]$, entonces siempre se cumple que:

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1 - \lambda)b$$

Hint: Considere que la función $f(x) = -\ln(x)$ es convexa (aproveche de demostrarlo como ejercicio).

Solución Problema 1.

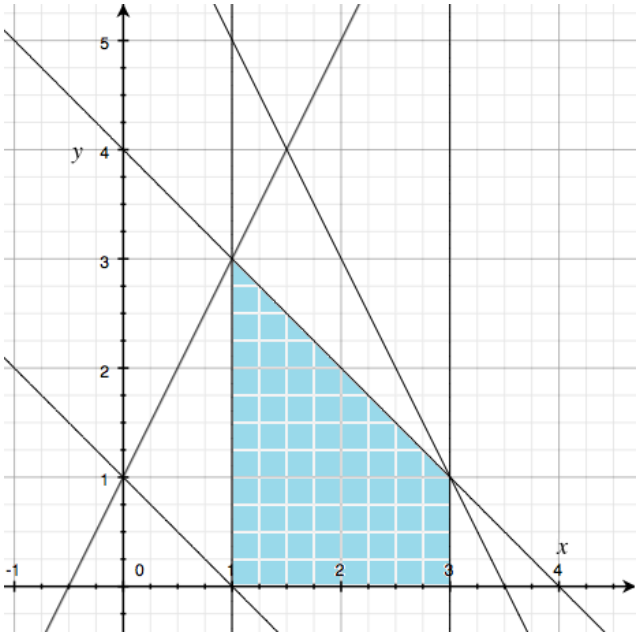
a) i) Lo primero que podemos notar, es que el dominio es no vacío, dado que el punto (1,0) cumple con todas las restricciones.

Por otro lado, la función objetivo es continua.

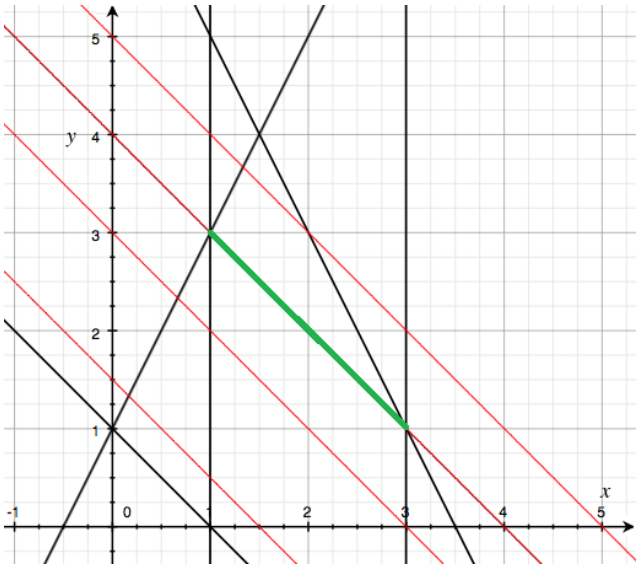
Además, las restricciones son del tipo $\leq$ o $\geq$, por lo que es cerrado. Paralelamente, podemos considerar la naturaleza de variables y la tercera restricción del problema para notar que $0 \leq x \leq 4$ y que $0 \leq y \leq 4$, lo que indica que el espacio es acotado. Por lo tanto, compacto.

Así, podemos concluir que, por B-W, existe al menos una solución al problema.

ii) La imagen a continuación representa las restricciones de manera gráfica.



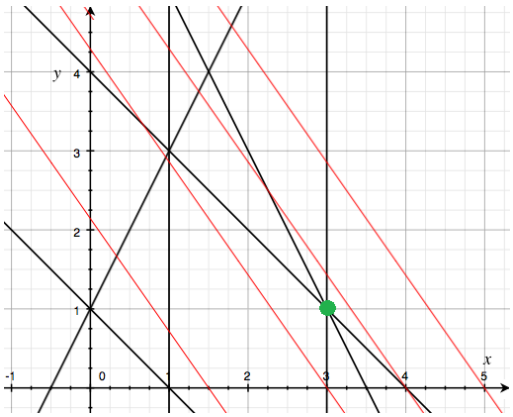
iii) La imagen a continuación tiene destacadas en rojo cuatro curvas de nivel: $\frac{3}{2}, 3, 4$ y 5. Con ella, podemos ver que la mejor curva de nivel que incluye algún punto del espacio de soluciones factibles es aquella con valor 4. En este caso, la curva de nivel está sobre la recta relacionada con la tercera restricción, incluyendo los dos vértices (3,1) y (3,3). Por lo tanto, la solución es múltiple e incluye a todo el siguiente segmento:



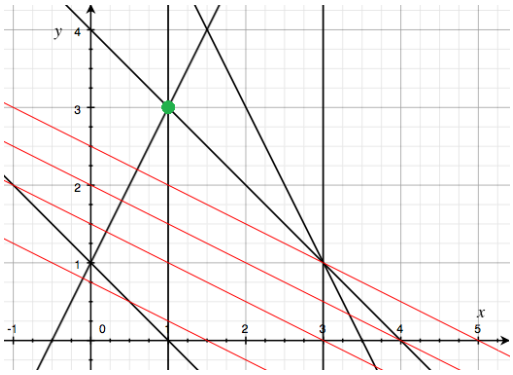
$$S(P) = \lambda(3,1) + (1-\lambda)(1,3), \qquad \lambda \in [0,1]$$

iv) Dado que la multiplicidad de soluciones se encuentra en $\delta = 1$, podemos dividir el problema en dos casos:

- $\diamond$ $\delta \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$: En este caso, la solución se encontrará en el punto (3,1), otorgando un valor objetivo de $3 + \delta$.



◇ $\delta \in]1, +\infty[$: En este caso, la solución se encontrará en el punto (1,3), otorgando un valor objetivo de $1 + 3\delta$.



b) Dado que la variable x_3 tiene el menor costo reducido negativo, es la variable que entra. Sin embargo, el criterio de salida no tiene elementos para comparar, por lo que nos encontramos en un problema no acotado.

c) i) En este caso, cambia el criterio de optimalidad, que cambiaría su condición de optimalidad de $\bar{c}_j \geq 0$ por $\bar{c}_j \leq 0$. Así, el criterio de entrada, si estaba siendo considerado como $\min_{\bar{c}_j < 0}\{\bar{c}_j\}$, debería considerarse como $\min_{\bar{c}_j > 0}\{\bar{c}_j\}$ (si estaba siendo considerado como éntra el que más invalida el criterio de optimalidad, se mantiene igual).

ii) El algoritmo Simplex nos muestra este fenómeno al momento de determinar la variable que debe abandonar la base. Esto se aprecia cuando en la aplicación del criterio se produce un empate, y cualquiera entre 2 o más variables puede ser escogida para abandonar la base.

d) Como $x \in P$, cumple que $Ax = b$, luego $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = b$.

Sean $\{B(1), \ldots, B(m)\}$ los índices de las componentes positivas de x.

Luego, $\sum_{j=1}^{m} A_{B(j)} x_{B(j)} = b$ es un sistema cuadrado con solución única, lo que implica que las columnas de $A_{B(j)}$ son linealmente independientes.

Si las m columnas son l.i., entonces las m filas también lo son, por lo que se tienen m restricciones activas l.i.. Luego, x es una solución básica factible.

Si eliminamos el supuesto de no degeneradas, el punto x no será necesariamente una solución básica factible, ya que puede ocurrir que un punto interior tenga m componentes positivas. Basta considerar el punto degenerado y moverse hacia el interior del poliedro aumentando las variables básicas que son nulas. Con esto, se tienen m componentes positivas en un punto interior.

e) i) Sea $f := \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, y sean $x, y \in S$. Queremos demostrar que $f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) = \alpha_1 f_1\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) + \alpha_2 f_2\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big)$$

Dado que f_1 y f_2 son ambas convexas en sus dominios.

$$\begin{aligned}
&\leq \alpha_1\big(\lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y)\big) + \alpha_2\big(\lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(y)\big) \\
&= \lambda\big(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)\big) + (1-\lambda)\big(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)\big) \\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)
\end{aligned}$$

ii) Dado que la función $f(x) = -\ln(x)$ es convexa, podemos asumir que

$$\begin{aligned}
f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) &\leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \\
-\ln\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) &\leq -\lambda \ln(a) - (1-\lambda)\ln(b) \\
&= -\big(\ln(a^\lambda) + \ln(b^{1-\lambda})\big) \\
&= -\ln(a^\lambda b^{1-\lambda}) \quad / \cdot -1 \\
\ln(\lambda a + (1-\lambda)b) &\geq \ln(a^\lambda b^{1-\lambda})
\end{aligned}$$

Como la función exponencial es creciente, mantiene la desigualdad. Así, se llega a lo que se busca demostrar.

$$\lambda a + (1-\lambda)b \geq a^\lambda b^{1-\lambda}$$

Problema 2. (15 puntos)

a) (6 puntos) Transforme los siguientes problemas a su forma estándar:

i) (3 puntos)

$$P) \quad \begin{array}{lrcl} \text{mín} & z = c^T x + d^T y & & \\ \text{s.a.} & Ax & = & b \\ & Ay & \geq & b \\ & y & \geq & 0 \\ & x & \in & \mathbb{R}^n \end{array}$$

ii) (3 puntos)

$$P) \quad \begin{array}{lrcl} \text{mín} & \max\limits_{1\leq i\leq m} \{a_i^T x - b_i\} & & \\ \text{s.a.} & \big|d^T x\big| & \leq & 1 \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Donde $a_i, d \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}^+$.

b) (9 puntos) Considere la función $f(x,y) = x^2 - 8x + y^2 - 8y$, y el problema de minimización

$$P) \quad \begin{array}{lrcl} \min\limits_{x,y,z} & f(x,y) & & \\ \text{s.a.} & z(2x+y-3) + (1-z)(x+2y-3) & \leq & 0 \\ & x, y & \geq & 0 \\ & z & \in & \{0,1\} \end{array}$$

i) (1 punto) Demuestre que la función f es convexa.

ii) (1 punto) Demuestre utilizando los teoremas de existencia vistos en clases que el problema (P) posee solución.

iii) (1 puntos) Grafique las curvas de nivel $-32, -14$ y 0 de la función f. Haga un esquema de las curvas de nivel de $f(x,y) = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

iv) (2 puntos) Considere

$$\Omega(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : z(2x+y-3) + (1-z)(x+2y-3) \leq 0, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Grafique $\Omega := \Omega(1) \cup \Omega(0)$.

v) (2 puntos) Demuestre que (P) es un problema equivalente a

$$\text{mín}\{f(x,y) : (x,y) \in \Omega\}$$

vi) (2 puntos) Resuelva el problema de optimización gráficamente y también analíticamente. parametrice el borde del conjunto factible si es necesario.

Solución Problema 2.

a) i) Dado que x es una variable libre, se hace un cambio de variables $x = u - v$, en que $u, v \geq \vec{0}$. Así, la forma estándar queda:

$$P) \quad \begin{array}{rrcl} \text{mín} & z = c^T u - c^T v + d^T y & & \\ \text{s.a.} & Au - Av & = & b \\ & Ay - h & = & b \\ & y & \geq & 0 \\ & u, v & \geq & 0 \end{array}$$

ii) Primero, el problema equivalente sería:

$$P) \quad \begin{array}{rrcll} \text{mín} & & \mu & & \\ \text{s.a.} & a_i^T x - b_i & \leq & \mu & \forall i = 1, \ldots, m \\ & d^T x & \leq & 1 & \\ & d^T x & \geq & -1 & \\ & x & \geq & 0 & \\ & \mu \in \mathbb{R} & & & \end{array}$$

Luego, su forma estándar será:

$$P) \quad \begin{array}{rrcll} \text{mín} & & \alpha - \beta & & \\ \text{s.a.} & a_i^T x - b_i + h_i - \alpha + \beta & = & 0 & \forall i = 1, \ldots, m \\ & d^T x + g & = & 1 & \\ & -d^T x + j & = & 1 & \\ & x & \geq & 0 & \\ & h_i & \geq & 0 & \forall i = 1, \ldots, m \\ & g, j & \geq & 0 & \\ & \alpha, \beta & \geq & 0 & \end{array}$$

b) i) Notamos que

$$f(x,y) = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 - 32 = (x-4)^2 + (y-4)^2 - 32$$

Esto es una función $g_1(x,y) = x - 4$ y una función $g_2(x,y) = y - 4$, ambas convexas. A cada una se le ha compuesto con la función $h(x) = x^2$, que también es convexa, por lo que $h(g_1(x,y)) = (x-4)^2$ es convexo, así como lo es también $h(g_2(x,y)) = (y-4)^2$.

Por último, estamos sumando dos funciones convexas y restándole un escalar, lo que resulta convexo.

ii) f es una función continua (suma y multiplicación de continuas). La función

$$g(x, y, z) = z(2x + y - 3) + (1 - z)(x + 2y - 3)$$

es continua (álgebra de continuas). A su vez, basta ver el símbolo de las restricciones para verificar que el conjunto factible es cerrado.

Para ver que el conjunto también es acotado, notamos que $0 \leq x \leq 3$ y $0 \leq y \leq 3$. En efecto:

- ◇ Si $z = 1$, $2x + y \leq 3$, lo que implica que $x \leq \frac{3}{2}$, $y \leq 3$, y $x \geq 0, y \geq 0$.
- ◇ Análogamente, si $z = 0$, entonces $x + 2y \leq 3$. Esto indica que $x \leq 3$ e $y \leq \frac{3}{2}$, además de su naturaleza.

Por lo tanto, en cualquier caso, $(x, y, z) \in [0, 3] \times [0, 3] \times [0, 1]$.

Finalmente, notamos que el conjunto factible es no vacío dado que, en particular, (0,0,0) satisface las restricciones.

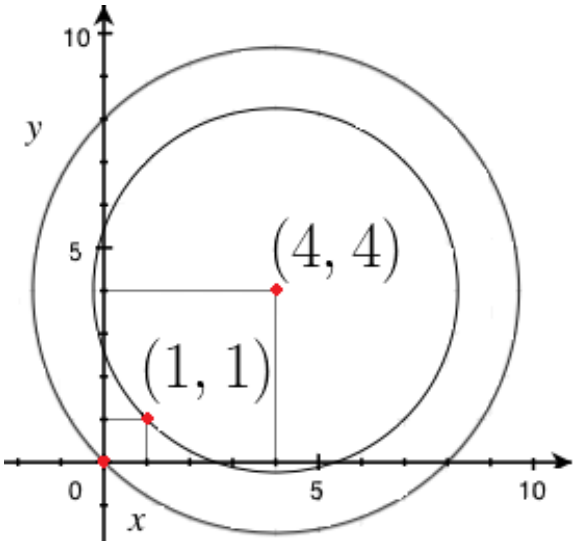
En consecuencia, y por el teorema de B-W, (P) posee solución.

iii) Notamos que

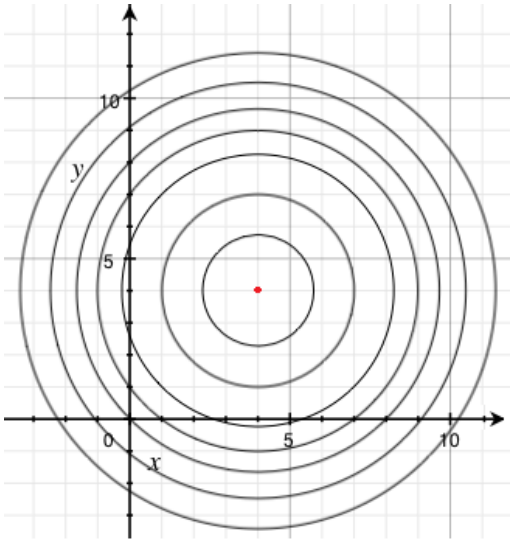
$$f(x, y) = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 - 32 = (x - 4)^2 + (y - 4)^2 - 32$$

Luego, la curva de nivel $f(x, y) = \alpha$ corresponde a $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = \alpha - 32$.

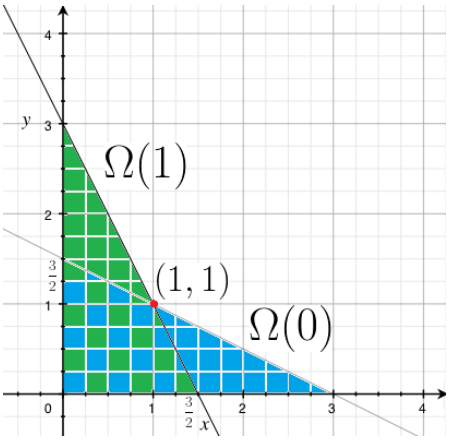
- ◇ Si $\alpha < -32$, la curva de nivel es un conjunto vacío.
- ◇ Si $\alpha = -32$, la curva de nivel es el punto (4,4).
- ◇ Si $\alpha = -14$, es el círculo de radio $\sqrt{18} = 9\sqrt{2}$, centrado en el punto (4,4), y pasa por (1,1).
- ◇ Si $\alpha = 0$, es el círculo de radio $4\sqrt{2}$ centrado en (4,4) que pasa por (0,0).



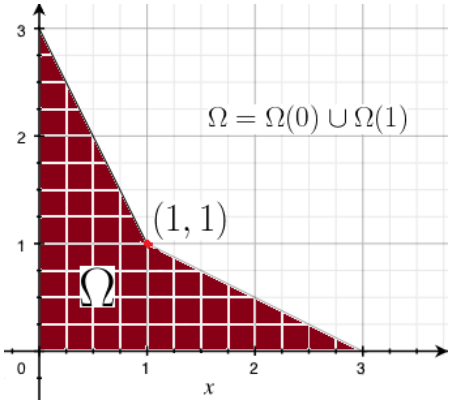
Ahora, las curvas de nivel generan círculos concéntricos centrados en (4,4) de radio $\sqrt{\alpha + 32}$ para $\alpha \geq -32$.:



iv) A continuación se muestran ambos conjuntos y el conjunto Ω.



(a) Dos conjuntos $\Omega(0)$ y $\Omega(1)$



(b) El conjunto Ω

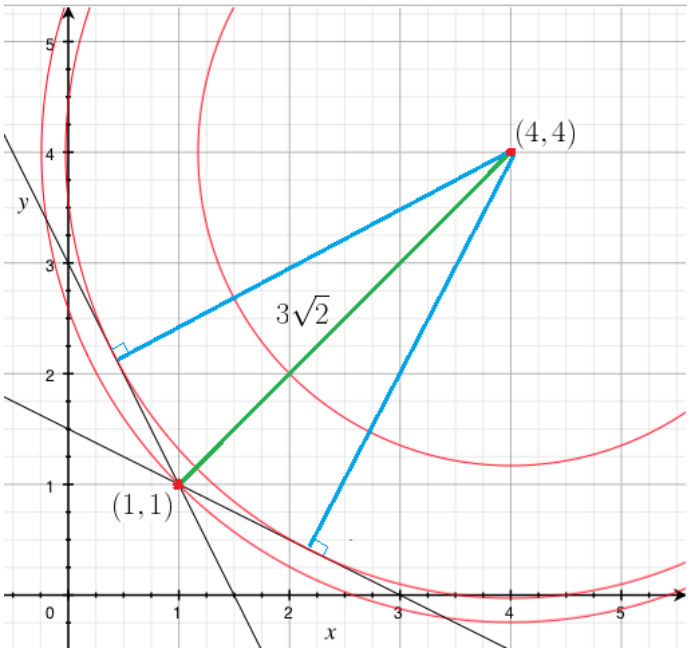
v) Si (x^*, y^*, z^*) es solución de P, entonces, o bien $z^* = 0 \vee z^* = 1$.
Luego $(x^*, y^*) \in \Omega$ (es factible).
Además, por optimalidad, $f(x^*, y^*) \leq f(x, y)$, $\forall (x, y, z)$ factible para (P). Así, dado que $z \in \{0, 1\} \rightarrow (x, y) \in \Omega$ y, por lo tanto,

$$f(x^*, y^*) \leq f(x, y), \forall (x, y) \in \Omega$$

de donde se deduce la optimalidad.
Por otra parte, si (x^*, y^*) es solución de mín$\{f(x, y) : (x, y) \in \Omega\}$, se sigue que $(x^*, y^*) \in \Omega(0)$ o bien $(x^*, y^*) \in \Omega(1)$.
En cualquier caso (para todo z^* adecuado), la tupla (x^*, y^*, z^*) es factible para (P). Se sigue que $(x, y) \in \Omega(1)$ o bien $(x, y) \in \Omega(0)$ de donde por optimalidad

$$f(x^*, y^*) \leq f(x, y)$$

vi) Gráficamente, el óptimo se encuentra en alguno de las dos rectas (por simetría, hay dos posibles puntos solución).



Consideremos $z = 1$, es decir, $2x + y = 3 \to y = 3 - 2x$. Reemplazando en la función objetivo:

$$\begin{aligned} f(x, 3-2x) &= (x-4)^2 + (3-2x-4)^2 - 32 \\ &= (x-4)^2 + (2x+1)^2 - 32 \end{aligned}$$

Para encontrar el máximo:

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } 2(x-4) + 2 \cdot 2(2x+1) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x - 4 + 4x + 2 = 0$$

$$\to x - 4 + 2(2x+1) = x - 4 + 4x + 2 = 0$$

$$\to 5x = 2 \to x = \frac{2}{5} \geq 0$$

$$\to y = \frac{15-4}{5} = \frac{11}{5}$$

$$f\left(\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right) = f\left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

En forma análoga, los puntos $\left(\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$ y $\left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$ son factibles para (P) y optimales.

Problema 3. (15 puntos)

a) (8 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización:

$$P) \quad \begin{array}{rrcl} \text{máx} & c_1x_1 + c_2x_2 & & \\ \text{s.a.} & -3x_1 + 5x_2 & \leq & 10 \\ & 3x_1 + 4x_2 & \leq & 35 \\ & -x_1 + x_2 & \geq & -7 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

i) (1 punto) Haga un dibujo de la región factible para obtener la intuición geométrica del problema.

ii) (1 punto) Demuestre la existencia del óptimo, sin calcularlo explícitamente.

iii) (6 puntos) Considere $c_1 = 1, c_2 = \frac{4}{3}$.

iii.1) (1 puntos) Argumente por qué el óptimo no se alcanza en el interior[3] del conjunto factible.

iii.2) (1 puntos) Analizando los puntos de la frontera (hágalo gráficamente), encuentre el o los óptimos del problema.

iii.3) (3 puntos) Ahora verifique matemáticamente sus respuestas anteriores, resolviendo el problema utilizando el método de Simplex en forma matricial algebraica. Comience iterando desde el punto (0,0).

iii.4) (1 puntos) ¿En cuánto puede variar el coeficiente c_1 y el coeficiente c_2, por separado, para que la solución sea la misma?

b) (7 puntos) Considere el siguiente problema de optimización no lineal.

$$P) \quad \begin{array}{lrcl} \text{mín} & x_1 + \text{máx}\{x_2, x_3\} & & \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 + x_3 & = & 8 \\ & x_3 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

i) (1 punto) Demuestre que este problema tiene solución.

ii) (1 punto) Muestre que el punto (8,0,0) es un vértice del conjunto factible.

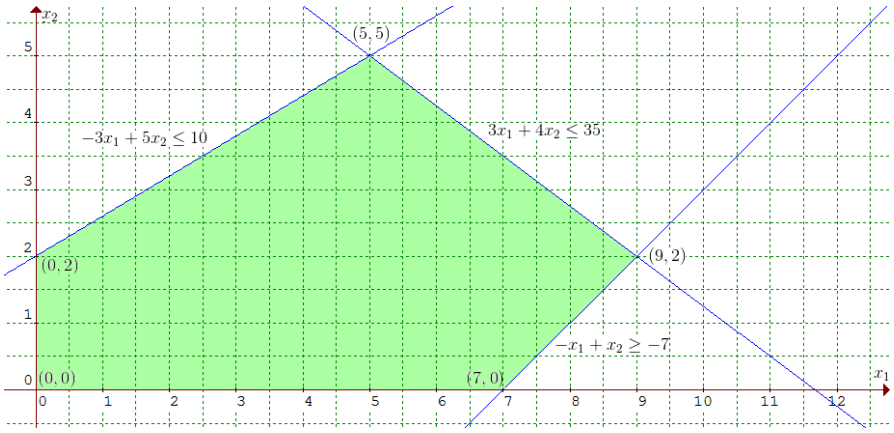
iii) (1 punto) Escriba una formulación equivalente del problema anterior como programación lineal en la forma estándar.

iv) (2 puntos) Para el problema lineal encontrado, indique a qué base corresponde el vértice (8,0,0).

v) (2 puntos) Resuelva este programación lineal utilizando el método de *Tableau* de Simplex, partiendo desde la base encontrada en el punto anterior. Discuta el resultado.

Solución Problema 3.

a) i) El gráfico a continuación presenta coloreado el espacio de soluciones factibles.



ii) La función objetivo es continua. Por otro lado, $(0, 0)$ pertenece al espacio de soluciones factibles. Por otro lado, el espacio es cerrado debido al símbolo de sus restricciones, y las variables están acotadas. Esto se puede ver con la restricción 2 y la naturaleza de variables:

$$0 \leq x_1 \leq \frac{35}{3} \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{35}{4}$$

Luego, se cumplen las condiciones de B-W para corroborar que el óptimo existe.

[3]Entiéndase como un punto que no activa ninguna restricción del problema

iii)iii.1) Sea P el espacio de soluciones factibles del problema P), que es de maximización. Digamos que $\bar{x} \in P$ es punto interior y solución óptima de P). Entonces se tiene que $f(\bar{x}) \geq f(x)$, $\forall\, x \in P$, y que $\nabla f() \neq \vec{0}$, dirección de máximo descenso es una dirección factible para $\bar{x}$. Consideremos un punto $x^* = \bar{x} - \varepsilon \cdot \nabla f$ con $\varepsilon > 0$. Luego, por construcción $f(x^*) > f(\bar{x})$, con lo cual se produce una contradicción, por lo que $\bar{x}$ no puede ser la solución óptima de P).

iii.2) Los puntos frontera son los siguientes, y se muestran con sus valores respectivos de función objetivo:

x_1	x_2	$z(x_1, x_2)$
0	0	0
0	2	2
7	0	$^{28}/_{3}$
9	2	$^{35}/_{3}$
5	5	$^{35}/_{3}$

Notamos que hay dos puntos que corresponden valor máximo de función objetivo. Luego, estos dos puntos, y todos los contenidos entre ellos, corresponden a la solución del problema:

$$S(P) = \lambda(9,2) + (1-\lambda)(5,5) \qquad \lambda \in\ [0,1]$$

iii.3) Primero, transformemos el problema a su forma estándar:

$$\text{mín}\, z = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

s.a.

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Dada la estructura del problema se puede considerar como punto factible inicial la solución $x_1 = x_2 = 0$. En este caso, las variables básicas son x_3, x_4 y x_5, y el problema matricialmente queda tal como fue recién mostrado, en que corresponden a:

$$\text{mín}\, z = c_R^T \cdot x_R + c_B^T \cdot x_B$$

s.a.

$$Rx_R + Bx_B = b$$

Veamos si esta solución es óptima. Para ello, se deben calcular los costos reducidos como $\bar{c_R} = c_R^T - c_B^T B^{-1} R$ y si todos resultan positivos entonces estamos en el óptimo del problema. Calculemos:

$$\bar{c_R} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{R} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \not\geq \vec{0}$$

Luego, la solución no es óptima, entonces se debe empezar a iterar.

Iteración 1:

- ◇ Criterio de entrada.
  Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, el menor costo reducido es $-\frac{4}{3}$ y corresponde a la variable x_2, luego esta variable ingresa a la base.
- ◇ Criterio de salida.
  Para ver quien sale de la base, es necesario obtener los valores de $\bar{R}$ y de $\bar{b}$, para ello:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= B^{-1}R \\ \bar{b} &= B^{-1}b \end{aligned}$$

En este caso se tiene que $B = I \mapsto B^{-1} = I$, luego:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= B^{-1}R = R \\ \bar{b} &= B^{-1}b = b \end{aligned}$$

utilizando estos valores se tiene:

$$min_{\bar{a_{i2}}>0}\left\{\frac{\bar{b}}{\bar{a_{i2}}}\right\} = \left\{\frac{10}{5}, \frac{35}{4}, .\right\} = 2 \mapsto x_3$$

entonces x_3 sale de la base.

◇ Criterio de optimalidad.
Para poder evaluar la optimalidad de esta nueva solución, se debe obtener su forma canónica (FC).

$$\text{mín } z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

s.a.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, con esta información veamos si es óptima esta solución:

$$\bar{c_R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} & \frac{4}{15} \end{pmatrix} \ngeq \vec{0}$$

Luego, la solución no es óptima, entonces se debe empezar a iterar.

Iteración 2:

◇ Criterio de entrada.
Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, el menor costo reducido es $\frac{9}{5}$ y corresponde a la variable x_1, luego esta variable ingresa a la base.

◇ Criterio de salida.
Para ver quien sale de la base, es necesario obtener los valores de $\bar{R}$ y de $\bar{b}$, para ello:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= B^{-1}R \\ \bar{b} &= B^{-1}b \end{aligned}$$

En este caso, se tiene

$$\bar{R} = B^{-1}R = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{27}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 35 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix}$$

utilizando estos valores se tiene:

$$min_{\bar{a_{i1}}>0}\left\{\frac{\bar{b}}{\bar{a_{i1}}}\right\} = \text{mín}\left\{\cdot, \frac{27}{27/5}, \frac{9}{2/5}\right\} = \{5\} \mapsto x_5$$

entonces x_4 sale de la base.

◇ Criterio de optimalidad.
Para poder evaluar la optimalidad de esta nueva solución, se debe obtener su FC.

$$\text{mín } z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$s.a. \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{4}{27} & \frac{5}{27} & 0 \\ \frac{7}{27} & -\frac{2}{27} & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, con esta información veamos si es óptima esta solución:

$$\bar{c_R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{4}{27} & \frac{5}{27} & 0 \\ \frac{7}{27} & -\frac{2}{27} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Luego, la solución encontrada es óptima.
Entonces los valores de las variables básicas serán:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{4}{27} & \frac{5}{27} & 0 \\ \frac{7}{27} & -\frac{2}{27} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Las variables no básicas son cero, y el valor de la función objetivo:

$$z = 1 \cdot x_1 + \frac{4}{3} \cdot x_2 = 1 \cdot 5 + \frac{4}{3} \cdot 5 = \frac{35}{3}$$

Efectivamente, podemos notar que, como $\bar{c}_3 = 0$, la solución es múltiple. Si se hace a x_3 entrar a la base, e iteramos, lograremos llegar al punto (9,2). Así, la solución es efectivamente

$$S(P) = \lambda(9,2) + (1-\lambda)(5,5) \qquad \lambda \in [0,1]$$

iii.4) Como la estructura de la solución considera a dos bases como óptimas, que se encuentran en distintas coordenadas, c_1 y c_2 no pueden variar en nada para que la solución sea la misma. Si varía alguno de los dos, la solución deja de ser múltiple y comienza a ser sólo alguno de los puntos.

b) i) El espacio de soluciones es un conjunto acotado, dado que $(x_1, x_2, x_3) \in [0,8] \times [0,8] \times [0,4]$, considerando ambas restricciones. Además, admite al punto (8,0,0), por lo que es no-vacío.

Por otro lado, la función máximo está compuesta de dos funciones continuas, por lo que es continua [4].

Así, por B-W, podemos asegurar existencia de soluciones.

ii) La primera restricción cumple que $8 + 0 + 0 = 8$. La segunda restricción cumple que $0 \leq 4$, y las tres coordenadas son positivas. Luego, el punto (8,0,0) pertenece al espacio de soluciones factibles.

Ahora, para que sea vértice, al menos tres restricciones deben estar activas. Podemos apreciar que la primera se encuentra activa, debido a su naturaleza. Además de que la naturaleza de las variables x_2 y x_3 también se encuentran activas. Por lo tanto, efectivamente el punto (8,0,0) es un vértice.

[4] En el límite en que cambia de una a la otra, estas deben ser iguales, lo que asegura continuidad

iii) Lo primero es transformarlo en un problema lineal[5], para luego transformarlo a estándar.

$$P) \quad \begin{array}{rrcl} \text{mín} & x_1 + \mu_1 - \mu_2 & & \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 + x_3 & = & 8 \\ & x_3 + h_3 & = & 4 \\ & x_2 + h_1 - \mu_1 + \mu_2 & = & 0 \\ & x_3 + h_2 - \mu_1 + \mu_2 & = & 0 \\ & x_1, x_2, x_3, h_1, h_2, h_3, \mu_1, \mu_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Notar que esta modelación podría haber sido distinta si se notaba que $\text{máx}\{x_2, x_3\} \geq 0$ debido a la naturaleza de las variables x_2 y x_3. Esto permitía asumir que $\mu = \text{máx}\{x_2, x_3\} \geq 0$.

iv) El punto corresponde a $(x_1, x_2, x_3, h_1, h_2, h_3, \mu_1, \mu_2) = (8, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0)$. Luego, la base y la no-base corresponden a

$$B = \{x_1, h_3, h_1, h_2\}$$

$$R = \{x_2, x_3, \mu_1, \mu_2\}$$

v) Comenzamos armando el tableau, e iterando:

x_1	h_3	h_1	h_2	x_2	x_3	μ_1	μ_2	z
1	0	0	0	0	0	1	−1	·
1	0	0	0	1	1	0	0	8
0	1	0	0	0	1	0	0	4
0	0	1	0	1	0	−1	1	0
0	0	0	1	0	1	−1	1	0

Pivoteando:

x_1	h_3	h_1	h_2	x_2	x_3	μ_1	μ_2	z
0	0	0	0	−1	−1	1	−1	−8
1	0	0	0	1	1	0	0	8
0	1	0	0	0	1	0	0	4
0	0	1	0	1	0	−1	1	0
0	0	0	1	0	1	−1	1	0

Criterio de entrada: Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, hay dos variables con el mínimo costo reducido negativo. Arbitrariamente, escogemos $\bar{c}_{x_2} = -1$ como el menor, que corresponde a la variable x_2, luego esta variable ingresa a la base.
Criterio de salida: Utilizando el criterio del cuociente $\text{mín}\{8/1, 0/1\}$, la variable que sale es h_1.

x_1	h_3	x_2	h_2	h_1	x_3	μ_1	μ_2	z
0	0	−1	0	0	−1	1	−1	−8
1	0	1	0	1	1	0	0	8
0	1	0	0	0	1	0	0	4
0	0	1	0	1	0	−1	1	0
0	0	0	1	0	1	−1	1	0

Pivoteando:

x_1	h_3	x_2	h_2	h_1	x_3	μ_1	μ_2	z
0	0	0	0	1	−1	0	0	−8
1	0	0	0	0	1	1	−1	8
0	1	0	0	0	1	0	0	4
0	0	1	0	1	0	−1	1	0
0	0	0	1	0	1	−1	1	0

[5]Note que $\text{máx}\{x_2, x_3\} \geq 0$ debido a la naturaleza de las variables x_2 y x_3

Criterio de entrada: Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, entra x_3 al ser la única con costo reducido negativo.

Criterio de salida: Utilizando el criterio del cuociente mín$\{8/1, 4/1, 0/1\}$, la variable que sale es h_2.

x_1	h_3	x_2	x_3	h_1	h_2	μ_1	μ_2	z
0	0	0	-1	1	0	0	0	-8
1	0	0	1	0	0	1	-1	8
0	1	0	1	0	0	0	0	4
0	0	1	0	1	0	-1	1	0
0	0	0	1	0	1	-1	1	0

Pivoteando:

x_1	h_3	x_2	x_3	h_1	h_2	μ_1	μ_2	z
0	0	0	0	1	1	-1	1	-8
1	0	0	0	0	-1	2	-2	8
0	1	0	0	0	-1	1	-1	4
0	0	1	0	1	0	-1	1	0
0	0	0	1	0	1	-1	1	0

Criterio de entrada: Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, entra μ_1 al ser la única con costo reducido negativo.

Criterio de salida: Utilizando el criterio del cuociente mín$\{8/2, 4/1\}$ es sobredeterminado. Podría entrar a la base tanto x_1 como h_3. Arbitrariamente, escogemos x_1 para que salga de la base.

μ_1	h_3	x_2	x_3	h_1	h_2	x_1	μ_2	z
-1	0	0	0	1	1	0	1	-8
2	0	0	0	0	-1	1	-2	8
1	1	0	0	0	-1	0	-1	4
-1	0	1	0	1	0	0	1	0
-1	0	0	1	0	1	0	1	0

Pivoteando:

μ_1	h_3	x_2	x_3	h_1	h_2	x_1	μ_2	z
0	0	0	0	1	$1/2$	$1/2$	0	-4
1	0	0	0	0	$-1/2$	$1/2$	-1	4
0	1	0	0	0	$-1/2$	$-1/2$	-2	0
0	0	1	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	4
0	0	0	1	0	$1/2$	$1/2$	0	4

Luego, la solución es óptima. En este caso, los valores de las variables son: $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 4, h_1 = 0, h_2 = 0, h_3 = 0, \mu_1 = 4$ y $\mu_2 = 0$. El valor de la función objetivo del problema original es 4.

Como ya fue mencionado, nos encontramos sobre una base sobredeterminada.

Problema 4. (15 puntos)

a) (9 puntos) Enrique, durante la semana pasada, quiso ir a comprar un libro que, lamentablemente, no pudo encontrar debido a la mala distribución que tenían los libros en sus estantes. Tras buscar en el poco intuitivo sistema computacional y solicitar ayuda a los vendedores, notó que su principal problema era que los libros no estaban distribuidos adecuadamente según géneros literarios en los estantes.

Para no llevarse otra mala experiencia, y dado que esta librería es la que le queda más cercana a su lugar de trabajo, les ofreció ayuda para redistribuir de mejor manera los géneros de libros, utilizando sus

conocimientos de Optimización. Claramente, debido a su ocupada agenda, él no logró encontrar tiempo para resolver este problema, por lo que le solicitó a los profesores incluirlo en esta tarea.

La librería maneja un conjunto de G géneros literarios. Se sabe que el género g está compuesto por un conjunto L_g de libros (evidentemente, los libros de un género deben ser colocados en los estantes asignados a ese género). Adicionalmente, se conoce el conjunto de todos los libros que se pueden vender en la librería, siendo este conjunto $L = \cup_{g \in G} L_g$, donde cada libro está en exactamente un género.

Estos géneros -y algunos de sus libros- deben ser dispuestos en las E estanterías destinadas para ellos (tenga presente que no todos los libros deben ser exhibidos en estantes). Considere que todos los estantes son iguales y que poseen una capacidad para exhibir U libros en total, independiente de sus grosores.

Como se muestra en la figura, los estantes están numerados consecutivamente y vienen de a pares pegados mirando a dos pasillos consecutivos (estantes contiguas) o enfrentadas mirando un mismo pasillo (estantes enfrentadas). Asuma a los estantes $\frac{N}{2}$ y $\frac{N}{2}+1$ como estantes contiguos.



Para permitirle trabajar, la librería exigió algunas condiciones:

- ◇ Cada género g debe utilizar entre n_g y N_g estantes completos.
- ◇ Cada género está restringido a ser asignado a un conjunto de estantes consecutivos según su numeración.
- ◇ Para cada género g existe un conjunto V_g de géneros incompatibles. Esto quiere decir que el género g y el género $\hat{g} \in V_g$ no deben estar asignados a estantes contiguos.
- ◇ Para cada género g existe un conjunto H_g de géneros incompatibles. Esto quiere decir que el género g y el género $\hat{g} \in H_g$ no deben estar asignadas a estantes enfrentados.
- ◇ Cada libro l, si es que es exhibido en un estante, debe tener una cantidad mínima (q_l) y una cantidad máxima (Q_l) de unidades a exhibir.
- ◇ Todas las unidades de un mismo libro deben ser exhibidas en el mismo estante.
- ◇ Hay algunos géneros literarios que, debido a su bajo número de libros o a su compatibilidad con otros géneros, poseen un conjunto S_g de géneros con los que puede compartir estante. Aquellos libros cuyo género no tenga conjunto, deben estar asignados al estante únicamente destinado a su género.

Los beneficios obtenidos son función de las unidades de cada producto asignadas a la góndola. Específicamente, se sabe que si se exhibe una unidad del libro l en el estante e se obtiene un beneficio igual a B_{le}.

Formule un modelo de programación lineal entera que permita decidir la ubicación de los géneros en los estantes y la selección de libros de cada género que deben ser exhibidos maximizando el beneficio total. Defina claramente las variables de decisión, las restricciones y la función objetivo del modelo.

Solución Problema 4.

El modelo asociado es:

Variables

x_g^e: variable binaria que vale 1 si el género g, con $g \in G$, es asignada al estante e, con $e = 1, \ldots, E$, y que vale 0 en otro caso.

y_l^e: variable binaria que vale 1 si el libro l, con $l \in L$, es exhibido en el estante e, con $e = 1, \ldots, E$, y que vale 0 en otro caso.

w_l^e: unidades del libro l, con $l \in L$, que serán colocadas en el estante e, con $e = 1, \ldots, E$.

α_g^e: variable binaria que vale 1 si el género g, con $g \in G$, tiene asignada como último estante (en la secuencia) al estante e, con $e = 1, \ldots, E$, y que vale 0 en otro caso.

Parámetro adicional

β_g: parámetro binario que vale 1 si $S_g = \emptyset$, y 0 si no.

Función objetivo Maximizar el beneficio total de los productos exhibidos:

$$\text{máx} \sum_{e=1}^{E} \sum_{l \in L} B_l^e w_l^e$$

Restricciones

R1) Asignar al menos el mínimo establecido de estantes a cada género.

$$\sum_{e=1}^{E} x_g^e \geq n_g \qquad \text{para } g \in G.$$

R2) No asignar más del máximo establecido de estantes a cada género.

$$\sum_{e=1}^{E} x_g^e \leq N_g \qquad \text{para } g \in G.$$

R3) Construcción de variable α_g^e.

$$x_g^e - x_g^{e+1} \leq \alpha_g^e \qquad \text{para } g \in G; e = 1, \ldots, E-1.$$

R4) Solamente una vez se termina la secuencia de estantes asignadas a un género.

$$\sum_{e=1}^{E} \alpha_g^e = 1 \qquad \text{para } g \in G.$$

R5) Condición de incompatibilidad V_g.

$$x_g^e + x_{\hat{g}}^{e+1} \leq 1 \qquad \text{para } g \in G; \hat{g} \in V_g : e = 2, 4, 6, \ldots, N-2.$$

$$x_{\hat{g}}^e + x_g^{e+1} \leq 1 \qquad \text{para } g \in G; \hat{g} \in V_g : e = 2, 4, 6, \ldots, N-2.$$

R6) Condición de incompatibilidad H_g.

$$x_g^e + x_{\hat{g}}^{e+1} \leq 1 \qquad \text{para } g \in G; \hat{g} \in H_g : e = 1, 3, 5, \ldots, N-1.$$

$$x_{\hat{g}}^e + x_g^{e+1} \leq 1 \qquad \text{para } g \in G; \hat{g} \in H_g : e = 1, 3, 5, \ldots, N-1.$$

R7) Un producto puede ser asignado a lo más a un estante.

$$\sum_{g=1}^{G} y_p^g \leq 1 \qquad \text{para } p \in P.$$

R8) Se puede exhibir libros de un género solamente a estantes asignados a ese género.

$$y_l^e \leq x_g^e \qquad \text{para } l \in L; g \in G; e = 1, \ldots, N.$$

R9) Las unidades a exhibir de cada libro que se decide exhibir en estantes deben respetar un mínimo establecido.

$$w_l^e \geq q_l y_l^e \qquad \text{para } l \in L; e = 1, \ldots, N.$$

R10) Las unidades a exhibir de cada libro que se decide exhibir en estantes deben respetar un máximo establecido.

$$w_l^e \leq Q_l y_l^e \qquad \text{para } l \in L; e = 1, \ldots, N.$$

R11) Se debe respetar la capacidad en unidades de cada estante.

$$\sum_{l \in L} w_l^e \leq U \qquad \text{para } e = 1, \ldots, N.$$

R12) Dos géneros no pueden compartir estante si es que S_g es vacío.

$$x_g^e + x_{\hat{g}}^e \leq 1 \qquad \forall g = 1, \ldots, G, \ \forall e, \hat{e} = 1, \ldots, N \text{ tal que } \hat{g} \notin S_g$$

R13) Permitir que géneros puedan compartir estantes si es que se permite.

$$\sum_{e=1}^{N} x_g^e \leq 1 + (N-1)(1 - \beta_e)$$

R14) Asegurar que a un estante se le asigne un género como mínimo.

$$\sum_{e=1}^{N} x_g^e \geq 1$$

R15) Naturaleza de las variables

$x_g^e \in \{0, 1\}$, para $g \in G; e = 1, \ldots, N$.
$y_l^e \in \{0, 1\}$, para $l \in L; e = 1, \ldots, N$.
$\alpha_g^e \in \{0, 1\}$, para $g \in G; e = 1, \ldots, N$.
$w_l^e \geq 0$, para $l \in L; e = 1, \ldots, N$.

b) (6 puntos) El Sudoku es un juego, en donde aparece un cuadrado grande de 9 filas por 9 columnas, o sea, de 81 casilleros, que están divididos a su vez, en nueve subcuadrados de 3x3.

Cada subcuadrado hay que llenarlo con los nueve dígitos que van del 1 hasta el 9. Además, no puede aparecer ningún dígito repetido ni en la misma fila ni en la misma columna del cuadrado grande.

Como dato adicional, se sabe que ya vienen fijados t números n_i en las posiciones (k_i, l_i) del cuadrado $(i = 1, \ldots, t)$.

Diseñe un modelo de programación lineal entera que permita completar todas las casillas que están vacías, encontrando la solución al Sudoku dado, que minimice la suma de los números de la diagonal principal.

PAUTA:

Variables

x_{ijk}: variable binaria que vale 1 si la casilla (i, j) de la matriz del Sudoku contiene al entero k, con $i, j, k = 1, \ldots, 9$.

Función objetivo Minimizar la suma de los números de la diagonal principal:

$$\text{mín} \sum_{k=1}^{9} \sum_{i=1}^{9} k x_{iik}$$

Restricciones

R1) No se repiten números en las columnas.

$$\sum_{i=1}^{9} x_{ijk} = 1 \qquad \forall j, k = 1, \ldots, 9$$

R2) No se repiten números en las filas.

$$\sum_{j=1}^{9} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i, k = 1, \ldots, 9$$

R3) Tampoco se repiten los números en cada subcuadrado de 3x3.

$$\sum_{j=3q-2}^{3q} \sum_{i=3p-2}^{3p} x_{ijk} = 1 \qquad \forall p, q = 1, 2, 3 \qquad \forall k = 1, \ldots, 9$$

R4) Cada casilla de la matriz podrá tener sólo un número asignado.

$$\sum_{k=1}^{9} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i, j = 1, \ldots, 9$$

R5) Existen casillas que ya contienen números asignados inicialmente.

$$x_{k_i l_i n_i} = 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, t$$

R6) Naturaleza de las variables

$x_{ijk} \in \{0, 1\}$, $\forall i, j, k = 1, \ldots, 9$

Notar que puede existir más de una formulación correcta para el problema.