PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2014
Profesores: P.Álvarez - A.Cataldo
A.Lüer - J.Vera

Pauta Tarea 2

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) (5 puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & c^T x + d^T y & \\ s.a. & Ax + Dy & = b \\ & x \geq 0 & \end{array}$$

donde A es de $m \times n$, D es de $m \times p$. Observe que las variables y no tienen restricción de signo. Muestre que este problema se puede reformular equivalentemente como:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & c^T x + d^T y^+ - d^T y^- & \\ s.a. & Ax + Dy^+ - Dy^- & = b \\ & x, y^+, y^- \geq 0 & \end{array}$$

donde se ha reemplazado cada variable y_j por la diferencia de dos variables no negativas: y_j^+ e y_j^-, y en donde, para cada $j = 1, \ldots, n$, una y sólo una de las variables y_j^+ e y_j^- puede ser > 0.

Respuesta

La factibilidad del reemplazo es obvia: si x_j es una de las variables, siempre podemos escribirla como la diferencia de dos cantidades no negativas, es decir, podemos poner $x_j = x_j^+ - x_j^-$, donde $x_j^+ \geq 0$ y $x_j^- \geq 0$. Ahora, el que sólo una de ellas puede ser > 0 en una solución básica se sigue de lo siguiente: si ambas fueran > 0, entonces tanto x_j^+ y x_j^- serían variables básica. Pero si eso pasa, las columnas de la base serían las columnas A_j y $-A_j$. Luego, la base tendría dos columnas linealmente dependientes, lo que no puede ser.

(b) (10 puntos) Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & 3x_1 - 4x_2 & \\ s.a. & x_1 + x_2 & \leq 7 \\ & -x_1 + 3x_2 & \geq 2 \\ & 2x_1 - x_2 & \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Resuelva este problema usando el método Simplex, con Fase I y Fase II. La resolución debe ser realizada mediante Tableau y en forma matricial algebraica. Muestre todo el detalle que va generando. (Ind: para que verifique, la solución óptima es $x_1 = 2,666 = 8/3$, $x_2 = 4,333 = 13/3$, este problema no requiere más de 3 iteraciones entre Fase I y Fase II).

Respuesta

El problema primero se formula con variables de holgura:

$$\begin{array}{lrl} \text{Min} & 3x_1 - 4x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 + x_3 & = 7 \\ & -x_1 + 3x_2 - x_4 & = 2 \\ & 2x_1 - x_2 - x_5 & = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{array}$$

El problema de FASE I es (basta usar dos variables artificiales ya que la holgura x4 contiene parte de la identidad):

$$\begin{array}{lrl} \text{Min} & t_1 + t_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 + x_3 & = 7 \\ & -x_1 + 3x_2 - x_4 + t_1 & = 2 \\ & 2x_1 - x_2 - x_5 + t_2 & = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t_1, t_2 & \geq 0 \end{array}$$

La secuencia de iteraciones comienza con el siguiente tableau. En cada iteración se indica la celda pivote:

1	1	1	0	0	0	0	7
−1	3	0	−1	0	1	0	2
2	−1	0	0	−1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1	0
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	$\bar{b}$

la solución no es óptima, así que se fija como celda pivote (al aplicar el criterio de entrada y salida) la celda asociada a x_2 (variable que entra) y a la segunda fila (t_1 sale de la base).

4/3	0	1	1/3	0	−1/3	0	19/3
−1/3	1	0	−1/3	0	1/3	0	2/3
5/3	0	0	−1/3	−1	1/3	1	5/3
−5/3	0	0	−1/3	1	2/3	0	−5/3
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	b

la solución no es óptima, así que se fija como celda pivote (al aplicar el criterio de entrada y salida) la celda asociada a x_1 (variable que entra) y a la tercera fila (t_2 sale de la base).

0	0	1	3/5	4/5	−3/5	−4/5	5
0	1	0	−2/5	−1/5	2/5	1/5	1
1	0	0	−1/5	−3/5	1/5	3/5	1
0	0	0	0	0	1	1	0
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	$\bar{b}$

Este es el fin de la Fase I. Ahora sólo basta una iteración más para llegar al óptimo. Para eso, eliminamos las variables artificiales del último tableau:

0	0	1	3/5	4/5	5
0	1	0	−2/5	−1/5	1
1	0	0	−1/5	−3/5	1
0	0	0	−1	1	0
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$

la solución no es óptima, así que se fija como celda pivote (al aplicar el criterio de entrada y salida) la celda asociada a x_4 (variable que entra) y a la primera fila (x_3 sale de la base).

0	0	5/3	1	4/3	25/3
0	1	2/3	0	1/3	13/3
1	0	1/3	0	−1/3	8/3
0	0	5/3	0	7/3	28/3
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$

que es la solución óptima del problema.

Pregunta 2 (15 puntos)

(a) (5 puntos) Considere un problema de Programación Lineal en forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ s.a. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

La fórmula general de los costos reducidos es: $\bar{c} = c - \pi^T A$, donde $\pi^T = c_B B^{-1}$. Muestre formalmente que si j es un índice de variable básica entonces $\bar{c}_j = 0$.

Respuesta

Esto se sigue de que, en general, los costos reducidos son $\bar{c}^T = c^T - \pi^T A$, donde $\pi^T = c_b^T B^{-1}$. Suponiendo una partición de la matriz en $A = [B|R]$ tenemos que los costos reducidos de las variables no básicas son $\bar{c}_R^T = c_R^T - \pi^T R$. Análogamente, los costos reducidos de las variables básicas son

$$\bar{c}_B^T = c_B^T - \pi^T B = c_B^T - c_b^T B^{-1} B = c_B^T - c_B^T = 0$$

(b) (10 puntos) Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & -3x_1 + x_2 & \\ s.a. & 3x_1 - x_2 & \leq 1 \\ & 2x_1 + x_2 & \leq 4 \\ & -2x_1 + 4x_2 & \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Este problema es llevado primero a forma estándar agregando tres variables de holgura, x_3, x_4, y x_5, una por cada restricción presente en el problema. Después, se aplica el método Simplex. El Tableau final (óptimo) es el siguiente, con x_1, x_4 y x_5 variables básicas:

1,0	-0,333	0,333	0,0	0,0	0,333
0,0	1,667	-0,667	1,0	0,0	3,333
0,0	3,333	0,667	0,0	1,0	2,667
0	0	1,00	0,00	0,00	-1,0
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$

Sobre la base de la información contenida aquí, responda las siguientes preguntas:

(i) (1,5 puntos) Determine la inversa de la matriz básica asociada a la solución óptima.

(ii) (1,5 puntos) Determine los valores de las variables duales (o multiplicadores del Simplex)

(iii) (3,0 puntos) ¿Hasta cuánto puede cambiar el coeficiente del lado derecho de la primera restricción y mantenerse la misma base óptima?

(iv) (4,0 puntos) ¿Es única la solución óptima actual? En caso de que su respuesta sea afirmativa, justifique adecuadamente. Si no lo es, calcule, usando el mismo Tableau, determine una solución óptima alternativa.

Sus justificaciones y cálculos deben ser hechos sobre la base de la información contenida en el Tableau.

Respuesta

(i) Directamente del tableau se tiene que:

$$(B)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,333 & 0 & 0 \\ -0,667 & 1 & 0 \\ 0,667 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) Directamente el tableau se tiene que:

$$\begin{gathered} \pi_1 = -1 \\ \pi_2 = 0 \\ \pi_3 = 0 \end{gathered}$$

(iii) Se tiene que:

$$\bar{b} = (B)^{-1} b = \begin{bmatrix} 0,333 & 0 & 0 \\ -0,667 & 1 & 0 \\ 0,667 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se tiene que:

$$0,333b_1 \geq 0 \Rightarrow b_1 \leq 0$$

$$\begin{gathered} -0,667b_1 + 4 \geq 0 \Rightarrow b_1 \leq 5,99 \\ 0,667b_1 + 2 \geq 0 \Rightarrow b_1 \geq -3 \end{gathered}$$

(iv) La solución actual no es única ya que el costo reducido asociado a la variable no básica $x_2 = 0$. Entra a la base x_2 y sale de la base x_5. El tableau es:

0	0	1	0	0	-1
1	0	0	0	0	$0,599$
0	0	$-1,001$	1	$-0,5$	$1,999$
0	1	$0,2$	0	$0,3$	$0,8$
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b

Pregunta 3 (15 puntos)

(a) (5 puntos) Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lcl} \text{mín} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \\ s.a. & x_1 + 4x_3 - 5x_4 & = 1 \\ & 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 & = 5 \\ & 4x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 7x_4 & = 7 \\ & x_j \geq 0, j = 1, ..., 4 & \end{array}$$

Se sabe que este problema es factible. Muestre que la región factible del problema es no acotada, pero que el problema mismo sí tiene óptimo finito. Haga esto sin resolver el problema de optimización, use sus conocimientos sobre la geometría de poliedros y también sobre dualidad.

Respuesta

La región factible no es acotada, se ve en $Au = 0$ con $u^T = [1, 1, 1, 1] \geq 0$.

Si el problema dual es factible, acota por abajo al primal (teorema débil de dualidad) y el problema primal tiene óptimo finito, ya que es factible.

El problema dual es:

$$\begin{array}{lcl} \text{Max} & y_1 + 5y_2 + 7y_3 & \\ \text{s.a.} & y_1 + 2y_2 + 4y_3 & \leq 1 \\ & 0y_1 - 3y_2 + 6y_3 & \leq 1 \\ & 4y_1 + 5y_2 - 3y_3 & \leq 1 \\ & -5y_1 - 4y_2 - 7y_3 & \leq 1 \\ & y_1, y_2, y_3 & \text{irrestrictas} \end{array}$$

el punto $(0, 0, 0)$ satisface las restricciones del dual, por lo tanto es factible y el primal tiene óptimo finito.

(b) (10 puntos) Considere una empresa que cada mes utiliza en su operación dos tipos de trabajadores: tipo 1 y tipo 2. Cada mes, esta empresa busca maximizar el beneficio que le produce el trabajo que realizan sus trabajadores, lo que se ve reflejado en la siguiente función de utilidad: $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$. La variable x_1 representa la cantidad de trabajadores tipo 1 que se contratarán para este mes, y la variable x_2 representa la modificación que sufrirá el número de trabajadores tipo 2 contratados para este mes (y entonces esta variable es irrestricta, luego si $x_2 < 0$ se despedirán trabajadores y si $x_2 > 0$ se contratarán trabajadores).

Suponga que el espacio de soluciones factibles se presenta (ennegrecida) en la siguiente Figura 1:

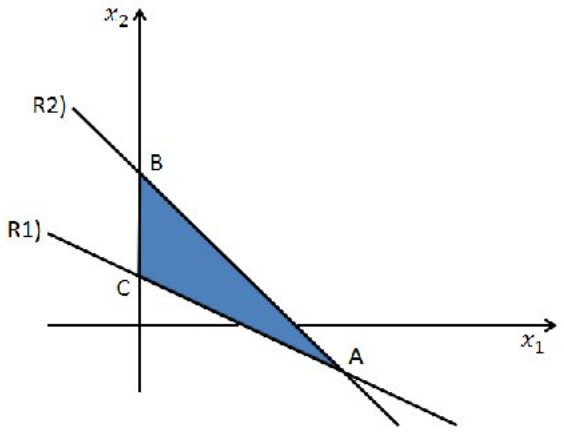


Figura 1: Espacio de soluciones factibles.

Según el gerente de personal, una solución posible está dada por las coordenadas $x_1 = 4$ y $x_2 = -2$ (que en la Figura 1 corresponden al punto A). Se sabe que la inversa de la base en ese punto extremo (vértice) es:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \left(\text{y } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

Con la información anterior, responda:

(i) (3,0 puntos) Escriba el modelo matemático que representa el problema antes descrito.

(ii) (3,0 puntos) Utilice el algoritmo Simplex para probar que el punto A no es solución óptima del problema planteado.

(iii) (4,0 puntos) Utilice el Algoritmo Simplex, utilizando el punto A como punto de partida, para encontrar la solución óptima del problema planteado. Entregue el valor de las variables de decisión y de la función objetivo en el óptimo.

Respuesta

(i) Del gráfico podemos ver que el problema descrito es de dos restricciones y dos variables. La forma estándar del problema requiere agregar una variable de holgura a cada una de las restricciones, quedando de manera genérica el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -2x_1 - 5x_2 + 0h_1 + 0h_2 \\ s.a: & ax_1 + bx_2 - h_1 = b_1 \\ & cx_1 + dx_2 + h_2 = b_2 \\ & x_1, h_1, h_2 \geq 0 \\ & x_2 \text{ irrestricta} \end{array}$$

hacemos el cambio de variables $x_2 = x_3 - x_4$ para contar solamente con variables no negativas. Entonces el modelo queda:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -2x_1 - 5x_3 + 5x_4 + 0h_1 + 0h_2 \\ s.a: & ax_1 + bx_3 - bx_4 - h_1 = b_1 \\ & cx_1 + dx_3 - dx_4 + h_2 = b_2 \\ & x_1, x_3, x_4, h_1, h_2 \geq 0 \end{array}$$

Este problema en forma estándar tiene 2 variables básicas y 3 variables no básicas. El punto A tiene coordenadas $x_1 = 4$ y $x_2 = x_3 - x_4 = -2$. Para que el punto A sea punto extremo (tal como se ve gráficamente), $x_3 = 0$ y $x_4 = 2$. Luego, la matriz B está asociada a las columnas de x_1 y x_4, con lo que el modelo queda:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -2x_1 - 5x_3 + 5x_4 + 0h_1 + 0h_2 \\ s.a: & 1x_1 + 1x_3 - 1x_4 - h_1 = b_1 \\ & 2x_1 + 1x_3 - 1x_4 + h_2 = b_2 \\ & x_1, x_3, x_4, h_1, h_2 \geq 0 \end{array}$$

Para determinar b_1 y b_2 resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

quedando la forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -2x_1 - 5x_3 + 5x_4 + 0h_1 + 0h_2 \\ s.a: & 1x_1 + 1x_3 - 1x_4 - h_1 = 2 \\ & 2x_1 + 1x_3 - 1x_4 + h_2 = 6 \\ & x_1, x_3, x_4, h_1, h_2 \geq 0 \end{array}$$

y el problema original corresponde a:

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{máx} & 2x_1 + 5x_2 \\ s.a: & & 1x_1 + 1x_2 \geq 2 \\ & & 2x_1 + 1x_2 \leq 6 \\ & & x_1 \geq 0 \\ & & x_2 \text{ irrestricta} \end{array}$$

(ii) Dada la información de la parte (i) $x_1 = 4 > 0$ y $x_4 = 2 > 0$, ambas son las variables básicas del problema, siendo x_3, h_1 (holgura de restricción R1)) y h_2 (holgura de restricción R2)) las no básicas.

Entonces se tiene:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_{x_3} & \bar{c}_{h_1} & \bar{c}_{h_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

como se ve, el costo reducido de las variables h_1 y h_2 es negativo, luego, el punto A no es solución óptima del problema.

(iii) Como se observó en la parte (ii), el punto A no es óptimo, y aplicando el criterio de entrada a la base la variable h_1 entra a la base. Aplicamos el criterio de salida. Se tiene:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$min\left\{\frac{4}{1}, \frac{2}{2}\right\} = 1 \mapsto \text{sale } x_4 \text{ de la base.}$$

Entonces, la nueva base está constituida por las variables x_1 y h_1.
La nueva base y matriz R son:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \left(\text{y } B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \right)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

El criterio de optimalidad nos indica que:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_{x_3} & \bar{c}_{x_4} & \bar{c}_{h_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

Pregunta 4 (15 puntos)

(a) (5 puntos) Dado un problema lineal P) y su dual D), con soluciones óptimas x^* e y^* respectivamente, y z^* el valor óptimo de ambos problemas, demuestre que:

(i)
$$\frac{\partial z^*}{\partial b_j} = y_j^* \qquad \forall j = 1, \ldots, m.$$

(ii)
$$\frac{\partial z^*}{\partial c_i} = x_i^* \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Respuesta

La respuesta es directa asumiendo que el problema primal está en forma estándar, y usando los resultados de programación lineal en general, y los de dualidad en particular.

(b) (10 puntos) Dado el siguiente problema,

$$\mathcal{P}) \qquad \begin{array}{rrrrrrl} \max z = & -8x_1 & -3x_2 & +2x_3 & -2x_4 & & \\ \text{s.a.} & -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq & 2 \\ & -2x_1 & & +2x_3 & -x_4 & \leq & 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Obtener gráficamente el valor óptimo de $\mathcal{P}$.

Respuesta

Este problema no puede resolverse directamente mediante el método gráfico. Observamos que tiene 4 variables y 2 restricciones. Es decir, su dual ($\mathcal{D}$) tendrá 4 restricciones y 2 variables.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & \min w = & 2y_1 & +y_2 & & & \\
 & \text{s.a.} & -y_1 & -2y_2 & \geq -8 & (1) \\
\mathcal{D}) & & -y_1 & & \geq -3 & (2) \\
 & & y_1 & +2y_2 & \geq +2 & (3) \\
 & & y_1 & -y_2 & \geq -2 & (4)
\end{array}
$$

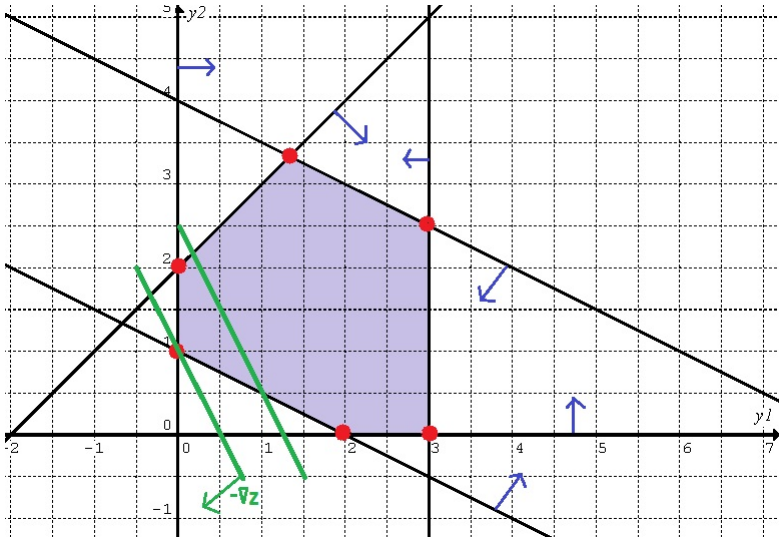


Figura 2: Espacio factible, vértices y solución óptima de $\mathcal{D}$.

En la figura 2 se muestra el espacio factible de $\mathcal{D}$, así como sus vértices y solución óptima. Se tiene que $y^* = (0, 1)$, con $w^* = 1$.

Como el problema dual tiene solución óptima finita, el problema primal también la tiene, con igual valor del objetivo, es decir $z^* = w^* = 1$.

Reglas de la Tarea

- ◇ La Tarea debe ser desarrollada individualmente.
- ◇ Se debe contestar en hojas independientes cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. En cada hoja debe colocar su nombre **con letra clara y legible**.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día Miércoles 01 de Octubre a las 12:00 horas. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaria del segundo piso del edificio Raúl Devés**.
- ◇ La copia o intento de copia será castigada con la **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso.