PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2019
Profesores: M. Klapp - R. Cuadrado
A. Cataldo - J. González
P. Guajardo

Solución Tarea 2

Fecha de Entrega: 18 de abril

La Tarea tiene un total de 4 preguntas a ser evaluadas. Esta será evaluada corrigiendo dos preguntas que serán seleccionadas por el equipo docente después de la entrega. Cada pregunta valdrá 3 puntos. Sin embargo, el grupo tendrá disponible la solución de toda la Tarea después de la fecha de entrega.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día jueves 18 de abril a las 12:00 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 10:00 y las 12:00 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada con **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1.

a) Considere el poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \leq b_i, \forall i = 1, ..., m\}$, con $n < m$. Sean x_1 y x_2 dos soluciones básicas factibles asociadas a dos vértices diferentes que satisfacen $a_i^T x_1 = a_i^T x_2 = b_i$, para $i = 1, ..., n-1$. Considere que los vectores $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ son linealmente independientes.

(I) Argumente que los vértices debe ser vecinos y que sus configuraciones de bases deben diferir en una variable.

(II) Considere el conjunto de combinaciones convexas entre ambas soluciones dado por

$$S = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \in [0,1]\},$$

muestre mediante argumentos matemáticos que $S = \{z \in P : a_i^T z = b_i, i = 1, ..., n-1\}$.

b) Considere el poliedro acotado $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \leq b_i, \forall i = 1, ..., m\}$, con $n < m$.

Defina $M = \{x \in P : c^T x = d\}$ como otro conjunto definido como el poliedro intersectado con una desigualdad lineal $c^T x \leq d$. Argumente matemáticamente que cada vértice de M es un vértice de P o es una combinación convexa de dos vértices vecinos de P.

c) Para cada uno de los siguientes problemas, formule un problema equivalente que sea diferenciable en todo el dominio.

i)

$$\begin{aligned} P) \quad & \text{máx} && \ln(\mid x_1 + x_2 + 1 \mid^{-1}) \\ & s.a. \\ & && x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & && x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} P) \quad & \text{máx} && \text{mín}\{\mid x_1 + x_2 - 5 \mid, \text{máx}[x_1 + 2, x_2 - 3]\} \\ & s.a. \\ & && x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} P) \quad & \text{mín} && \ln(\text{máx}\{\mid x_1 + x_2 - 1 \mid, \mid 2x_1 - 3x_2 - 8 \mid\} + \mid 3x_1 - 1 \mid) \\ & s.a. \\ & && x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & && x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución Problema 1.

a) (I) Los vértices x_1 y x_2 tienen $n-1$ ecuaciones en común que los definen. Para que un vértice en $\mathbb{R}^n$ esté definido requiere n ecuaciones. Así, x_1 y x_2 difieren solo en una ecuación, por lo que necesariamente son adyacentes. Además, las bases asociadas a vértices adyacentes sólo difieren en una variable.

(II) Sea $x \in S$, luego, $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ con $\lambda \in [0,1]$. Multiplicamos por a_i^T, $\forall i = 1, ..., n-1$:

$$\begin{aligned} a_i^T x &= \lambda a_i^T x_1 + (1-\lambda) a_i^T x_2 \\ a_i^T x &= \lambda b_i + (1-\lambda) b_i \\ a_i^T x &= b_i \end{aligned}$$

Como x es combinación convexa de dos puntos de P, $x \in P$. Luego, puede ser representado por:

$$x \in \{z \in P : a_i^t z = b_i, i = 1, ..., n-1\}$$

b) Sea x un punto extremo de M. Luego, existen n restricciones linealmente independientes activas en x, de las que $a_s^T = b_s$ es una de ellas, con $s \in \{1, ...n\}$. Luego, existen $n-1$ restricciones en P activas en

x, las que también son l.i.
Si la restricción s es l.d. con las de P, implica que las n restricciones activas en x pertenecían todas a P, por lo que x es un punto extremo de P.
De lo contrario, sea $a_i^T \geq b_i$ las restricciones de P, donde:

$$a_i^T x \quad = \quad b_i, \quad i = 1, ..., n-1$$

Sean x_1 y x_2 dos puntos extremos adyacentes de P que satisfacen:

$$a_i^T x_1 = a_i^T x_2 = b_i, \quad i = 1, ..., n-1$$

Como x_1 y x_2 son adyacentes, podemos escribir x como:

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \quad \lambda \in [0, 1]$$

Por lo que x es una combinación convexa.

c) *i)* Tenemos el problema:

$$\begin{array}{lll} P) & \text{máx} & \ln(\mid x_1 + x_2 + 1 \mid^{-1}) \\ s.a. & & \\ & x_1 + 2x_2 & \leq \quad 3 \\ & x_1, x_2 & \geq \quad 0 \end{array}$$

Debemos linealizar la función objetivo. Para esto aplicamos la función $g(z) = e^z$,

$$\text{máx} \quad \ln(\mid x_1 + x_2 + 1 \mid^{-1}) \quad \sim \quad \text{máx} \quad \mid x_1 + x_2 + 1 \mid^{-1}$$

Como la función objetivo es estrictamente mayor a 0, la siguiente equivalencia es válida:

$$\text{máx} \quad \mid x_1 + x_2 + 1 \mid^{-1} \quad \sim \quad \text{mín} \quad \mid x_1 + x_2 + 1 \mid$$

Para que la función objetivo sea diferenciable, sustituimos el valor absoluto por μ y nos queda el siguiente problema:

$$\begin{array}{lll} P) & \text{mín} & \mu \\ s.a. & & \\ & \mid x_1 + 2x_2 \mid & \leq \quad \mu \\ & x_1 + 2x_2 & \leq \quad 3 \\ & x_1, x_2 & \geq \quad 0 \end{array}$$

Lo que a su vez, es equivalente a

$$\begin{array}{lll} P) & \text{mín} & \mu \\ s.a. & & \\ & x_1 + 2x_2 & \leq \quad \mu \\ & -(x_1 + 2x_2) & \leq \quad \mu \\ & x_1 + 2x_2 & \leq \quad 3 \\ & x_1, x_2 & \geq \quad 0 \end{array}$$

ii) Tenemos el problema:

$$\begin{array}{lll} P) & \text{máx} & \text{mín}\{\mid x_1 + x_2 - 5 \mid, \text{máx}[x_1 + 2, x_2 - 3]\} \\ s.a. & & \\ & x_1, x_2 & \geq \quad 0 \end{array}$$

Para linealizar la función objetivo, sustituimos mín$\{\mid x_1 + x_2 - 5 \mid, \text{máx}[x_1 + 2, x_2 - 3]\}$ por μ, obteniendo el problema equivalente:

$$P) \qquad \text{máx} \qquad \mu$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcl} \mid x_1 + x_2 - 5 \mid & \geq & \mu \\ \text{máx}[x_1 + 2, x_2 - 3] & \geq & \mu \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Finalmente,

$$P) \qquad \text{máx} \qquad \mu$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 5 & \geq & \mu \\ -(x_1 + x_2 - 5) & \geq & \mu \\ \text{máx}[x_1 + 2, x_2 - 3] & \geq & \mu \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

No se puede llegar a un problema diferenciable ya que $\text{máx}\{x_1 + 2, x_2 - 3\} \geq \mu$ no es diferenciable.

iii) Tenemos el problema:

$$P) \qquad \text{mín} \qquad \ln(\text{máx}\{\mid x_1 + x_2 - 1 \mid, \mid 2x_1 - 3x_2 - 8 \mid\} + \mid 3x_1 - 1 \mid)$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & \leq & 5 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Aplicamos la función $g(z) = e^z$ a la función objetivo, con lo que obtenemos:

$$\text{mín} \quad \ln(\text{máx}\{\mid x_1 + x_2 - 1 \mid, \mid 2x_1 - 3x_2 - 8 \mid\} + \mid 3x_1 - 1 \mid) \sim \text{mín} \quad \text{máx}\{\mid x_1 + x_2 - 1 \mid, \mid 2x_1 - 3x_2 - 8 \mid\} + \mid 3x_1 - 1 \mid$$

Sustituimos máx$\{\mid x_1 + x_2 - 1 \mid, \mid 2x_1 - 3x_2 - 8 \mid\}$ por μ_1 y $\mid 3x_1 - 1 \mid$ por μ_2, obteniendo el problema equivalente:

$$P) \qquad \text{mín} \qquad \mu_1 + \mu_2$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcl} \text{máx}\{\mid x_1 + x_2 - 1 \mid, \mid 2x_1 - 3x_2 - 8 \mid\} & \leq & \mu_1 \\ \mid 3x_1 - 1 \mid & \leq & \mu_2 \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 5 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Finalmente:

$$P) \qquad \text{mín} \qquad \mu_1 + \mu_2$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 1 & \leq & \mu_1 \\ -(x_1 + x_2 - 1) & \leq & \mu_1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 8 & \leq & \mu_1 \\ -(2x_1 - 3x_2 - 8) & \leq & \mu_1 \\ 3x_1 - 1 & \leq & \mu_2 \\ -(3x_1 - 1) & \leq & \mu_2 \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 5 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Problema 2.

a) Verifique la existencia de solución óptima de los siguientes problemas

i)

$$P) \quad \text{máx} \quad x_1 x_2$$

$$\begin{aligned} s.a. \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 &\geq 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2^2 &\geq 2 \\ x_1 &\geq 1 \end{aligned}$$

ii)

$$P) \quad \text{máx} \quad -x^2 - y$$

$$\begin{aligned} s.a. \\ x^2 - 10x - 2y &\leq 6 \\ x + y &\geq 1 \end{aligned}$$

b) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y sea c una constante. Muestre, utilizando las definiciones de función convexa y conjunto convexo que el conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$ es convexo.

c) Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Considere la transformación afín $y = Ax + b$ con $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in R^m$. muestre que $Y := \{y \in \mathbb{R}^m : y = Ax + b, x \in X\}$ es convexo. Nota: b es cualquier vector en $\mathbb{R}^m$ y A es cualquier matriz en $\mathbb{R}^{n \times m}$.

d) Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Considere la transformación afín $x = Ay + b$ con $y \in \mathbb{R}^m$ e $x \in R^n$. muestre que $T := \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in X \text{ con } x = Ay + b, \}$ es convexo. Nota: b es cualquier vector en $\mathbb{R}^n$ y A es cualquier matriz en $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Solución Problema 2.

a) *i*) En primer lugar debemos comprobar si el dominio es acotado y no vacío. Para esto, basta con graficar el dominio:

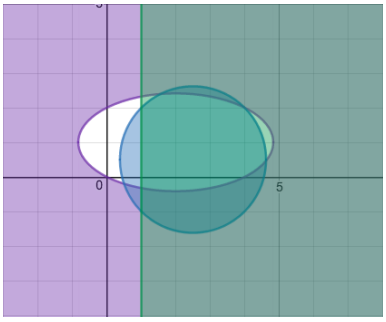


Figura 1: Gráfico Pregunta 2a)i)

Además, la función objetivo es continua en el dominio. Finalmente el dominio es cerrado. Luego, el problema tiene solución óptima.

ii) La función objetivo es continua y el dominio es cerrado. Graficamos el dominio:
Podemos ver que el dominio es no vacío y no es acotado. Sin embargo, en el problema equivalente de minimización, $f(x, y) \to \infty$ con $(x, y) \to \infty$. Luego, por el teorema de la Hipótesis H el problema tiene solución óptima.

b) Sean $x, y \in D = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < c\}$ y $\lambda \in [0, 1]$. Queremos mostrar que $z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in D$.

$$\begin{aligned} f(z) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) && \text{, ya que } f \text{ es una función convexa} \\ &\leq \lambda c + (1-\lambda)c && \text{, ya que } x, y \in D \\ &= c \end{aligned}$$

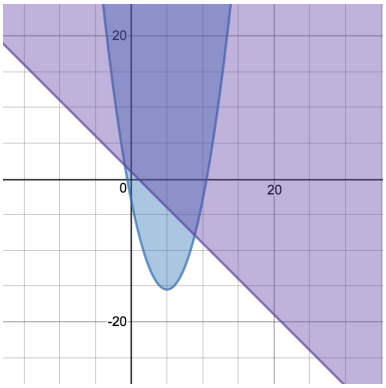


Figura 2: Gráfico Pregunta 2a)ii)

Por lo tanto, $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in D$, luego, D es un conjunto convexo.

c) Sean $y_1, y_1 \in Y$ y $x_1, x_2 \in X$. Para mostrar que Y es convexo, debemos mostrar que $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in Y$, con $\lambda \in [0,1]$. Sean, $y_1 = Ax_1 + b$ e $y_2 = Ax_2 + b$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 &= \lambda(Ax_1 + b) + (1-\lambda)(Ax_2 + b) \\ &= \lambda Ax_1 + \lambda b + (1-\lambda)Ax_2 + (1-\lambda)b \\ &= A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + b \end{aligned}$$

Como X es convexo, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$. Además, como A y b son una matriz y un vector constantes, y una constante por algo convexo más una constante sigue siendo convexo, $A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + b$ es convexo. Luego, $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$ es convexo y por lo tanto, el conjunto Y también lo es.

d) Sean $y_1, y_1 \in T$ y $x_1, x_2 \in X$. Para mostrar que Y es convexo, debemos mostrar que $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in T$, con $\lambda \in [0,1]$. Sean, $x_1 = Ay_1 + b$ y $x_2 = Ay_2 + b$. Si despejamos Ay_1 y Ay_2 obtenemos:

$$x_1 - b = Ay_1$$

$$x_2 - b = Ay_2$$

La matriz A es una matriz constante, luego, basta con demostrar que $A(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$ es convexo. Así:

$$\begin{aligned} A(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) &= \lambda(x_1 - b) + (1-\lambda)(x_2 - b) \\ &= \lambda x_1 - \lambda b + (1-\lambda)x_2 - (1-\lambda)b \\ &= (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - b \end{aligned}$$

Como X es convexo, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$. Además, como b es un vector constante, $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - b$ también es convexo. Luego, $A(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$ es convexo y por lo tanto, el conjunto T también lo es.

Problema 3.

a) Considere el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{lll} P & \text{máx} & y - 2x \\ s.a. & & \\ & y - x & \leq 4 \\ & 3y - x & \leq 18 \\ & 4x - y & \leq 16 \\ & 3y + 5x & \geq 20 \\ & x, y & \geq 0 \end{array}$$

i) Haga un gráfico del problema P e indique sus puntos extremos.

ii) Resuelva gráficamente P e indique qué restricciones están activas en el punto óptimo.

iii) Considere el problema P' que es igual a P pero sin la tercera restricción ¿Tiene P' solución óptima?

b) Considere el poliedro del siguiente gráfico:

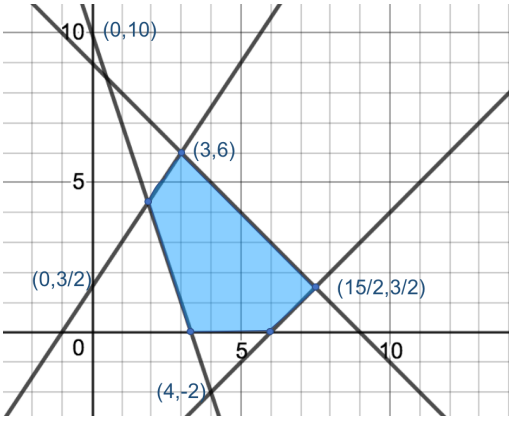


Figura 3: Gráfico Pregunta 2b)

i) Escriba un conjunto de restricciones que permitan definir a este poliedro

ii) Elija alguna función objetivo cuyo único minimizador sea el punto (6,0).

iii) Elija alguna función objetivo cuyo conjunto de minimizadores sea la combinación convexa de los puntos (3,6) y (15/2,3/2) sea solución óptima a su problema.

iv) Para su problema en *ii*) compruebe la optimalidad de la solución (6,0) a través de los criterios del algoritmo Simplex.

Solución Problema 3.

a) *i*) El gráfico del problema se puede ver en la Figura 4.

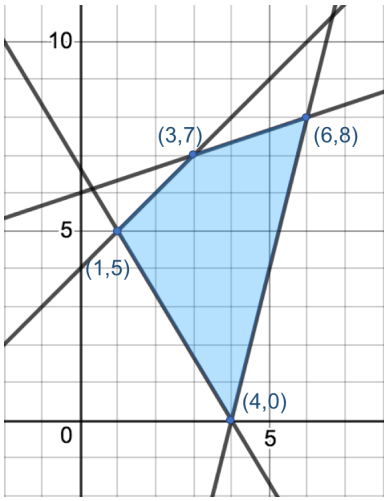


Figura 4: Gráfico Pregunta 3a)i)

ii) En la Figura 5 se pueden ver las curvas de nivel de la función objetivo. El punto $(1, 5)$ es el óptimo, con valor objetivo 3. Las restricciones que están activas en este punto son la 1 y la 4.

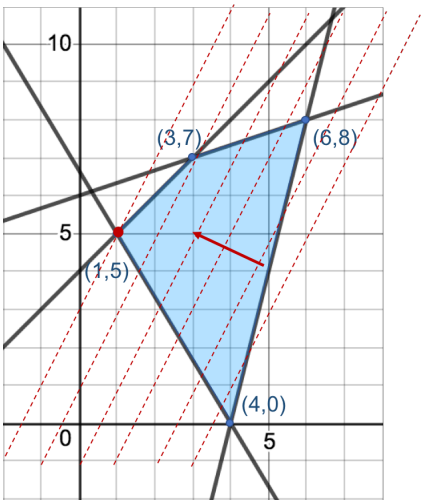


Figura 5: Gráfico Pregunta 3a)ii)

iii) Si se elimina la tercera restricción, el dominio de P' queda no acotado. Sin embargo, la función objetivo no se hace infinito en esa dirección, por lo que el problema P' tiene solución óptima y el punto óptimo encontrado en *ii*) se sigue manteniendo.

b) *i*) El conjunto de restricciones que definen al poliedro del gráfico son:

$$\begin{array}{rcl} x-y & \leq & 6 \\ -3x+2y & \leq & 3 \\ 3x+y & \geq & 10 \\ x+y & \leq & 9 \\ y & \geq & 0 \end{array}$$

ii) Existen infinitas opciones de función objetivo. Lo importante es que solo el punto (6,0) sea el óptimo. Un ejemplo puede ser $z = -x + 2y$. Luego, el problema de optimización quedaría de la siguiente forma:

$$P \qquad \text{mín} \qquad z = -x + 2y$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcl} x-y & \leq & 6 \\ -3x+2y & \leq & 3 \\ 3x+y & \geq & 10 \\ x+y & \leq & 9 \\ y & \geq & 0 \end{array}$$

iii) En este caso, se debe elegir la función objetivo con pendiente igual a la restricción $x + y = 9$, ya que esta contiene al segmento convexo que une a los puntos (3,6) y (15/2,3/2). Así, el problema de optimización lineal quedaría:

$$P \qquad \text{mín} \qquad -x - y$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcl} x-y & \leq & 6 \\ -3x+2y & \leq & 3 \\ 3x+y & \geq & 10 \\ x+y & \leq & 9 \\ y & \geq & 0 \end{array}$$

iv) Sean h_1, h_2, h_4 las holguras asociadas a las restricciones 1, 2 y 4 respectivamente y e_3 la variable de exceso asociada a la restricción 3. Las restricciones activas en el óptimo corresponden a la $R1$ y la no negatividad de la variable y, luego, $h_1 = 0$, $x = 6$, $y = 0$, $h_2 = 21$, $e_3 = 8$, $h_4 = 3$. Luego:

$$x_B = (x, h_2, e_3, h_4), x_R = (y, h_1)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \\ -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \bar{R} = (2,0) - (-1,0,0,0)\bar{R} = (1,1)$$

Como los costos reducidos son mayores a cero, el punto (6,0) es el óptimo, con valor óptimo -6.

Problema 4.

a) Considere el conjunto $P := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \quad \sum_{i=1}^n x_i \leq 2, \quad x_i \leq 2, \forall i \in n\}$. Muestre que es un politopo. Luego, describa a cada uno de sus vértices. ¿Exactamente, cuantos vértices posee?

b) Sea S el siguiente conjunto discreto de puntos en 2D:

$$S = \left\{(1,1), (2,\frac{5}{2}), (\frac{5}{2},\frac{3}{2}), (3,\frac{1}{2}), (\frac{7}{2},\frac{3}{2}), (\frac{7}{5},\frac{5}{2}), (4,0)\right\}$$

Defina a $Conv(S)$ como la *envoltura convexa* de S que representa el conjunto generado por toda posible combinación convexa de cualquier subcojunto de puntos en S. Dibuje $Conv(S)$ y muestre que es representable como un poliedro (obtenga un sistema de desigualdades que define el conjunto).

c) Considere un poliedro no vacío cualquiera $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ y defina a $C(P) = \{h \in \mathbb{R}^n : Ah \leq 0\}$ como su cono recesivo. Demuestre que $C(P)$ contiene un punto diferente al origen si y solo si P no es acotado.

d) Determine el cono recesivo de P, donde

$$P = \{x = (x_1, x_2) : x_1 - 4x_2 \leq 8, 2x_1 + x_2 \geq 4, -3x_1 + x_2 \leq -3\}$$

Luego, represente el dominio de P como la descomposición entre un cono y un polítopo, es decir, que cualquier punto perteneciente a P pueda ser escrito como la suma de un vector perteneciente al cono y un vector perteneciente al polítopo.

e) Considere el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{lccc} P & \text{mín} & x_1 - x_2 & \\ s.a. & & & \\ & -x_1 + x_2 & \geq & -3 \\ & x_1 + 2x_2 & \geq & -4 \\ & x_2 & \leq & 3 \end{array}$$

i) Formule P en su forma estándar

ii) Resuelva el problema P utilizando el algoritmo Simplex Fase II. Indique una solución y su valor óptimo.

iii) Resuelva el problema P usando *Python - Gurobi* y compruebe que la solución encontrada en *ii*) era correcta. No se pedirá ningún archivo digital, pero se tiene que entregar un pantallazo con un resumen de los resultados (valor objetivo, valor de las variables y tiempo de resolución).

Solución Problema 4.

a) El conjunto P es un polítopo ya que corresponde a un poliedro acotado. Las variables $x_i \geq 0$, $\forall i \in n$, es decir, están acotadas por abajo y $x_i \leq 2$, $\forall i \in n$, es decir, están acotadas por arriba. Luego, como P es un poliedro acotado, es un polítopo.
Los vértices de P son el origen y todos los vértices de la forma:

$$\begin{array}{c} (2,0,0,0,...,0) \\ (0,2,0,0,...,0) \\ (0,0,2,0,...,0) \\ ... \\ (0,0,0,0,...,2) \end{array}$$

P tiene exactamente $n+1$ vértices.

b) En la Figura 6 se pueden ver los puntos pertenecientes a S y la envoltura convexa de S.

El conjunto de desigualdades que componen el poliedro estará dado por las rectas azules de la figura. Así, el conjunto de restricciones que componen el poliedro son:

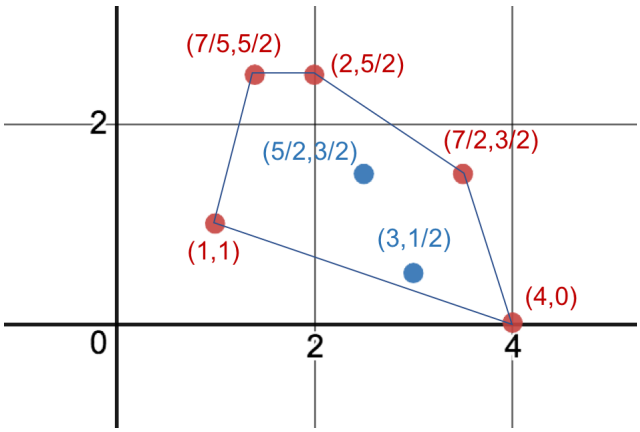


Figura 6: Gráfico Pregunta 4b)

$$\begin{array}{rcl} 15/4x - y & \geq & 11/4 \\ 1/3x + y & \geq & 4/3 \\ y + 3x & \leq & 12 \\ y + 2/3x & \leq & 23/6 \\ y & \leq & 5/2 \end{array}$$

c) Sea $h \neq 0$ dirección del cono recesivo $C(P)$, tal que $Ah \leq 0$. Sea $x' \in P$, tal que $Ax' \leq b$. Todo punto x se puede escribir como un punto en P más una dirección h en el cono. Luego,

$$x = x' + \lambda h \qquad \text{con } \lambda \geq 0 \text{ la distancia que se mueve el punto en la dirección } h$$

Como $Ax' \leq b$ y $Ah \leq 0$

$$Ax = A(x' + \lambda h) = Ax' + A\lambda h \leq b$$

Luego, como $Ax \leq b$, $x \in P$. Como $x = x' + \lambda h \in P$ para todo valor de $h \neq 0$, P es no acotado.

Por otro lado, se tiene $x' \in P$ tal que $Ax' \leq b$. Se asume que P es no acotado, luego, se puede garantizar que $x = x' + \lambda h \in P$ con $\lambda \geq 0$, para una dirección $h \neq 0$.
Como $x \in P$

$$Ax \leq b \iff Ax' + A\lambda h \leq b$$

Como $Ax' \leq b$ y $h \neq 0$, es necesario que $Ah \leq 0$. Luego, existe $h \neq 0$ que pertenece al cono recesivo de P, $C(P) = \{h \in \mathbb{R}^n : Ah \leq 0\}$. Demostrando lo pedido.

d) Para encontrar el cono recesivo de P debemos resolver el sistema $Ax \leq 0$, con A proveniente del poliedro P, representado de la forma $Ax \leq b$. Así, una posible descomposición es la siguiente:

- ◇ Cono: $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R^2} : x_1 - 4x_2 \leq 0, -3x_1 + x_2 \leq 0\}$
- ◇ Polítopo: $Po = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R^2} : 2x_1 + x_2 = 4, -3x_1 + x_2 \leq -3, x_1 - 4x_2 \leq 8\}$

e) *i)* Como las variables x_1 y x_2 son irrestrictas, se deben desagregar en dos variables, luego:

$$x_1 = x_1^+ - x_1^- : x_1^+, x_1^- \geq 0$$

$$x_2 = x_2^+ - x_2^- : x_2^+, x_2^- \geq 0$$

La forma estándar de P es

$$P \qquad \text{mín} \qquad x_1^+ - x_1^- - x_2^+ + x_2^-$$

$$
\begin{aligned}
s.a. & \\
x_1^+ - x_1^- - x_2^+ + x_2^- + h_1 &= 3 \\
-x_1^+ + x_1^- - 2x_2^+ + 2x_2^- + h_2 &= 4 \\
x_2^+ - x_2^- + h_3 &= 3 \\
x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, h_1, h_2, h_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

ii) En la primera iteración, comenzamos con las variables de holgura como variables básicas. Luego: Iteración 1:

$$x_B = (h_1, h_2, h_3), x_R = (x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \bar{R} = (1, -1, -1, 1) - (0, 0, 0)\bar{R} = (1, -1, -1, 1) \leq 0$$

Los costos reducidos de x_1^- y x_2^+ son negativos, por lo que alguna de estas debe entrar a la base. Se elegirá x_1^-. Según el criterio del mínimo cuociente debe salir la variable h_2.

Iteración 2:

$$x_B = (h_1, x_1^-, h_3), x_R = (x_1^+, h_2, x_2^+, x_2^-)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \bar{R} = (1, 0, -1, 1) - (0, -1, 0)\bar{R} = (0, 1, -3, 3) \leq 0$$

El costo reducido de x_2^+ es negativo, por lo que debe entrar a la base. Según el criterio del mínimo cuociente debe salir la variable h_3.

Iteración 3:

$$x_B = (h_1, x_1^-, x_2^+), x_R = (x_1^+, h_2, h_3, x_2^-)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \bar{R} = (1, 0, 0, 1) - (0, -1, -1)\bar{R} = (0, 1, 3, 0) \geq 0$$

Los costos reducidos son mayores o iguales a 0, por lo que nos encontramos en el ótpimo. Luego, el óptimo corresponde a $x_1^+ = 0$, $x_1^- = 10$, $x_2^+ = 3$, $x_2^- = 0$, $h_1 = 16$,$h_2 = 0$ y $h_3 = 0$. En las variables originales del problema, el punto óptimo es $(x_1, x_2) = (-10, 3)$ con valor óptimo $z = -13$.

iii) El código de *Python – Gurobi* se encuentra en la Figura 7. Los resultados de la modelación se encuentran en la Figura 8. Se puede ver que la solución encontrada en *ii*) era la correcta.

```python
from gurobipy import Model, GRB

m = Model()

x_1 = m.addVar(name="x_1", lb=-100)
x_2 = m.addVar(name="x_2", lb=-100)

m.update()

m.setObjective(x_1-x_2, GRB.MINIMIZE)

m.addConstr(-x_1+x_2 >= -3)
m.addConstr(x_1+2*x_2 >= -4)
m.addConstr(x_2 <= 3)

m.optimize()

m.printAttr("X")
```

Figura 7: Código Pregunta 4e)iii)

```
/Library/Frameworks/Python.framework/Versions/3.6/bin/python3 "/Users/ma
Academic license - for non-commercial use only
Optimize a model with 3 rows, 2 columns and 5 nonzeros
Coefficient statistics:
  Matrix range     [1e+00, 2e+00]
  Objective range  [1e+00, 1e+00]
  Bounds range     [1e+02, 1e+02]
  RHS range        [3e+00, 4e+00]
Presolve removed 3 rows and 2 columns
Presolve time: 0.00s
Presolve: All rows and columns removed
Iteration    Objective       Primal Inf.    Dual Inf.      Time
       0   -1.3000000e+01   0.000000e+00   0.000000e+00      0s

Solved in 0 iterations and 0.00 seconds
Optimal objective -1.300000000e+01

    Variable            X
-------------------------
        x_1          -10
        x_2            3

Process finished with exit code 0
```

Figura 8: Resultado Pregunta 4e)iii)

Problema 5. Propuesto

Esta pregunta no debe ser entregada, se recomienda estudiarla para entrenar modelación.

La fábrica de joyas *Silver* ha decidido implementar otra fábrica de joyas, esta vez para entrar al mundo del consumo masivo. Luego de un estudio de mercado y de una investigación de producción, ha decidido producir distintas joyas. Las joyas a producir se encuentran en el conjunto J. Estas joyas serán producidas en máquinas, que se encuentran en el conjunto M, $M = \{1, \ldots, K\}$. Cada una de las joyas debe ser procesada en orden por las máquinas, es decir, en primer lugar, por la máquina 1, después máquina 2,..., hasta la K. El problema, es que las distintas joyas se demoran un tiempo diferente en ser procesadas por cada máquina, dependiendo de sus atributos particulares. Así, el tiempo de procesamiento de la joya j con $j \in J$ en la máquina m, con $m \in M$ es de t_{jm}.
Para diseñar esta planta, se requiere que el proceso sea eficiente. El objetivo es minimizar el tiempo requerido en la fábrica para procesar todas las joyas.

a) Formule un modelo de programación lineal entera mixta que permita planificar una agenda eficiente de procesamiento de las joyas en las máquinas.

La capacidad productiva de la planta depende de los trabajadores que operen las distintas máquinas. Sea p el presupuesto que *Silver* destina a realizar entrenamientos a los trabajadores sobre la operación

de las distintas máquinas. El entrenamiento del trabajador que opera la máquina m tiene un costo de c_m, con $m \in M$. Si se capacita al trabajador de la máquina m, el tiempo de producción de la joya j en la máquina m disminuye en f_{jm}.

b) Modifique su respuesta de la parte a) para incluir el entrenamiento de los trabajadores

Solución Problema 5.

a) Conjuntos

$$J : \text{joyas},$$
$$M : \text{máquinas},$$

Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se produce la joya } j \text{ después de la joya } i, \text{ con } i, j \in J \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$h_{jm} = \text{tiempo de comienzo del proceso de la joya } j \text{ en la máquina } m, \text{ con } j \in J, m \in M$$
$$\alpha = \text{tiempo en que se termina de procesar la última joya en la última máquina}$$

Función Objetivo

$$Min \quad \alpha$$

Restricciones

1) Definición de α

$$\alpha \geq h_{jK} + t_{jK}, \qquad \forall j \in J$$

2) Se debe pasar por las máquinas en orden

$$h_{j,m+1} \geq h_{jm} + t_{jm}, \qquad \forall j \in J, m \in \{1, ..., K-1\}$$

3) Solo se puede usar la máquina cuando está desocupada

$$h_{jm} \geq h_{im} + t_{im} - (1 - x_{ij})Q, \qquad \forall i, j \in J, m \in M, Q >> 0$$

Se crean los extremos del conjunto de joyas J, $j = 0$ y $j = J + 1$ para definir la ruta que deben seguir las joyas. Sea S el subconjunto de las joyas de la 0 a la $J + 1$.

4) Cada joya se produce después de otra

$$\sum_{j=0, i\neq j}^{J+1} x_{ij} = 1, \qquad \forall i \in J$$

5) Cada joya se produce antes de otra

$$\sum_{i=0, i\neq j}^{J+1} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \in J$$

6) Que no se produzcan subcircuitos

$$\sum_{i,j\in U} x_{ij} \leq \mid U \mid -1, \qquad \forall U \subseteq S \text{ t.q. } 2 \leq \mid U \mid \leq J-2$$

7) Condición de borde

$$x_{J+1,0} = 1,$$

8) Naturaleza de las variables

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall i,j \in J$$

$$h_{jm} \geq 0, \qquad \forall j \in J, m \in M$$

$$\alpha \geq 0,$$

b) Se debe agregar la variable:

$$y_m = \begin{cases} 1 & \text{Si se entrena al operario de la máquina } m, \text{ con } m \in M \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Las restricciones 1, 2 y 3 deben cambiar a:

1) Definición de α

$$\alpha \geq h_{jK} + t_{jK} - f_{jK} y_K, \qquad \forall j \in J$$

2) Se debe pasar por las máquinas en orden

$$h_{j,m+1} \geq h_{jm} + t_{jm} - f_{jm} y_m, \qquad \forall j \in J, m \in \{1, ..., K-1\}$$

3) Solo se puede usar la máquina cuando está desocupada

$$h_{jm} \geq h_{im} + t_{im} - f_{im} y_m - (1 - x_{ij})Q, \qquad \forall i,j \in J, m \in M, Q >> 0$$

Además, se deben agregar las restricciones:

9) Respetar presupuesto

$$\sum_{m=1}^{K} y_m c_m \leq p, \qquad \forall m \in M$$

10) Naturaleza variable y_m

$$y_m \in \{0, 1\}, \qquad \forall m \in M$$