PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2025 - 2
Profesores: M. Castro - R. Cuadrado
M. Klapp - M. Villafranca

**Examen**

Duración: 180 minutos.

# Instrucciones

- **Durante la prueba se exigirá una identificación oficial** (con foto), por ejemplo: CI, TUC, pase escolar, etc. También deberá firmar la lista de asistencia a la prueba.
- **Escriba su nombre completo, sección, número de lista en la primera hoja.** Además, escriba número de lista en cada hoja. No seguir estas instrucciones será penalizada con 2 décimas en la prueba.
- **Al finalizar la prueba**, cada estudiante debe:
  (a) **Escanearla y entregarla como PDF a CANVAS** en el buzón "Examen" que estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 15 minutos después de su hora de término. Un escaneo ilegible o incompleto no será corregido.
  (b) **Entregar la copia física** como respaldo al equipo de ayudantes. Una prueba sin respaldo físico será calificada con nota 1.
- **Sistema de Calificación:** La prueba tiene 60 puntos. Sean $P$ y $P_1$ los puntajes obtenidos en toda la prueba y solamente en la pregunta 1, respectivamente. La Nota de la Interrogación será igual a:

$$\text{Nota Interrogación} = \begin{cases} \text{mín}\{P/10+1,\ 3\}, & \text{si } P_1 \in [0,3], \\ \text{mín}\{P/10+1,\ \frac{2}{3}P_1+1\}, & \text{si } P_1 \geq 3 \end{cases}$$

  donde $P_1$ es el puntaje obtenido en dicha pregunta.
- **Otras consideraciones:**
  - La prueba es estrictamente individual.
  - Escribir respuestas en la prueba después de su término se penalizará con nota mínima en la pregunta o, incluso, en toda la prueba a criterio del equipo docente.
  - Se prohíbe el uso de dispositivos electrónicos (celular, calculadoras, computador, smart watch, etc.) durante la prueba. Solo se permite ocupar un dispositivo electrónico para escanear y subir su prueba a CANVAS.
  - Si termina antes de tiempo, entonces favor avisar a un miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba.

## Pregunta 1 (15 puntos)

El Ministerio de Energía quiere determinar la ubicación y capacidad de diferentes centrales eléctricas para satisfacer la demanda energética de nuevas empresas mineras en el norte de Chile. El conjunto $I = \{1, ..., n\}$ representa las posibles ubicaciones de centrales eléctricas, donde $K_i^{min}$ y $K_i^{max}$ kWh (kiloWatt por hora) son las capacidades eléctricas mínimas y máximas, respectivamente, que puede tener la central en la ubicación $i \in I$. Considere que construir una central en la ubicación $i \in I$ tiene un costo fijo $f_i$ y un costo variable de $g_i$ por cada kWh de capacidad de dicha central. Además, solo se puede construir una única central en cada ubicación.

A su vez, $J = \{1, ..., m\}$ es el conjunto de empresas que demandan energía, donde $d_j$ es la cantidad de energía demandada por la empresa $j \in J$ en kWh. La demanda de cada empresa debe ser completamente atendida por una única central. Finalmente, existe un costo $c_{ij}$ por abastecer a la empresa $j \in J$ desde la central ubicada en $i \in I$. Se desea minimizar la suma total de los costos.

Un ingeniero ha creado un modelo de **programación NO-lineal entero mixto** para resolver el problema. La variable $y_i \in \{0, 1\}$ indica si se construye una central en la ubicación $i \in I$, la variable $z_i \geq 0$ representa la capacidad efectiva a instalar de la central en dicha ubicación, y la variable $x_{ij} \in \{0, 1\}$ indica si la central en la ubicación $i \in I$ atiende la demanda de la empresa $j \in J$.

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i(f_i + z_i g_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in J \tag{1a}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} d_j \leq z_i y_i \qquad \forall i \in I \tag{1b}$$

$$K_i^{min} \leq z_i \leq K_i^{max} \qquad \forall i \in I \tag{1c}$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I,\ j \in J$$

La función objetivo minimiza los costos de asignación y de construcción (fijos y variables). La restricción (1a) asegura que cada empresa esté conectada a una sola central. La restricción (1b) asegura que no se sobrepase la capacidad de cada central construida y, a la vez, que no se asignen empresas a ubicaciones donde no se construirá una central. La restricción (1c) modela el rango de valores posibles de capacidad eléctrica para las centrales en cada posible ubicación.

Se sabe que este modelo es correcto, pero es no-lineal y no puede resolverse eficientemente

con las herramientas computacionales disponibles para optimización lineal entera-mixta.

(a) **(5 puntos)** Formule un modelo equivalente de optimización lineal entera-mixta. Puede crear nuevas variables si lo estima conveniente, pero no es necesario. Explique claramente sus cambios.

**Solución:** El modelo tiene términos no lineales en la función objetivo y la restricción (1b). Se pueden arreglar ambas no-linealidades forzando mediante restricciones que $z_i = 0$ si $y_i = 0$, es decir, solo se asigna capacidad si efectivamente se construye una central en la ubicación $i \in I$. El modelo resultante es:

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}(y_i f_i + z_i g_i) & \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & \forall j \in J \\
& \sum_{j=1}^{m} x_{ij} d_j \leq z_i & \forall i \in I \\
& z_i \leq K_i^{max} y_i & \forall i \in I \\
& z_i \geq K_i^{min} y_i & \forall i \in I \\
& x_{ij}, y_i \in \{0,1\} & \forall i \in I,\ j \in J
\end{aligned}$$

Notar que el problema resultante cumple con todas las restricciones descritas. Esta es solo una alternativa correcta y podría haber varias otras.

**Nota de corrección**:

- ◇ 2 puntos por corregir correctamente la función objetivo
- ◇ 3 puntos por corregir correctamente las restricciones.

(b) **(10 puntos)** Asumiendo que formula un modelo equivalente de optimización lineal entera-mixta, agregue o modifique restricciones (y posiblemente variables o función objetivo) para modelar las siguientes condiciones adicionales. **Su modelación debe ser lineal**. Responda cada caso de forma independiente.

(i) **(2 puntos)** Cada central eléctrica construida debe estar asignada a al menos una empresa.

**Solución:**

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall i \in I$$

Otra opción que refuerza la relación entre las variable $x$ e $y$ (es decir, asignar empresas y centrales abiertas) es

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geq y_i \qquad \forall i \in I$$

**Nota de corrección**: 2 puntos totalmente correctos. 1 punto por errores menores.

(ii) **(4 puntos)** Al menos una de las centrales debe ser instalada con su capacidad máxima de generación energética (es decir, $K_i^{max}$).

**Solución:** Definimos la nueva variable binaria $u_i \in \{0, 1\}$ que vale uno si la central en la ubicación $i$ se construye con su máxima capacidad efectiva, es decir, si $z_i = K_i^{max}$. Se deben agregar las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \geq 1$$
$$u_i K_i^{max} \leq z_i$$

La primera restricción asegura la pedido y la segunda fuerza que $z_i = K_i^{max}$ cuando $u_i = 1$. También se puede modelar la implicación para el otro lado (es decir, $z_i = K_i^{max} \Rightarrow u_i = 1$), pero no es necesario en el contexto del problema.

**Nota de corrección**:

- ◇ 1 punto por definir nueva variables
- ◇ 1 punto por la primera restricción
- ◇ 2 puntos por relacionar correctamente $u_i$ con $z_i$

(iii) **(4 puntos)** Asuma que el conjunto de ubicaciones posibles $I$ está dividido en dos subconjuntos $S_1$ y $S_2$ disjuntos llamados sectores, es decir, $I = S_1 \cup S_2$ con $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. El conjunto $S_k$ contiene las ubicaciones del sector $k \in \{1, 2\}$.

En cada sector debe instalar al menos una central eléctrica. Además, la diferencia del número de empresas atendidas por centrales en cada sector debe ser menor o igual a dos.

**Solución:**

Podemos definir una variable auxiliar $w_k$ que representa la cantidad de empresas asociadas a centrales del sector $k \in \{1, 2\}$

$$\sum_{i \in S_k} y_i \geq 1 \qquad \forall k \in \{1,2\}$$

$$w_k = \sum_{i \in S_k} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \qquad \forall k \in \{1,2\}$$

$$w_1 - w_2 \leq 2$$

$$w_1 - w_2 \geq -2$$

La primera restricción modela que cada sector tenga al menos una central. La segunda cuenta la cantidad de empresas asociadas a cada sector (es decir, define $w_k$). Finalmente, las últimas dos restricciones modelan que la diferencia no sea mayor a 2, es decir, $|w_1 - w_2| \leq 2$, lo cual es no lineal. Además, observar que no es necesario definir las variables $w_k$, ya que se puede reemplazar dichas variables por su definición dada en la segunda restricción.

**Nota de corrección**:

- 2 puntos por la primera restricción
- 2 puntos por modelar correctamente la condición de las diferencias. Descontar 2 puntos si ponen el valor absoluto y no linearizan. Recordar que no es necesario definir $w_k$ y solo se puso en la pauta porque es más claro.

## Pregunta 2 (12 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización con 1113 variables de decisión:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + x_2 + \ldots + x_{1113} \\ \text{s.a.} \quad & a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_{1113} \cdot x_{1113} = 1, \\ & x_1, x_2, \ldots, x_{1113} \geq 0, \end{aligned}$$

tal que $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{1113}$.

(a) **(4 puntos)** Plantee su problema dual e identifique la solución óptima del dual.

**Solución:** El dual es:

$$\begin{aligned} & \text{máx}\, y \\ & \text{s.a. } y \cdot a_i \leq 1, \forall i = 1, \ldots, 1113 \end{aligned}$$

Luego es claro que $y^* = \text{mín}_i\{1/a_i\} = 1/a_{1113}$.

(b) **(4 puntos)** Identifique una solución óptima para el problema original. Justifique.

**Solución:** Con la información óptima dual de holguras (que son costos reducidos primales), la única variable que puede estar en base al tener costo reducido cero es $x_{1113}$. Luego $x_{1113} = 1/a_{1113}$ para cumplir la restricción.

La solución óptima es $(0, \ldots, 0, 1/a_{1113})$.

(c) **(4 puntos)** Demuestre que la solución óptima es única mediante condiciones de optimalidad para problemas de optimización lineal continua.

**Solución:**

Cada costo reducido fuera de base ($i = 1, .., 1112$) es:

$$r_i = c_i - c_B^T \cdot A_B^{-1} A_i$$

En este caso:

$$r_i = 1 - \frac{a_i}{a_{1113}},$$

Como $a_i < a_{1113}$ se cumple que $r_i > 0$ y la solución es única.

**Nota de corrección**: Esto se puede ver también de las holguras del dual (qiue son los costos reducidos primales).

## Pregunta 3 (13 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización lineal con variables continuas:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \geq 1, \\ & x_1 + x_3 \geq 1, \\ & x_2 + x_3 \geq 1, \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 3. \end{aligned}$$

(a) **(5 puntos)** Muestre que el problema de optimización admite solución óptima.

**Solución:** El problema claramente admite solución factible (por ejemplo, $(1, 1, 1)$ es factible). Luego, hay dos opciones: (1) el problema de optimización está acotado o (2) se puede minimizar infinitamente la función objetivo en el dominio.

Para que se cumpla el caso (2) debe existir un rayo $y = (y_1, y_2, y_3)$ de escape (es, decir, un rayo del cono recesivo del poliedro) que posea producto interno negativo con el vector de costos (es decir, produce una mejora en el objetivo). Lo solicitado equivale a:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &\geq 0, \\ y_1 + y_3 &\geq 0, \\ y_2 + y_3 &\geq 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 &\geq 0 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 &< 0 \end{aligned}$$

Claramente esto es imposible, pues si sumamos la segunda restricción más dos veces la tercera nos queda: $y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 0$ Lo que contradice la cuarta. Luego, el objetivo debe estar acotado y debe existir solución óptima.

(b) **(5 puntos)** Identifique todos los vértices del dominio.

**Solución:** Los vértices surgen de activar 3 restricciones y luego verificar que se cumpla la cuarta.

- ◇ Activando las primeras tres queda $x^1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, que viola la cuarta rectricción y, por lo tanto, no es vértice.
- ◇ Activando todas menos la primera queda $x^2 = (2, 2, -1)$ que cumple con la primera restricción y, por lo tanto es vértice.
- ◇ Por simetría los otros dos vértices son: $x^3 = (2, -1, 2)$ y $x^4 = (-1, 2, 2)$.

Luego, el conjunto de vértices del dominio es:

$$\{(2, 2, -1); (2, -1, 2); (-1, 2, 2)\}$$

(c) **(3 puntos)** Determine el conjunto de sus soluciones óptimas y el valor óptimo del problema.

**Solución:** El valor óptimo de ser alcanzado en al menos un vértice. Para determinar en cual, basta evaluar las tres opciones:

- ◇ $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot -1 = 3$
- ◇ $1 \cdot 2 + 2 \cdot -1 + 3 \cdot 2 = 6$
- ◇ $1 \cdot -1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 9$

Luego el único vértice óptimo y, por lo tanto, solución óptima única es $x^* = (2, 2, -1)$.

## Pregunta 4 (5 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización lineal con variables enteras no negativas:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 5x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ & 5x_1 + 9x_2 + x_3 + 4x_4 = 45, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \quad .$$

Suponga que usted ejecuta el algoritmo simplex sobre este problema ignorando las restricciones de integralidad en las variables y obtiene el siguiente problema equivalente:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \frac{165}{4} - \frac{9}{4}x_3 - \frac{9}{4}x_4 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + \frac{17}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_4 = \frac{9}{4}, \\ & x_2 - \frac{9}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{15}{4}, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Derive un plano cortante de Gomory para el problema original con variables enteras.

**Solución:** Para construir el corte de gomory esta se puede construir a través del sistema en formato despejado desde cada restricción en la cual se tiene una variable no basica con valor fraccionario. En este caso nos damos cuenta que ambas variables básicas tienen valor fraccionario por lo que de la primera restricción obtenemls el siguiente corte:
$(\frac{17}{4} - \frac{16}{4})x_3 + (\frac{5}{4} - \frac{4}{4}) \geq \frac{9}{4} - \frac{8}{4}$
$\frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 >= \frac{1}{4}$
$x_3 + x_4 \geq 1$

De la segunda restricción se obtiene
$(\frac{-9}{4} - -\frac{8}{4})x_3 + (\frac{-1}{4} - \frac{-4}{4}) \geq \frac{15}{4} - \frac{12}{4}$
$\frac{3}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 >= \frac{3}{4}$
$x_3 + x_4 \geq 1$

Nota corrección: para conseguir los 5 puntos basta con indicar 1 de los 2 cortes de gomory.

## Pregunta 5 (15 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización no lineal irrestricta:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \quad (2x_2 - 1 + x_1)^4 + \sqrt{1 + x_1^2}$$

(a) **(2 puntos)** Demuestre que admite solución óptima.

**Solución:** La función es continua en $\mathbb{R}^2$ y es coercitiva, ya que $f(x) \to \infty$ cuando $|x| \to \infty$. Por lo tanto, como el dominio es cerrado y no vacío (al ser irrestricto), el problema admite solución óptima por Bolzano–Weierstrass extendido.

(b) **(4 puntos)** Demuestre que la función $f$ es convexa para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

**Solución:** El Hessiano de la función es

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} 12(2x_2 - 1 + x_1)^2 + \frac{1}{(1+x_1^2)^{3/2}} & 24(2x_2 - 1 + x_1)^2 \\ 24(2x_2 - 1 + x_1)^2 & 48(2x_2 - 1 + x_1)^2 \end{bmatrix}.$$

Todos sus menores (determinantes de $1 \times 1$ y $2 \times 2$) son no-negativos. Por lo tanto, el Hessiano es semidefinido positivo en todo $\mathbb{R}^2$, lo que implica que $f$ es convexa.

**Nota de corrección**: Puede haber una demostración por definición formal o demostrando que todo hiperplano tangente está por debajo de la F.O. También se puede demostrar que el epígrafe es convexo.

(c) **(3 puntos)** Encuentre una solución óptima de este problema

**Solución:** Como la función es convexa, basta resolver las condiciones necesarias de primer orden:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4(2x_2 - 1 + x_1)^3 + \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} \\ 8(2x_2 - 1 + x_1)^3 \end{bmatrix} = 0.$$

El único punto que satisface estas condiciones es $x^* = (0, \frac{1}{2})$.

(d) **(6 puntos)** Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \quad & (2x_2 - 1 + x_1)^4 + \sqrt{1 + x_1^2} \\ \text{s.a.} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_2 - x_1 \geq -1 \end{aligned}$$

Escriba sus condiciones de KKT, determine su solución óptima y muestre que cumple las condiciones de KKT.

**Solución:** Las condiciones KKT son las siguientes:

$$\begin{aligned} & 4(2x_2 - 1 + x_1)^3 + \frac{x_1}{\sqrt{1 + x_1^2}} + 3\mu_1 + \mu_2 = 0 \\ & 8(2x_2 - 1 + x_1)^3 + \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ & 3x_1 + x_2 - 6 \leq 0 \\ & (3x_1 + x_2 - 6)\mu_1 = 0 \\ & x_1 - x_2 - 1 \leq 0 \\ & (x_1 - x_2 - 1)\mu_2 = 0 \\ & \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La solución óptima es $x^* = (0, \frac{1}{2})$ (¡el óptimo irrestricto es factible!)

Este es un punto interior con gradiente nulo, por lo que claramente cumple KKT ($\mu^* = (0, 0)$)

**Nota de corrección**: 3 puntos por las condiciones KKT correctas. 3 puntos por encontrar la solución óptima

**Ayuda:** La función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, tiene una derivada de

$$f'(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}.$$

**Tabla de dualidad:**

| Minimización | Maximización |
|---|---|
| Variables | Restricciones |
| $\geq 0$ | $\leq$ |
| $\leq 0$ | $\geq$ |
| Irrestrictas | $=$ |
| Restricciones | Variables |
| $\leq$ | $\leq 0$ |
| $\geq$ | $\geq 0$ |
| $=$ | Irrestrictas |