PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2023 - 2
Profesores: M. Castro - M. Klapp - G. Perez - E. Salgado

**Examen Final**
Duración: 150 minutos.

## Instrucciones

- **Deben rellenar sus datos en cada hoja de su prueba**.
- Deben responder cada **pregunta en hojas separadas**.
- La evaluación es **individual**.
- Está **prohibido escribir respuestas después de finalizar el tiempo de desarrollo**. Se penalizará con puntaje de la prueba a los estudiantes que no cumplan con esta regla.
- Al finalizar, cada estudiante debe **escanear su prueba y cargarla** en formato PDF a CANVAS en el buzón "Examen ICS1113". El buzón estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 10 minutos después determinar el tiempo de desarrollo de la prueba.
- **Debe entregar la prueba física** antes de irse: esta es la versión que será corregida. El PDF subido a CANVAS es una copia de seguridad.
- Está **prohibido el uso de dispositivos electrónicos** durante el desarrollo de la prueba. Solo pueden ocupar un dispositivo electrónico al momento de escanear y subir su prueba a CANVAS.
- Si un estudiante termina antes de finalizar el tiempo de desarrollo, debe avisar a algún miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba a CANVAS en su puesto.
- Favor acercarse a un miembro del equipo docente en caso de cualquier inconveniente técnico durante el escaneo de la prueba.
- Se aplicará un descuento a la nota final de la evaluación por el incumplimiento de una o más de las instrucciones anteriores.

## Pregunta 1 (15 puntos)

El gobernador de una región le ha pedido desarrollar un modelo para evacuar personas en caso de un desastre natural (por ejemplo, un incendio forestal o inundación). La región se divide en $n$ sectores y dispone de $m$ refugios definidos por en los conjunto $I = \{1, ..., n\}$ y $J = \{1, ..., m\}$, respectivamente. Las evacuación se efectúa en un horizonte de tiempo $T = \{1, ..., H\}$ compuesto por $H$ periodos, donde al comienzo de cada periodo $t \in T$ hay una cantidad $d_{it}$ de personas en el sector $i \in I$ que debe evacuarse a algún refugio en $J$ en dicho periodo. Considera que las personas representadas por la cantidad $d_{it}$ pueden ir todas al mismo refugio o pueden ser divididas en más de un refugio. Por periodo, cada refugio $j \in J$ posee capacidad para $K_j$ personas. Cada persona puede estar en un solo refugio desde que es evacuada y debe permanecer en dicho refugio hasta el último periodo de tiempo (es decir, $t = H$). Inicialmente ($t = 0$), todos los refugios están vacíos.

A usted se le pide un modelo que ayude a decidir cuantas personas del sector $i \in I$ son trasladas al refugio $j \in J$ en cada periodo de tiempo. Asuma que el tiempo de traslado es despreciable. Además, su modelo debe minimizar el costo operacional de la evacuación. Considere que trasladar a una persona desde el sector $i \in I$ al refugio $j \in J$ en cada periodo $t \in T$ cuesta $\$c_{ijt}$. Además, cuesta $\$f_{jt}$ mantener a una persona en el refugio $j \in J$ durante el periodo $t \in T$.

(a) **(9 puntos)** Formule un modelo de programación lineal entero mixto que represente este problema describiendo claramente todos sus componentes (variables, restricciones y función objetivo). Defina y explique cualquier notación adicional.

**Solución:** Variables:

- $x_{ijt} \in \mathbb{Z}_+$: cantidad de personas evacuadas desde el sector $i \in I$ al refugio $j \in J$ en el periodo $t \in T$.
- $y_{jt} \in \mathbb{Z}_+$: Cantidad de personas en el refugio $j \in J$ en el periodo $t \in T$.

Modelo:

$$\text{mín} \sum_{t\in T}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ijt}x_{ijt} + \sum_{t\in T}\sum_{j\in J} f_{jt}y_{jt}$$

$$\text{s.a.} \sum_{j\in J} x_{ijt} = d_{it} \qquad \forall i \in I,\ t \in T \qquad \text{(1a)}$$

$$y_{jt} = y_{jt-1} + \sum_{i\in I} x_{ijt} \qquad \forall j \in J, t \in \{2, ..., H\} \qquad \text{(1b)}$$

$$y_{j1} = \sum_{i\in I} x_{ij1} \qquad \forall j \in J, \qquad \text{(1c)}$$

$$y_{jt} \leq K_j \qquad \forall j \in J,\ t \in T \qquad \text{(1d)}$$

$$x_{ijt}, y_{jt} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall i \in I,\ j \in J,\ t \in T \qquad \text{(1e)}$$

La función objetivo considera los costos de transporte y los costos operacionales de cada refugio por cantidad de personas. La restricción (1a) indica que todas las personas que necesitan evacuar deben ser asignadas a un refugio. Las restricciones (1b) e (1c) modelan la cantidad de personas en cada refugio y periodo, mientras que (1d) fuerza la capacidad de cada refugio a lo largo del horizonte de tiempo.

**Observaciones:**

- Como siempre, hay varias formas de hacer el modelo.
- La variable $y_{jt}$ no es necesaria porque se puede expresar como:

$$y_{jt} = \sum_{s=1}^{t}\sum_{i\in I} x_{ijs} \qquad \forall j \in J, t \in T$$

  Sin embargo, lo pusimos en la pauta porque es más fácil de interpretar lo que está pasado y es mucho más intuitivo de esta manera.
- Se pueden combinar (1b) e (1c) definiendo $y_{j0} = 0$ para todo $j \in J$.

**Distribución puntaje:**

- 2 punto por definir los dos grupos mínimos de variables y naturaleza de las variables. Variables auxiliares o extra no tienen puntaje. Descontar 0.5 si se consideran las variables continuas.
- 1 punto por función objetivo.
- 2 punto restricción de demanda. Se considera buena si ponen >= porque el valor óptimo no cambia.

- ◇ 2 puntos por restricción de inventario, es decir, contar personas en el refugio de alguna manera.
- ◇ 2 punto la restricción de capacidad.

Se dará puntaje total, parcial o cero siguiendo los siguientes criterios. No se puede obtener puntajes intermedios que no sean estos.

- ◇ Todo el puntaje si esta totalmente correcto
- ◇ Puntaje parcial si hay errores menores, es decir, faltó algún detalle, pero iba bien encaminado. No poner puntaje decimal diferente a 0.5 o 1.5 en cada item (es decir, no se puede poner 1.25 o 0.33 puntos).
- ◇ Cero puntos si no está lo pedido en el modelo o si hay errores mayores. Por ejemplo, multiplicación de variables, falta una sumatoria o un "para todo".

Agregar restricciones inválidas, es decir, que restringen más allá el dominio de lo solicitado produce un descuento de 2 puntos en el puntaje de la pregunta.

(b) **(6 puntos)** Ahora, le piden que cambie su modelo para que incluya la decisión de abrir o no un refugio. Considere que inicialmente ($t = 0$) todos los refugios están cerrados y solo pueden recibir personas si están abiertos. Si un refugio es abierto en un periodo $t \in T$, entonces debe permanecer abierto hasta el final del horizonte de tiempo. Por lo tanto, un refugio $j \in J$ puede recibir personas en el periodo $t \in T$ si es abierto en dicho periodo o en cualquier periodo anterior a este. Finalmente, cuesta $\$g_{jt}$ tener el refugio $j \in J$ abierto en el periodo $t \in T$. Incorpore estas nuevas consideraciones en su modelo de la parte (a) y defina claramente cualquier nuevo elemento del modelo que incluya (variable, restricción, etc.).

**Solución:** Nuevas variables:

- ◇ $z_{jt} \in \{0, 1\}$: indica si el refugio $j \in J$ está abierto en el periodo $t \in T$.

El nuevo modelo está dado por:

$$\text{mín} \sum_{t\in T}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijt}c_{ijt} + \sum_{t\in T}\sum_{j\in J}(y_{jt}f_{jt} + z_{jt}g_{jt})$$

$$\text{s.a.} \quad (1a) - (1c)$$

$$y_{jt} \leq K_j z_{jt} \qquad \forall j \in J,\ t \in T \quad (2a)$$

$$z_{jt} \leq z_{j,t+1} \qquad \forall j \in J,\ t \in \{1, ..., H-1\} \quad (2b)$$

$$z_{jt} \in \{0, 1\} \qquad \forall j \in J,\ t \in T \quad (2c)$$

$$x_{ijt}, y_{jt} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall i \in I,\ j \in J,\ t \in T \quad (2d)$$

La nueva función objetivo incluye el costo fijo de mantener un refugio abierto. La restricción (2a) reemplaza a (1d) y modela tanto la capacidad máxima como la activación de un refugio. La restricción (2b) representa la condición de que si se abre un refugio, este seguirá abierto hasta el final del horizonte.

**Observaciones:**

- ◇ Solo se da puntaje por las componentes nuevas del modelo
- ◇ La restricción (2a) se puede modelar con un big-M general (obviamente mayor a $K_j$) y dejar la restricción (1d) como antes.
- ◇ Seguir mismo esquema que en la pregunta anterior para puntaje total, parcial o cero.

**Distribución puntaje:**

- ◇ 1 punto por definir nueva variable para abrir refugios y su naturaleza.
- ◇ 1 punto por función objetivo.
- ◇ 2 punto restricción da capacidad actualizada o restricción extra para activar refugio.
- ◇ 2 puntos por restricción de mantener refugios abiertos.

## Pregunta 2 (15 puntos)

(a) Considere el siguiente poliedro y responda a las siguientes preguntas.

$$\mathbb{X} := \left\{ x \in \mathbb{R}^{2023} : \sum_{i=1}^{2023} x_i \leq 2;\ 0 \leq x_i \leq \frac{3}{2}, \forall i \in \{1, ..., 2023\} \right\}$$

(i) **(5 puntos)** Sea $e_i \in \mathbb{R}^{2023}$ un vector con valor 1 en la componente $i$ y 0 en el resto. ¿Cuáles de los siguientes puntos son vértices de $\mathbb{X}$? Explique.

- $(0, 0, 0, \ldots, 0)$
- $\frac{3}{2}e_1$, es decir, $(\frac{3}{2}, 0, 0 \ldots, 0)$
- $\frac{3}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_2$, es decir, $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0 \ldots, 0)$.
- $\frac{3}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2$
- $e_1 + e_2$

**Solución:**

- 0 es vértice. Activa $n$ no negatividades *l.i.*.
- $\frac{3}{2}e_1$ es vértice. Activa $n$ rest. *l.i.*: $n-1$ no negatividades y una cota superior.
- $\frac{3}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_2$ no es vértice, pues es infactible.
- $\frac{3}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2$ es vértice. Activa $n$ rest. *l.i.*: $n-2$ no negatividades, una cota superior y restricción de presupuesto.
- $e_1 + e_2$ no es vértice pues es el promedio de dos vértices $\frac{3}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2$ y $\frac{1}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_2$

(ii) **(2 puntos)** Obtenga una solución óptima para $\max\{\sum_{i=1}^{2023} i \cdot x_i \text{ s.t. } x \in \mathbb{X}\}$.

**Solución:** De la pregunta anterior es fácil deducir que los vértices del poliedro son: 0, $\frac{3}{2}e_i$ para todo $i \in \{1, ..., 2023\}$, $\frac{3}{2}e_i + \frac{1}{2}e_j$ para todo $i, j \in \{1, ..., 2023\}$ : $i \neq j$. Luego, el vértice óptimo debe ser $\frac{3}{2}e_{2023} + \frac{1}{2}e_{2022}$. El valor óptimo es $\frac{3 \cdot 2023 + 2022}{2}$

(b) Considere el siguiente problema de optimización lineal y llámelo $(P)$:

$$\begin{aligned} \max_{x \geq 0} \quad & 20x_1 + 12x_2 + 40x_3 + 25x_4 \\ \text{s.t.} \quad (1) \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 50 \\ (2) \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100 \\ (3) \quad & x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 90 \end{aligned}$$

(i) **(3 puntos)** Se sabe que $(P)$ posee solución óptima única en el punto que activa las restricciones (1), (3) y la no-negatividad de $x_2$ y $x_4$. Encuentre su solución.

**Solución:** Sea $(h_1, h_2, h_3)$ el vector de holguras. De la información, el vértice se obtiene al resolver:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 50 \\ 3x_1 + x_3 + h_2 &= 100 \\ 2x_3 &= 90 \end{aligned}$$

Luego, es fácil resolver y obtener $x^* = (5, 0, 45, 0)$ con $h^* = (0, 40, 0)$

(ii) **(2 puntos)** Formule el problema dual de $(P)$ y llámelo $(D)$.
**Solución:**

$$\begin{aligned} \min_{y \geq 0} \; & 50y_1 + 100y_2 + 90y_3 \\ \text{s.t.} \; & y_1 + 3y_2 \geq 20 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 12 \\ & y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 40 \\ & y_1 + 3y_3 \geq 25 \end{aligned}$$

(iii) **(3 puntos)** Encuentre una solución óptima para $(D)$.
**Solución:** Sea $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ el vector de excesos de la solución dual. De la solución óptima primal se sabe que los costos reducidos de $e_1$ y de $e_3$ son 5 y 45, por lo que están fuera de base. De la misma manera, el costo reducido de $y_2$ es 40, por lo que está fuera de base. Luego, se puede resolver:

$$\begin{aligned} y_1 &= 20 \\ y_1 + y_3 - e_2 &= 12 \\ y_1 + 2y_3 &= 40 \\ y_1 + 3y_3 - e_4 &= 25 \end{aligned}$$

Es fácil ver que $y^* = (20, 0, 10)$ y $e = (0, 18, 0, 25)$

## Pregunta 3 (15 puntos)

(a) **(4 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización lineal entera:

$$\min_{x \in \mathbb{Z}^n} \{c^\top x \text{ s.t. } Ax = b,\, x \geq 0\},$$

donde $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ y $c \in \mathbb{Q}^n$. Demuestre matemáticamente la veracidad de la siguiente afirmación o entregue un contraejemplo que certifique su falsedad:

"Si el problema es factible, entonces este será no acotado si y solo si su relajación lineal también lo es."

**Solución:**

- $[\Leftarrow]$ : Si el problema entero es no acotado (i.e. valor $-\infty$), entonces el valor de su relajación lineal, que es una cota inferior, es también $-\infty$.
- $[\Rightarrow]$ : Como la relajación lineal es no acotada existe un punto factible para el problema entero $x_0$ (que es, claramente, a la vez factible para la relajación lineal) y un rayo de escape $d \neq 0$ cuyas componentes son racionales (porque $A$ y $b$ son racionales) tal que $x_0 + t \cdot d$ es factible para la relajación lineal para todo $t \geq 0$ y $c^\top (x_0 + t \cdot d) \to -\infty$ cuando $t \to \infty$.
  Sea $M$ el mínimo común múltiplo de los denominadores de las componentes de $d$, entonces si $d' = M \cdot d$, se tiene que $d'$ tiene todas sus componentes enteras y

  $$x(t) = x_0 + t \cdot d'$$

  es una dirección de escape donde $x(t) \in \mathbb{Z}^n$ para todo $t \in \mathbb{N}$ es factible para el problema entero.
  Por lo tanto, el problema entero es también no acotado.

(b) Considere el siguiente problema de programación lineal entera:

$$\begin{array}{lrcl} \min\limits_{x \in \mathbb{Z}^4} & \frac{x_3}{7} + \frac{2x_4}{7} - \frac{27}{7} & & \\ \text{s.t.} & x_1 - \frac{x_3}{7} + \frac{5x_4}{7} & = & \frac{15}{7} \\ & x_2 + \frac{2x_3}{7} - \frac{3x_4}{7} & = & \frac{12}{7} \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

- **(2 puntos)** Determine una solución óptima y el valor óptimo de su relajación lineal. Muestre que la solución relajada es única y fraccionaria.
  **Solución:** Del problema se ve claramente que $x^R = (15/7, 12/7, 0, 0)$ y $z^R = -27/7$

◇ **(2 puntos)** Genere un plano cortante válido para el dominio entero que pode a la solución relajada.

**Solución:** Separando la parte entera de la fraccionaria en la primera restricción se obtiene:

$$x_1 - x_3 - 2 = \frac{1}{7} - \frac{6x_3}{7} - \frac{5x_4}{7}$$

. Luego, el siguiente corte de Gomory genera lo solicitado

$$1 \leq 6x_3 + 5x_4.$$

Efectivamente poda a la solución relajada.

Alternativamente, se puede trabajar con la segunda restricción. En este caso se obtiene:

$$x_2 - x_4 - 1 = \frac{5}{7} - \frac{2x_3}{7} - \frac{4x_4}{7}$$

y se obtiene

$$5 \leq 2x_3 + 4x_4,$$

que también es válida y poda a la solución relajada.

(c) Considere que usted resolvió un problema de optimización lineal entera de dos variables y obtiene el siguiente árbol B&B detallado en la Figura 1. Suponga que se recorrió el árbol usando BFS y que los coeficientes en el objetivo no son necesariamente enteros. Responda las siguientes preguntas:

(i) **(1 punto)** ¿Maximizó o minimizó la función objetivo? ¿Por qué?

**Solución:** Minimización. Las relajaciones son cada vez más altas en valor óptimo.

(ii) **(2 puntos)** Explique por qué se podaron los nodos 3,4,6,7,11 y 12

**Solución:** 3, 4, 7 y 11 por ser solución entera. 6 y 12 por infactibilidad.

(iii) **(2 puntos)** Indique el valor de las mejores cota inferior y superior después de haber resuelto los primeros 3 nodos.

**Solución:** Cota inferior: $-10.43$, cota superior: $\infty$

(iv) **(2 puntos)** Indique el valor de las mejores cota inferior y superior después de haber resuelto los primeros 7 nodos.

**Solución:** Cota inferior: $-9.75$, cota superior: $-9$

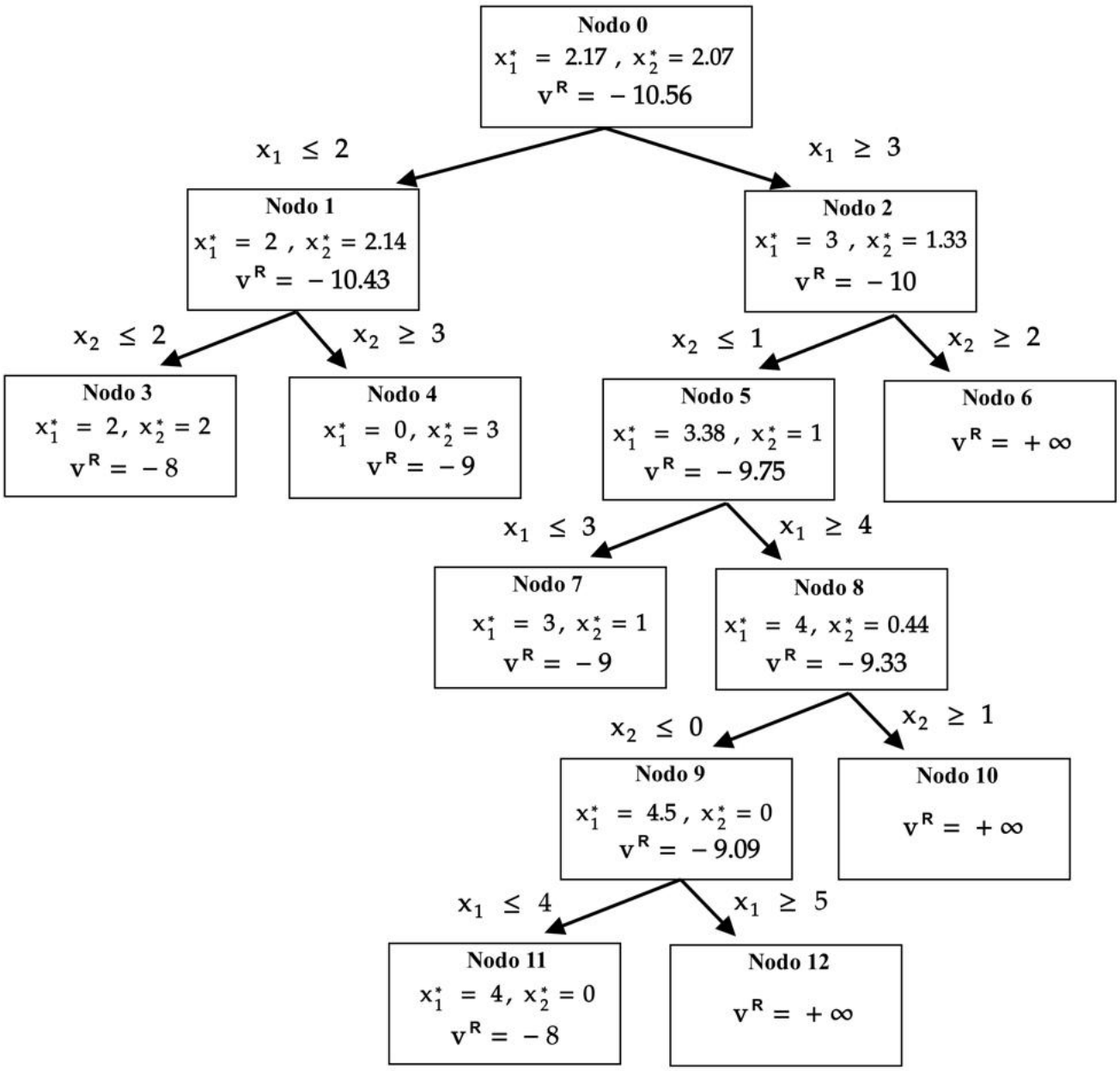



Figura 1: Árbol de B&B

## Pregunta 4 (15 puntos)

(a) Considere el siguiente problema de optimización no lineal irrestricto.

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} \quad x_1^4 - 2x_1^2 + x_2^4 - 4x_2 + 4$$

(i) **(2 puntos)** Muestre que admite solución óptima.

**Solución:** Podemos garantizar que admite solución óptima por el teorema de Bolzano-Weierstrass. La función objetivo es continua, el dominio irrestricto (por lo que es cerrado y no vacío) y la función es coercitiva. Para verlo, se puede factorizar como: $(x_1^2-1)^2 + (x_2-1)^2 \cdot (x_2^2+2x_2+3) \geq 0$

**Nota de corrección:**

También se considera válido argumentar que la función es coercitiva dado que en ambas variables los términos con exponentes pares son dominantes en la expresión.

(ii) **(4 puntos)** Encuentre todas sus soluciones óptimas. Justifique su respuesta.

**Solución:** Aplicando la CN de primer orden

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 4x_1 \\ 4x_2^3 - 4 \end{pmatrix} = 0,$$

se obtiene tres puntos que la cumplen.

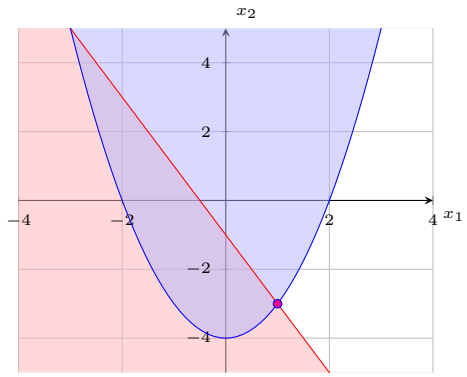
$$x' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x''' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por existencia y CN, entre estos tres deben estar todas las soluciones óptimas. Al evaluar los valores objetivos se obtiene: $v' = v'' = 0$ y $v''' = 1$. Luego, se tiene que $(-1,1)$ y $(1,1)$ son soluciones óptimas.

(b) Considere el siguiente problema de optimización no lineal:

$$\begin{aligned} \max_{x\in\mathbb{R}^2} \quad & x_1 \\ \text{s.a:} \quad & x_1^2 - x_2 \leq 4, \\ & 2x_1 + x_2 \leq -1. \end{aligned}$$

(i) **(3 puntos)** Resuélvalo gráficamente. Determine claramente una solución y su valor óptimo asociado. **Solución:** La solución óptima es $(1,-3)$ como se ve en el siguiente gráfico (el valor óptimo es 1):




(ii) **(4 puntos)** Muestre que la solución óptima obtenida cumple las condiciones de Karush, Kuhn y Tucker.

**Solución:** En $(1, -3)$ ambas restricciones están activas. Para cumplir las condiciones KKT, el gradiente de la función objetivo debe estar generado por una combinación cónica de los gradientes de ambas restricciones. En este caso, deben existir $\mu \in \mathbb{R}^2_+$ tal que:

$$(1, 0) = \mu_1 \cdot (2x_1, -1) + \mu_2 \cdot (2, 1)$$

Evaluando en el punto $(1, -3)$ queda el sistema de dos incógnitas

$$(1, 0) = \mu_1 \cdot (2, -1) + \mu_2 \cdot (2, 1),$$

cuya solución es $\mu = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ y cumple las condiciones KKT.

**Nota de corrección:** Alternativamente se puede resolver el problema Lagrangeano equivalente. Es lo mismo.

(iii) **(2 puntos)** Aproximadamente: ¿En cuánto cambia el valor óptimo si el lado derecho de la segunda restricción sube desde $-1$ a $-0,9$?

**Solución:** Se cumple que $\Delta v^* = \int_{-1}^{-0,9} \mu_2(b_2)\delta b_2 \approx \Delta b_2 \cdot \mu_2 = 0,1 \cdot \frac{1}{4} = 0,025$.