Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS1113 - Optimización

Tarea 1

Profesores: Margarita Castro, Raimundo Cuadrado, Marcel Favereau, Mathias Klapp, Esteban Salgado
Ayudante coordinador tareas: José Tomás Grez

Problema 1 - 20 Puntos

Se acerca el Mundial de Qatar y el país anfitrión ha decidido preparar un paquete turístico para personas de todas las partes del mundo. La promoción incluye alojamientos, comidas, entradas a partidos y actividades dentro del país. A último momento, a los encargados se les ocurre una actividad más: el "Tour de la Copa del Mundo". Este tour es un recorrido exclusivo por un estadio del Mundial, donde se irá contando la historia de cada Mundial de una manera nunca antes vista y que terminará en una sala con la Copa del Mundo, donde podrán levantarla y sacarse fotos con ella.

Por temas de costos y logística, los organizadores desean que el "Tour de la Copa del Mundo" se ejecute K veces (teniendo una duración de 1 hora). Como este Tour fue ofrecido a último minuto, los N turistas que contrataron la oferta no tienen todas las H horas de sus D días disponibles. Sin embargo, se sabe que hay horarios libres, representado por el parámetro binario binario a_{ijd}, que vale 1 si el turista $i \in \{1, ..., N\}$ tiene disponible la hora $j \in \{1, ..., H\}$ del día $d \in \{1, ..., D\}$.

Además, como el Tour se realiza en un estadio, no todos los horarios están disponibles para que se realice la actividad. Las horas y días cuando se puede hacer el recorrido está dado por el parámetro binario b_{jd}, que vale 1 si el estadio está disponible para realizar el recorrido en la hora $j \in \{1, ..., H\}$ del día $d \in \{1, ..., D\}$, y 0 en otro caso.

Los organizadores buscan maximizar la cantidad de turistas que puedan acceder al Tour y, al mismo tiempo, cuidar la cancha y el estadio. Por esto, no se podrá hacer tours por más de 3 horas consecutivas. Además, si se hacen tours por exactamente 3 horas seguidas, entonces no se podrá usar el estadio durante las siguientes 3 horas para hacer un Tour (sí se podrán jugar partidos).

Por último, se quiere dividir de forma pareja la labor de los trabajadores, por lo que la cantidad de tours en bloques de 7 días consecutivos debe ser similar. Para esto, se debe respetar que la cantidad de tours en 7 días consecutivos no puede ser más de α si se compara con la cantidad de tours de cualquier otro bloque de 7 días consecutivos. Por ejemplo, si en los días 1-7 se hicieron t tours, entonces entre los días 3-9 tiene que haber a lo más $\alpha + t$ tours y a lo menos $\alpha - t$ tours.

Formule un problema de programación lineal entera que represente el problema asociado a planificar el "Tour de la Copa del Mundo".

Solución

Variables de Decisión - 4 Puntos

- $x_{jd}: \begin{cases} 1 & \textit{si se hará un Tour por el estadio en la hora } j \textit{ el día } d \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$
- $y_i: \begin{cases} 1 & \textit{si el turista } i \textit{ puede asistir a algún Tour dispuesto por los organizadores} \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$

Función Objetivo - 3 Puntos

$$\text{máx} \sum_{i=1}^{N} y_i$$

Restricciones - 13 Puntos

1. Construcción de y_i (2 puntos)

$$y_i \leq \sum_{j=1}^{H} \sum_{k=1}^{D} x_{jd} \cdot a_{ijd} \quad \forall i \in \{1, ..., N\}$$

2. Solo pueden elegirse horas que el estadio esté disponible (1 punto)

$$x_{jd} \leq b_{jd} \quad \forall j \in \{1, ..., H\}; \forall d \in \{1, ..., D\}$$

3. Asignar los K módulos deseados (1 punto)

$$\sum_{d=1}^{D} \sum_{j=1}^{H} x_{jd} = K$$

4. No se pueden hacer Tours más de 3 horas seguidas (3 puntos)

$$\sum_{j=h}^{h+3} x_{jd} \leq 3 \qquad \forall h \in \{1, ..., H-3\}; \forall d \in \{1, ...D\}$$

$$(\sum_{j=H-2}^{H} x_{jd}) + x_{1(d+1)} \leq 3 \qquad \forall d \in \{1, ..., D-1\}$$

$$(\sum_{j=H-1}^{H} x_{jd}) + \sum_{j=1}^{2} x_{j(d+1)} \leq 3 \qquad \forall d \in \{1, ..., D-1\}$$

$$x_{Hd} + \sum_{j=1}^{3} x_{j(d+1)} \leq 3 \qquad \forall d \in \{1, ..., D-1\}$$

Alternativamente a las últimas 3 restricciones se podría utilizar:

$$\sum_{j=H-k}^{H} x_{jd} + \sum_{j=1}^{3-k} x_{j(d+1)} \leq 3 \quad \forall k \in \{0,1,2\}; d \in \{1,...,D-1\}$$

5. Si se usa el estadio 3 horas seguidas, no se podrá usar las siguientes 3 horas: (3 puntos)

$$x_{(h+3)d} + x_{(h+4)d} + x_{(h+5)d} \leq 3 \cdot (3 - \sum_{j=h}^{h+2} x_{jd}) \qquad \forall h \in \{1,...,H-5\}; \forall d \in \{1,...,D\}$$

$$x_{1(d+1)} + x_{2(d+1)} + x_{3(d+1)} \leq 3 \cdot (3 - x_{(H-2)d} - x_{(H-1)d} - x_{Hd}) \qquad \forall d \in \{1,...,D-1\}$$

$$x_{2(d+1)} + x_{3(d+1)} + x_{4(d+1)} \leq 3 \cdot (3 - x_{(H-1)d} - x_{Hd} - x_{1(d+1)}) \qquad \forall d \in \{1,...,D-1\}$$

$$x_{3(d+1)} + x_{4(d+1)} + x_{5(d+2)} \leq 3 \cdot (3 - x_{Hd} - x_{1(d+1)} - x_{2(d+1)}) \qquad \forall d \in \{1,...,D-1\}$$

6. Diferencia máxima entre cantidad de Tours entre 7 días cualesquiera (2 puntos)

$$\sum_{d=k}^{k+6} \sum_{j=1}^{H} x_{jd} - \sum_{d=l}^{l+6} \sum_{j=1}^{H} x_{jd} \leq \alpha \quad \forall l \neq k \in \{1,...,D-6\}$$

7. Naturaleza de las variables: (1 punto)

$$x_{jd} \in \{0,1\} \quad \forall j \in \{1,...,H\}; \forall d \in \{1,...,D\}$$
$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in \{1,...,N\}$$

Problema 2 - 20 Puntos

a. (6 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y $g(x) = e^{e^{(f(x))}}$. Argumente matemáticamente, utilizando la definición de convexidad que $g(x)$ es convexa. Hint: la función e^x es convexa

b. (6 puntos) Sea el problema $\min \max\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\}, x \in \mathbb{R}$. ¿Qué condiciones impondría sobre las funciones $f_i, i \in \{1,...,n\}$ para garantizar que el problema sea convexo? Justifique.

c. (8 puntos) Dado un problema $(P) \min\{f(x) : x \in D\}$, se dice que el problema $(R) \min\{g(x) : x \in E\}$ es una relajación de (P) si $D \subseteq E$ y $g(x) \leq f(x), \forall x \in D$.

   i. (2 puntos) Muestre que si (R) es infactible, (P) también lo es.

   ii. (3 puntos) Sea x^* solución óptima de (R), tal que $x^* \in D$ y $f(x^*) = g(x^*)$. Demuestre que x^* es solución óptima de (P)

iii. (3 puntos) Suponga que (P) tiene solución óptima x^* y se cumple que $f(x^*) = g(x^*)$. ¿Es verdad que x^* es mínimo local de (R) en D? Demuéstrelo o dé un contra ejemplo.

Solución

a. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0,1]$. Tenemos que:

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) = e^{e^{f(\lambda x+(1-\lambda)y)}}$$

Como f es convexa, se tiene que:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Como la función exponencial es creciente:

$$\begin{aligned} e^{f(\lambda x+(1-\lambda)y)} &\leq e^{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)} \\ e^{e^{f(\lambda x+(1-\lambda)y)}} &\leq e^{e^{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)}} \end{aligned}$$

Como la función exponencial es convexa:

$$e^{e^{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)}} \leq \lambda e^{e^{f(x)}} + (1-\lambda)e^{e^{f(y)}} = \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

Juntando lo anterior, se cumple que:

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

Por lo tanto, g es convexa.

b. El problema es equivalente a:

$$\begin{aligned} &\min t \\ s.a. \quad &f_i(x) \leq t \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \\ &x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Como la función objetivo es una función lineal, esta es convexa. Por lo tanto, la condición que queda es que las restricciones sean convexas, lo cual se cumplirá cuando cada $f_i(x)$ sea convexa.

c. i. Si (R) es infactible, entonces el dominio E es vacío. Como $D \subseteq E$, entonces D también es vacío, por lo que (P) es infactible.

ii. Como $x^* \in D$, es factible para el problema (P). Luego, por enunciado $f(x^*) = g(x^*)$. Como x^* es óptimo para (R), se da que $g(x^*) \leq g(x)$ y, como (R) es una relajación de (P), se tiene que $g(x) \leq f(x)$. Juntando todo esto:

$$f(x^*) = g(x^*) \leq g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in D$$

Como $f(x^*) \leq f(x)$, para todo $x \in D$, x^* es solución óptima de (P).

iii. Es falso. Sea:

$$\begin{array}{lllll} (P) & & \min x_1 & & \\ s.a. & & x_1 & = & 1 \\ 0 & \leq & x_2 & \leq & 3 \end{array}$$

Y sea:

$$\begin{array}{lllll} (R) & & \min x_1 - x_2 & & \\ s.a. & & x_1 & \geq & -1 \\ 0 & \leq & x_2 & \leq & 5, \end{array}$$

donde se cumple que (R) es una relajación de (P). Sea $x^* = (1, 0)$ una solución óptima para (P). Claramente se cumple que $f(x^*) = g(x^*)$, pero x^* no es mínimo local de (R) en D. El mínimo local de (R) en D es $x^{**} = (1, 3)$

Problema 3 - 20 puntos

Nadie sabe cómo, pero Voldemort ha vuelto. Le han pedido a Harry Potter que lo busque, pues es el único que puede destruirlo. Para ello cuenta con la siguiente información: Voldemort está escondido en una de las 5 casas de los mejores amigos de Harry. El problema está en que solo hay tiempo para revisar una de las casas. Las 5 casas son vecinas, es decir, están todas en una sola hilera (así, todos tienen dos vecinos, menos la primera y la quinta). Además, Harry conoce muy bien a sus amigos y sabe que son muy distintos entre sí: cada uno tiene una bebida, un hechizo, una varita y una casa de magia favorita distinta. Harry sabe que:

- La varita favorita de Hermione es la de álamo.
- La casa de magia favorita de Ron es Gryffindor.
- Ginny toma té.
- Hagrid vive en la primera casa.
- El hechizo favorito de Neville es Alohomora.
- Quien tiene la varita de saúco está a la izquierda de quien tiene la varita de pino.
- Quien tiene la varita de saúco toma vino de saúco; el hechizo favorito de la persona que más le gusta Hufflepuff (casa de magia) es Lumos.
- Quien tiene la varita de acebo le gusta el hechizo Accio.
- La persona que vive en la tercera casa toma chocolate caliente.

- La persona que su hechizo favorito es Expecto Patronum vive al lado de quien más le gusta La casa de magia Ravenclaw.
- A quien le gusta la casa de magia Slytherin vive al lado de quien su hechizo favorito es Accio.
- El hechizo favorito de quien toma cerveza de mantequilla es Avada Kedabra.
- La persona que toma zumo de calabaza es vecina de la que su hechizo favorito es Expecto Patronum.
- Hagrid vive al lado de quien tiene la varita de sauce.

Como Harry sabe que Voldemort odia a los Muggles, sabe que este estará atacando a la casa cuyo dueño considera a los Muggles como su casa de magia favorita.

a. (12 puntos) Formule un modelo de optimización lineal que ayude a Harry a identificar la casa en donde está Voldemort. Para modelar el problema, usted cuenta con los siguientes conjuntos de parámetros:
   - Conjunto de amigos $P = \{1, ..., 5\}$, donde $1 = Hermione, 2 = Ron, 3 = Ginny, 4 = Neville, 5 = Hagrid$
   - Conjunto de bebidas $B = \{1, ..., 5\}$, donde $1 = té, 2 = vino\ de\ saúco, 3 = chocolate\ caliente, 4 = cerveza\ de\ mantequilla, 5 = zumo\ de\ calabaza$
   - Conjunto de varitas $V = \{1, ..., 5\}$, donde $1 = saúco, 2 = acebo, 3 = pino, 4 = sauce, 5 = álamo$
   - Conjunto de hechizos $T = \{1, ..., 5\}$, donde $1 = alohomora, 2 = lumos, 3 = accio, 4 = expecto\ patronum, 5 = avada\ kedabra$
   - Conjunto de casas de magia $C = \{1, ..., 5\}$, donde $1 = Gryffindor, 2 = Hufflepuff, 3 = Ravenclaw, 4 = Slytherin, 5 = Muggles$

b. (8 puntos) Entre los archivos entregados para esta tarea se encuentra "P3.py", el cual cuenta con una instancia de este problema (se entregan los parámetros necesarios para resolverlo). Su deber es completar este archivo para resolver el problema, es decir, definir las variables de decisión, las restricciones, la función objetivo y que el programa arroje la solución al problema. Dentro de los archivos que entregue debe encontrarse "P3.py" modificado. Además, indique claramente en la casa de qué mago se encuentra Voldemort.

Solución

a. **Primera Solución**
Variables de Decisión - 2 puntos
* Se enumerarán las casas de la 1 a la 5, siendo la 1 la de más a la izquierda y 5 la de más a la derecha

- x_{ijklmn} : $\begin{cases} 1 & \textit{si la persona que vive en la casa } i \textit{ es el amigo } j, \textit{ que le gusta} \\ & \textit{la bebida } k, \textit{ la varita } l, \textit{ el hechizo } m, \textit{ la casa de magia } n \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$
- $b1$: $\begin{cases} 1 & \textit{si la persona que toma zumo de calabaza vive a la izquierda} \\ & \textit{de la persona cuyo hechizo } favorito \textit{ es expecto patronum} \\ 0 & \textit{si la persona que toma zumo de calabaza vive a la derecha} \\ & \textit{de la persona cuyo hechizo } favorito \textit{ es expecto patronum} \end{cases}$
- $b2$: $\begin{cases} 1 & \textit{si Hagrid vive a la izquierda} \\ & \textit{de la persona que tiene la varita de sauce} \\ 0 & \textit{si Hagrid vive a la derecha} \\ & \textit{de la persona que tiene la varita de sauce} \end{cases}$
- $b3$: $\begin{cases} 1 & \textit{si la persona cuyo hechizo } favorito \textit{ es expecto patronum vive a la} \\ & \textit{izquierda de la persona de Ravenclaw} \\ 0 & \textit{si la persona cuyo hechizo } favorito \textit{ es expecto patronum vive a la} \\ & \textit{derecha de la persona de Ravenclaw} \end{cases}$
- $b4$: $\begin{cases} 1 & \textit{si la persona que le gusta Slytherin vive a la izquierda} \\ & \textit{de la persona cuyo hechizo } favorito \textit{ es accio} \\ 0 & \textit{si la persona que le gusta Slytherin vive a la derecha} \\ & \textit{de la persona cuyo hechizo } favorito \textit{ es accio} \end{cases}$

Función Objetivo - 1 punto
Se busca encontrar la casa del mago cuya casa de magia favorita son los Muggles (aunque para este problema la función objetivo puede variar y no influirá en el resultado)

$$\text{máx}\, 0$$

Restricciones - 10 puntos

1. (1 punto) En cada casa vive uno solo de los amigos de Harry Potter, que tiene asociada una sola varita, un solo hechizo, una sola bebida y una casa de magia

$$\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{m=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} x_{ijklmn} = 1 \quad \forall i = 1, ..., 5$$
$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{m=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} x_{ijklmn} = 1 \quad \forall j = 1, ..., 5$$
$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{m=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} x_{ijklmn} = 1 \quad \forall k = 1, ..., 5$$
$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{m=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} x_{ijklmn} = 1 \quad \forall l = 1, ..., 5$$
$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} x_{ijklmn} = 1 \quad \forall m = 1, ..., 5$$
$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{m=1}^{5} x_{ijklmn} = 1 \quad \forall n = 1, ..., 5$$

2. (0,5 puntos) Hagrid vive en la primera casa.

$$\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{m=1}^{5}\sum_{n=1}^{5}\sum_{i=1}^{5} x_{15klmn} = 1$$

3. (0,5 puntos) La persona que vive en la casa del medio toma chocolate cliente

$$\sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{m=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} x_{3j3lmn} = 1$$

4. (0,5 puntos) La persona cuyo hechizo favorito es accio tiene la varita de acebo

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} x_{ijk32n} = 1$$

5. (0,5 puntos) La persona que tiene la varita de saúco toma vino de saúco

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{m=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} x_{ij21mn} = 1$$

6. (0,5 puntos) Ginny toma té

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{m=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} x_{i31lmn} = 1$$

7. (0,5 puntos) El hechizo favorito de Neville es alohomora

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} x_{i4kl1n} = 1$$

8. (0,5 puntos) La casa de magia favorita de Ron es Gryffindor

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{m=1}^{5} x_{i2klm1} = 1$$

9. (0,5 puntos) A la persona que toma cerveza de mantequilla le gusta el hechizo Avada Kedabra

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} x_{ij4l5n} = 1$$

10. (0,5 puntos) La persona que le gusta el hechizo Lumos, le gusta Hufflepuff

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5} x_{ijkl22} = 1$$

11. (0,5 puntos) Quien tiene la varita de saúco está justo a la izquierda de quien tiene la varita de pino

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{m=1}^{5}\sum_{i=1}^{5} i \cdot x_{ijk1mn} - \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{m=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} i \cdot x_{ijk3mn} = -1$$

12. (0,5 puntos) La varita favorita de Hermione es la de álamo

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{m=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} x_{i1k5mn} = 1$$

13. (0,75 puntos) Quien toma zumo de calabaza es vecino de quien le gusta el hechizo Expecto patronum

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{m=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} i \cdot x_{ij5lmn} - \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} i \cdot x_{ijkl4n} = 1 - (2 \cdot b1)$$

14. (0,75 puntos) Hagrid vive al lado de quien tiene la varita de sauce

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{m=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} i \cdot x_{i5klmn} - \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{m=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} i \cdot x_{ijk4mn} = 1 - (2 \cdot b2)$$

15. (0,75 puntos) Quien le gusta el hechizo expecto patronum vive al lado de quien le gusta la casa de magia Ravenclaw

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} i \cdot x_{ijkl4n} - \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{m=1}^{5} i \cdot x_{ijklm3} = 1 - (2 \cdot b3)$$

16. (0,75 puntos) Quien le gusta Slytherin vive al lado de quien su hechizo favorito es accio

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{m=1}^{5} i \cdot x_{ijklm4} - \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\sum_{n=1}^{5} i \cdot x_{ijkl3n} = 1 - (2 \cdot b4)$$

17. (0,5 puntos) Naturaleza de las variables:

$$x_{ijklmn} \in \{0,1\} \quad \forall i \in \{1,...,5\}, \forall j \in \{1,...,5\}, \forall k \in \{1,...,5\}, \forall l \in \{1,...,5\}, \forall m \in \{1,...,5\}, \forall n \in \{1,...,5\}$$

Segunda Solución

Variables de Decisión

* Se enumerarán las casas de la 1 a la 5, siendo la 1 la de más a la izquierda y 5 la de más a la derecha.

- $v_{ij}: \begin{cases} 1 & \textit{si la persona que vive en la casa } i \textit{ es el amigo } j \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$
- $w_{ik}: \begin{cases} 1 & \textit{si la persona que vive en la casa } i \textit{ tiene la varita } k \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$
- $x_{il}: \begin{cases} 1 & \textit{si la persona que vive en la casa } i \textit{ toma la bebida } l \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$
- $y_{im}: \begin{cases} 1 & \textit{si la persona que vive en la casa } i \textit{ le gusta la casa de magia } m \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$
- $z_{iq}: \begin{cases} 1 & \textit{si la persona que vive en la casa } i \textit{ le gusta el hechizo } q \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$
- $b1: \begin{cases} 1 & \textit{si la persona que toma zumo de calabaza vive a la izquierda de la persona cuyo hechizo favorito es expecto patronum} \\ 0 & \textit{si la persona que toma zumo de calabaza vive a la derecha de la persona cuyo hechizo favorito es expecto patronum} \end{cases}$
- $b2: \begin{cases} 1 & \textit{si Hagrid vive a la izquierda de la persona que tiene la varita de sauce} \\ 0 & \textit{si Hagrid vive a la derecha de la persona que tiene la varita de sauce} \end{cases}$
- $b3: \begin{cases} 1 & \textit{si la persona cuyo hechizo favorito es expecto patronum vive a la izquierda de la persona de Ravenclaw} \\ 0 & \textit{si la persona cuyo hechizo favorito es expecto patronum vive a la derecha de la persona de Ravenclaw} \end{cases}$
- $b4: \begin{cases} 1 & \textit{si la persona que le gusta Slytherin vive a la izquierda de la persona cuyo hechizo favorito es accio} \\ 0 & \textit{si la persona que le gusta Slytherin vive a la derecha de la persona cuyo hechizo favorito es accio} \end{cases}$

Función Objetivo

Se busca encontrar la casa del mago cuya casa de magia favorita son los Muggles (aunque para este problema la función objetivo puede variar y no influirá en el resultado)

$$\text{máx} \sum_{i=1}^{5} z_{i5}$$

Restricciones

1. En cada casa vive uno solo de los amigos de Harry Potter y viceversa

$$\sum_{j=1}^{5} v_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, ..., 5$$
$$\sum_{i=1}^{5} v_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, ..., 5$$

2. Cada casa tiene asociada una sola varita y viceversa

$$\sum_{k=1}^{5} w_{ik} = 1 \quad \forall i = 1, ..., 5$$
$$\sum_{i=1}^{5} w_{ik} = 1 \quad \forall k = 1, ..., 5$$

3. Cada casa tiene asociada una sola bebida y viceversa

$$\sum_{l=1}^{5} x_{il} = 1 \quad \forall i = 1, ..., 5$$
$$\sum_{i=1}^{5} x_{il} = 1 \quad \forall l = 1, ..., 5$$

4. Cada casa tiene asociada una casa de magia y viceversa

$$\sum_{m=1}^{5} y_{im} = 1 \quad \forall i = 1, ..., 5$$
$$\sum_{i=1}^{5} y_{im} = 1 \quad \forall m = 1, ..., 5$$

5. Cada casa tiene asociada un hechizo y viceversa

$$\sum_{q=1}^{5} z_{iq} = 1 \quad \forall i = 1, ..., 5$$
$$\sum_{q=1}^{5} z_{iq} = 1 \quad \forall q = 1, ..., 5$$

6. Hagrid vive en la primera casa.

$$\sum_{i=1}^{5} i \cdot v_{i5} = 1$$

También sirve:

$$v_{15} = 1$$

7. La persona que vive en la casa del medio toma chocolate caliente

$$\sum_{i=1}^{5} i \cdot x_{i3} = 3$$

También sirve:

$$x_{33} = 1$$

8. La persona cuyo hechizo favorito es accio tiene la varita de acebo

$$\sum_{i=1}^{5} i \cdot w_{i2} = \sum_{i=1}^{5} i \cdot z_{i3}$$

9. La persona que tiene la varita de saúco toma vino de saúco

$$\sum_{i=1}^{5} i \cdot w_{i1} = \sum_{i=1}^{5} i \cdot x_{i2}$$

10. Ginny toma té

$$\sum_{i=1}^{5} i \cdot v_{i3} = \sum_{i=1}^{5} i \cdot x_{i1}$$

11. El hechizo favorito de Neville es alohomora

$$\sum_{i=1}^{5} i \cdot v_{i4} = \sum_{i=1}^{5} i \cdot z_{i1}$$

12. La casa de magia favorita de Ron es Gryffindor

$$\sum_{i=1}^{5} i \cdot v_{i2} = \sum_{i=1}^{5} i \cdot y_{i1}$$

13. A la persona que toma cerveza de mantequilla le gusta el hechizo Avada Kedabra

$$\sum_{i=1}^{5} i \cdot x_{i4} = \sum_{i=1}^{5} i \cdot z_{i5}$$

14. La persona que le gusta el hechizo Lumos, le gusta Hufflepuff

$$\sum_{i=1}^{5} i \cdot y_{i2} = \sum_{i=1}^{5} i \cdot z_{i2}$$

15. Quien tiene la varita de saúco está justo a la izquierda de quien tiene la varita de pino

$$\sum_{i=1}^{5} i \cdot w_{i1} - \sum_{i=1}^{5} i \cdot w_{i3} = -1$$

16. La varita favorita de Hermione es la de álamo

$$\sum_{i=1}^{5} i \cdot v_{i1} = \sum_{i=1}^{5} i \cdot w_{i5}$$

17. Quien toma zumo de calabaza es vecino de quien le gusta el hechizo Expecto Patronum

$$\sum_{i=1}^{5} i \cdot x_{i,5} - \sum_{i=1}^{5} i \cdot z_{i,4} = 1 - (2 \cdot b1)$$

18. Hagrid vive al lado de quien tiene la varita de sauce

$$\sum_{i=1}^{5} i \cdot v_{i,5} - \sum_{i=1}^{5} i \cdot w_{i,4} = 1 - (2 \cdot b2)$$

19. Quien le gusta el hechizo expecto patronum vive al lado de quien le gusta la casa de magia Ravenclaw

$$\sum_{i=1}^{5} i \cdot z_{i,4} - \sum_{i=1}^{5} i \cdot y_{i,3} = 1 - (2 \cdot b3)$$

20. Quien le gusta Slytherin vive al lado de quien su hechizo favorito es accio

$$\sum_{i=1}^{5} i \cdot y_{i,4} - \sum_{i=1}^{5} i \cdot z_{i,3} = 1 - (2 \cdot b4)$$

21. Naturaleza de las variables:

$$\begin{aligned}
v_{ij} &\in \{0,1\} && \forall i \in \{1,...,5\}, \forall j \in \{1,...,5\} \\
w_{ik} &\in \{0,1\} && \forall i \in \{1,...,5\}, \forall k \in \{1,...,5\} \\
x_{il} &\in \{0,1\} && \forall i \in \{1,...,5\}, \forall l \in \{1,...,5\} \\
y_{im} &\in \{0,1\} && \forall i \in \{1,...,5\}, \forall m \in \{1,...,5\} \\
z_{iq} &\in \{0,1\} && \forall i \in \{1,...,5\}, \forall q \in \{1,...,5\} \\
b1, b2, b3, b4 &\in \{0,1\}
\end{aligned}$$

b. 7 puntos Voldemort está donde Neville

```python
from gurobipy import Model, GRB, quicksum

#las casas
I = range(1,6)
#las personas
J = {"Hermione", "Ron", "Ginny", "Neville", "Hagrid"}
#las bebidas
K = {"te", "vino de sauco", "chocolate caliente", "cerveza de mantequilla", "zumo de calabaza"}
#las varitas
L = {"sauco", "acebo", "pino", "sauce", "alamo"}
#los hechizos
M = {"alohomora", "lumos", "accio", "expecto patronum", "avada kedabra"}
#las casas de magia
N = {"Gryffindor", "Hufflepuff", "Ravenclaw", "Slytherin", "Muggle"}



#### ESCRIBA SU MODELO AQUI ####
m = Model()

#Variables
x = m.addVars(I, J, K, L, M, N, vtype = GRB.BINARY, name = "x")
b_1 = m.addVar(vtype = GRB.BINARY, name = "b_1")
b_2 = m.addVar(vtype = GRB.BINARY, name = "b_2")
b_3 = m.addVar(vtype = GRB.BINARY, name = "b_3")
b_4 = m.addVar(vtype = GRB.BINARY, name = "b_4")

#Función Objetivo
m.setObjective(quicksum(x[i,j,k,l,m,"Muggle"] for i in I for j in J for k in K for l in L for m in M), GRB.MAXIMIZE)

#R1 En cada casa vive un solo amigo, que tiene asociada una varita, un hechizo, una bebida y una casa de magia
m.addConstrs(quicksum(x[i,j,k,l,m,n] for j in J for k in K for l in L for m in M for n in N) == 1 for i in I)
m.addConstrs(quicksum(x[i,j,k,l,m,n] for i in I for k in K for l in L for m in M for n in N) == 1 for j in J)
m.addConstrs(quicksum(x[i,j,k,l,m,n] for i in I for j in J for l in L for m in M for n in N) == 1 for k in K)
m.addConstrs(quicksum(x[i,j,k,l,m,n] for i in I for j in J for k in K for m in M for n in N) == 1 for l in L)
m.addConstrs(quicksum(x[i,j,k,l,m,n] for i in I for j in J for k in K for l in L for n in N) == 1 for m in M)
m.addConstrs(quicksum(x[i,j,k,l,m,n] for i in I for j in J for k in K for l in L for m in M) == 1 for n in N)

#R2 Hagrid vive en la primera casa
m.addConstr(quicksum(x[1,"Hagrid",k,l,m,n] for k in K for l in L for m in M for n in N) == 1)

#R3 La persona que vive en la casa del medio toma chocolate caliente
m.addConstr(quicksum(x[3,j,"chocolate caliente",l,m,n] for j in J for l in L for m in M for n in N) == 1)

#R4 La persona cuyo hechizo favorito es accio tiene la varita de acebo
m.addConstr(quicksum(x[i,j,k,"acebo","accio",n] for i in I for j in J for k in K for n in N) == 1)

```

```
#R5 La persona que tiene la varita de sauco toma vino de sauco
m.addConstr(quicksum(x[i,j,"vino de sauco","sauco",m,n] for i in I for j in J for m in M for n in N) == 1)

#R6 Ginny toma té
m.addConstr(quicksum(x[i,"Ginny","te",l,m,n] for i in I for l in L for m in M for n in N) == 1)

#R7 El hechizo favorito de Neville es alohomora
m.addConstr(quicksum(x[i,"Neville",k,l,"alohomora",n] for i in I for k in K for l in L for n in N) == 1)

#R8 La casa de magia favorita de Ron es Gryffindor
m.addConstr(quicksum(x[i,"Ron",k,l,m,"Gryffindor"] for i in I for k in K for l in L for m in M) == 1)

#R9 A la persona que toma cerveza de mantequilla le gusta el hechizo avada kedabra
m.addConstr(quicksum(x[i,j,"cerveza de mantequilla",l,"avada kedabra",n] for i in I for j in J for l in L for n in N) == 1)

#R10 A la persona que le gusta el hechizo lumos le gusta la casa de magia Hufflepuff
m.addConstr(quicksum(x[i,j,k,l,"lumos","Hufflepuff"] for i in I for j in J for k in K for l in L) == 1)

#R11 Quien tiene la varita de sauco está justo a la izquierda de quien tiene la varita de pino
m.addConstr(quicksum(i * x[i,j,k,"sauco",m,n] for i in I for j in J for k in K for m in M for n in N)
 - quicksum(i * x[i,j,k,"pino",m,n] for i in I for j in J for k in K for m in M for n in N) == -1)

#R12 La varita de Hermione es la de alamo
m.addConstr(quicksum(x[i,"Hermione",k,"alamo",m,n] for i in I for k in K for m in M for n in N) == 1)

#R13 Quien toma zumo de calabaza es vecino de quien le gusta el hechizo excepto patronum
m.addConstr(quicksum(i * x[i,j,"zumo de calabaza",l,m,n] for i in I for j in J for l in L for m in M for n in N)
- quicksum(i * x[i,j,k,l,"expecto patronum",n] for i in I for j in J for k in K for l in L for n in N) == 1 - (2 * b_1))

#R14 Hagrid vive al lado de quien tiene la varita de sauce
m.addConstr(quicksum(i * x[i,"Hagrid",k,l,m,n] for i in I for k in K for l in L for m in M for n in N)
- quicksum(i * x[i,j,k,"sauce",m,n] for i in I for j in J for k in K for m in M for n in N) == 1 - (2 * b_2))

#R15 Quien le gusta el hechizo expecto patronum vive al lado de quien le gusta la casa de magia Ravenclaw
m.addConstr(quicksum(i * x[i,j,k,l,"expecto patronum",n] for i in I for j in J for k in K for l in L for n in N)
 - quicksum(i * x[i,j,k,l,m,"Ravenclaw"] for i in I for j in J for k in K for l in L for m in M) == 1 - (2 * b_3))

#R16 Quien le gusta Slytherin vive al lado de quien su hechizo favorito es accio
m.addConstr(quicksum(i * x[i,j,k,l,m,"Slytherin"] for i in I for j in J for k in K for l in L for m in M)
 - quicksum(i * x[i,j,k,l,"accio",n] for i in I for j in J for k in K for l in L for n in N) == 1 - (2 * b_4))

m.optimize()
m.printAttr('x')
print("Obj:", m.objVal)
```