PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2023 - 1
Profesores: G. Angulo - R. Cuadrado - G. Méndez - G. Pérez

Examen
Duración: 150 minutos.

Pregunta 1 (15 puntos)

Mi nombre es Máximo Décimo Meridio, comandante de los ejércitos del norte, general de las Legiones Fénix, fiel servidor del verdadero emperador Marco Aurelio. Le solicito que me ayude a conformar los batallones para mi siguiente enfrentamiento en donde debemos asignar a cada uno de los $i \in I$ soldados disponibles en los $j \in J$ posibles batallones que conformaremos. Un batallón lo considero conformado si este tiene asignado al menos un soldado en él, pero no estamos obligados a conformar exactamente los $|J|$ batallones.

Existen $k \in K$ funciones que un soldado puede desempeñar en un batallón, pero un mismo soldado puede realizar a lo más γ funciones simultáneamente y solo puede estar asignado a un único batallón como máximo. Mis fieles consejeros han evaluado a cada soldado i, entregándole un puntaje H_{ik} si el soldado i desempeña la función k en el batallón. A su vez, existen funciones claves en cada batallón, en donde deben existir exactamente β_k soldados desempeñando la función k en cada batallón que conformemos. Naturalmente, no todos los soldados son capaces de desempeñar todas las funciones, por lo que hemos clasificado en el parámetro A_{ik} con valor 1 si el soldado i es competente para desempeñar la función k, y 0 en caso contrario. Por último, para derrotar a las legiones del General Commodus, necesitaremos presentar batallones que en total dispongan de al menos Δ puntos de fuerza.

Como comandante es mi deber proteger la vida de mis soldados, por lo que entre menor sea la diferencia entre el batallón más fuerte y batallón más débil que conformemos, menos vidas arriesgaremos. La fuerza del batallón se mide exclusivamente por la suma del puntaje total de los soldados asignados según sus respectivos roles. Sé mi brazo derecho y ayúdame a tomar esta difícil decisión.

Solución:

Indices:

- i: soldado
- j: batallón
- k: función soldado

Parámetros:

- H_{ik}: puntaje asignado al soldado i para la función k
- β_k: cantidad de soldados de la función k requeridos por batallón
- A_{ik}: 1 si el soldado i es capaz de realizar la función k, 0 e.o.c.
- Δ: puntaje mínimo del total de batallones

- γ: Cantidad máxima de funciones a realizar por un soldado
- M: parámetro auxiliar número muy grande

Variables:

- X_{ijk}: 1 si asigno al soldado i al batallón j para realizar la función k, 0 e.o.c
- Y_j: 1 si conformo el battallón j, 0 e.o.c
- Z_j: puntaje del battalón j
- U_{ij}: 1 si asigno al soldado i al batallón j, 0 e.o.c
- W: Variable auxiliar para medir el puntaje máximo entre los batallones
- V: Variable auxiliar para medir el puntaje mínimo entre los batallones

$$\text{mín}\, W - V$$

- Asignación soldado a batallón único

$$\sum_{k \in K} X_{ijk} \leq M U_{ij} \qquad \forall i \in I, j \in J \tag{1}$$

$$\sum_{j \in J} U_{ij} \leq 1 \qquad \forall i \in I \tag{2}$$

  Nota de corrección: También se considerará correcto si se asigna a todos los soldados a un batallón: es decir $\sum_{j \in J} U_{ij} = 1 \quad \forall i \in I$

- Máxima cantidad de funciones en el batallón por soldado

$$\sum_{k \in K} X_{ijk} \leq \gamma \qquad \forall i \in I, j \in J \tag{3}$$

- Puntaje del batallón

$$Z_j = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} H_{ik} X_{ijk} \qquad \forall j \in J \tag{4}$$

- Puntaje máximo entre batallones

$$Z_j - M(1 - Y_j) \leq W \qquad \forall j \in J \tag{5}$$

- Puntaje mínimo entre batallones

$$V \leq Z_j + M(1 - Y_j) \qquad \forall j \in J \tag{6}$$

- Activación batallón

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} X_{ijk} \leq M Y_j \qquad \forall j \in J \tag{7}$$

◇ Requisito de funciones en cada batallón

$$\sum_{i \in I} A_{ik} X_{ijk} = \beta_k - (1 - Y_j)\beta_k \qquad \forall j \in J, k \in K \tag{8}$$

◇ Puntaje total mínimo

$$\sum_{j \in J} Z_j \geq \Delta \tag{9}$$

Nota de corrección: También se considerará como correcto si la evaluación de fuerza fue realizada por cada batallón, es decir: $Z_j \geq \Delta \quad \forall j \in J$

◇ Naturaleza de variables

$$X_{ijk} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I, j \in J, k \in K \tag{10}$$

$$Y_j \in \{0, 1\} \qquad j \in J \tag{11}$$

$$U_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I, j \in J \tag{12}$$

$$Z_j \geq 0 \qquad j \in J \tag{13}$$

$$W, V \geq 0 \tag{14}$$

Pregunta 2 (15 puntos)

(a) **(11 puntos)** Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{x} \ & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{s.a:} \ & x_1 - x_2 \geq -3 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

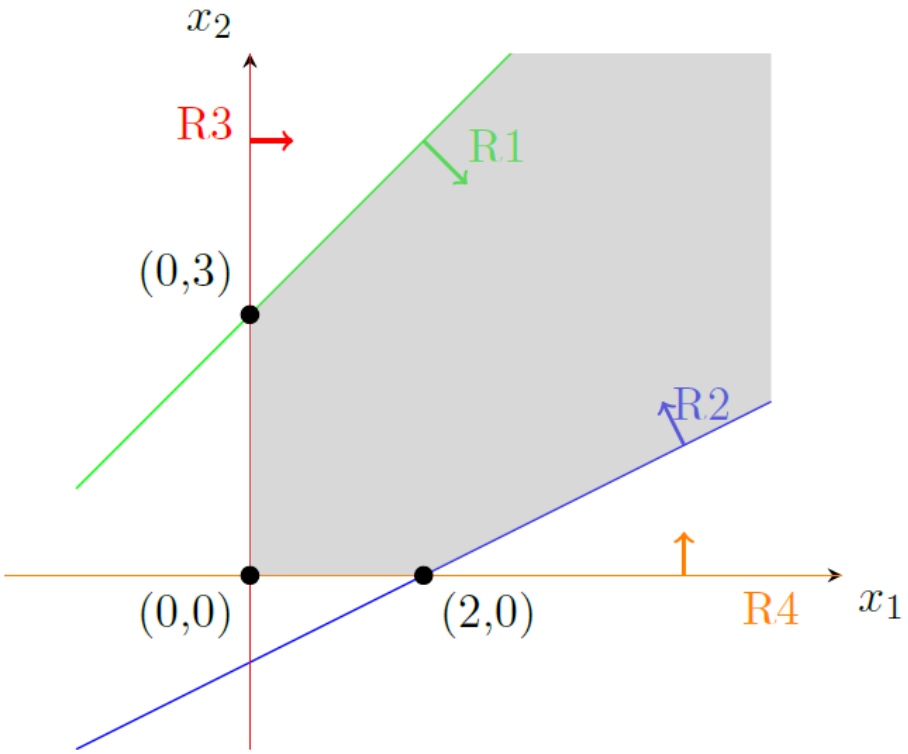
(i) **(3 puntos)** Grafique el dominio de este problema. Escriba las coordenadas de cada vértice en el dominio.

(ii) **(8 puntos)** Defina qué condiciones debe cumplir el vector $c = (c_1, c_2)$ para que ocurra lo siguiente:

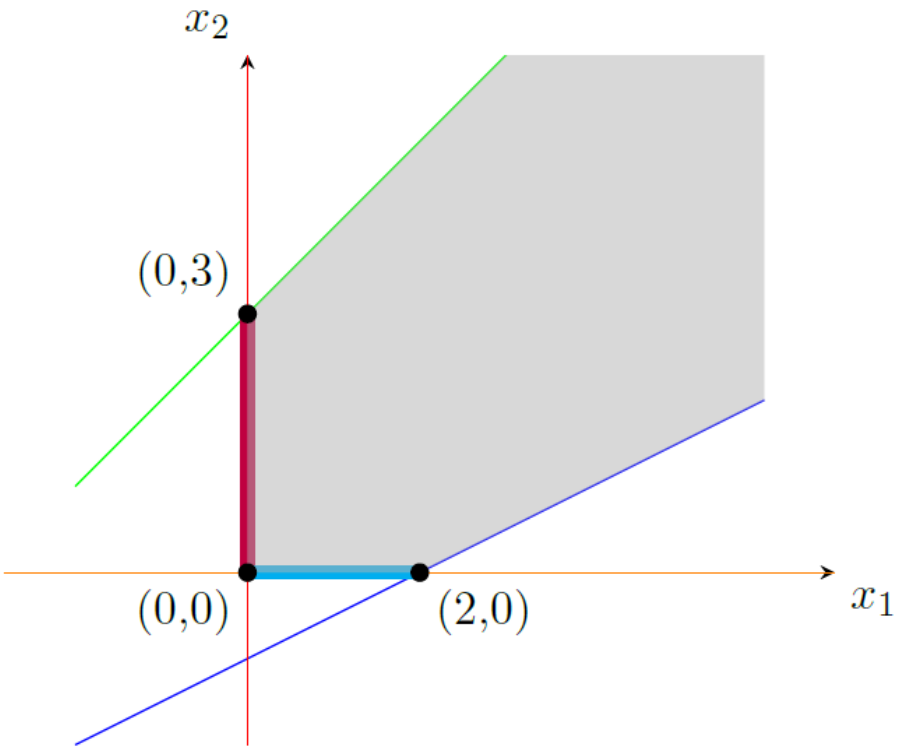
1) **(2 puntos)** Que el problema tenga múltiples soluciones óptimas y que el conjunto de soluciones óptimas sea acotado.
2) **(2 puntos)** Que el problema no tenga solución óptima.
3) **(2 puntos)** Que el problema tenga múltiples soluciones óptimas y que el conjunto de soluciones óptimas sea no acotado.
4) **(2 puntos)** Que el problema tenga solución única en un vértice (es suficiente definir condiciones para un vértice).

Solución:

i) En la siguiente imagen se muestra destacado en gris el dominio del problema marcando los vértices con puntos negros e indicando sus coordenadas. Se indica con flechas qué semiespacios cumplen las desigualdades asociadas a cada restricción.



ii.1) Si miramos la siguiente imagen, se tendría que tener que los puntos indicados con el segmento morado sean solución óptima o, alternativamente, que los puntos indicados con el segmento celeste sean solución óptima de problema.



Para que eso ocurra, $-\nabla f(x)$ debe apuntar en la dirección perpendicular de la restricción

correspondiente. Es decir, tendríamos las siguientes condiciones:

$(c_1 > 0 \wedge c_2 = 0) \vee (c_1 = 0 \wedge c_2 > 0)$

ii.2) Una condición suficiente es que menos el gradiente de la función objetivo $(-c_1, -c_2)$ pertenezca al cono asociado al poliedro del dominio. En ese caso el vector debería poder escribirse como $\lambda_1(1,1) + \lambda_2(2,1)$ con $\lambda_1 \geq 0$ y $\lambda_2 \geq 0$ (combinación cónica de los rayos extremos del cono).

Reordenando, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \leq 0$$

De manera más general, para que ocurra lo pedido es necesario que exista un rayo de escape que sea dirección de descenso. Podemos ver eso analizando el producto interno entre el gradiente de la función objetivo y un punto del cono asociado al poliedro. Luego, tenemos que:

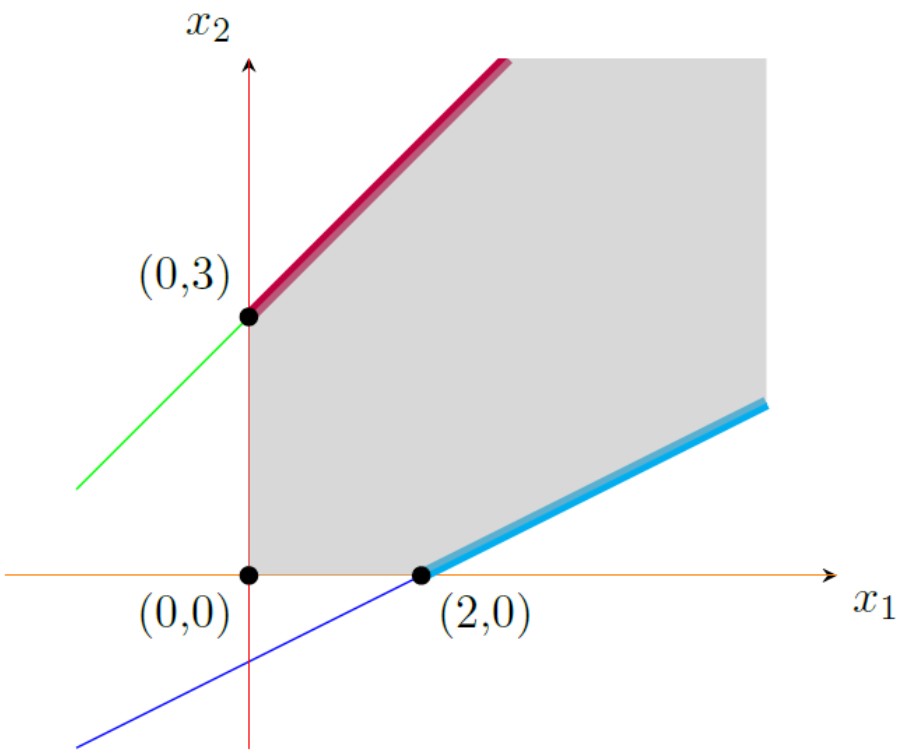
$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \left(\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) < 0 \rightarrow \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} < 0$$

Entonces, se debe tener:

$c_1 < -c_2 \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_1 + 2\lambda_2)}$

Es decir, $c_1 < -a \cdot c_2$ con $\frac{1}{2} \leq a = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_1 + 2\lambda_2)} \leq 1$.

ii.3) En este caso se debe tener que el vector de costos sea colineal con el gradiente de alguna de las restricciones activas de interés para que, como se ilustra en la siguiente imagen, las soluciones óptimas sean aquellas destacadas en morado o aquellas destacadas en celeste. Visto de otra forma para este problema, debe ser perpendicular a uno de los rayos extremos asociados al cono que define el poliedro. Además, el vector c debe apuntar hacia afuera del dominio.



Notar que $c = (0, 0)$ también cumple con lo pedido. Luego, se debe tener que:

$(c_1 = -c_2 \wedge c_1 \geq 0) \vee (c_2 = -2c_1 \wedge c_2 \geq 0)$

ii.4) Si el problema tiene solución óptima única, esta corresponderá a un vértice del poliedro. Luego, podemos ver qué condiciones se deben cumplir para que uno de esos vértices sea solución óptima del problema y que además sea única. Para verificar esto, podemos ver que menos el gradiente de la función objetivo esté en el cono generado por los gradientes de las funciones activas en el vértice. También, podemos revisar los costos reducidos que se tendría en el vértice.

Escribamos el problema en forma estándar:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{s.a:} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4_+ \end{aligned}$$

Para el vértice (0,0) vemos que la base correspondiente sería $B = \{3, 4\}$. Si llamamos $\mathbf{x}^1$ a esa solución, tenemos que $\mathbf{x}^1 = (0, 0, 3, 2)$. Luego, calculando los costos reducidos obtenemos $(c_1, c_2) - 0 > 0 \rightarrow (c_1 > 0 \wedge c_2 > 0)$ para que el vértice $(0, 0)$ sea solución óptima única.

Revisemos ahora el punto $(0, 3)$: La base asociada es $B = \{2, 4\}$.

$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$

$r_D^\intercal = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \end{bmatrix} > 0$

Luego, para que el vértice $(0, 3)$ sea solución óptima única del problema se debe tener:
$(c_2 < 0 \wedge c_2 > -c_1)$.

Por último, revisemos el caso del vértice $(2, 0)$: La base asociada es $B = \{1, 3\}$.

Luego, tenemos que: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$r_D^\intercal = \begin{bmatrix} c_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} c_2 + 2c_1 & -c_1 \end{bmatrix} > 0$

Luego, para que el vértice $(2, 0)$ sea solución óptima única del problema se debe tener: $(c_1 < 0 \wedge c_2 > -2c_1)$.

Distribución del puntaje

- ◇ Dibujo del dominio del problema. 3 puntos.
- ◇ Condiciones para el caso (ii.1). 2 puntos. Asignar 0.5 puntos si no mostró los rangos y relaciones de c_1 y c_2 pero indicó gráficamente cómo debe ser el vector c o un ejemplo de un vector c que cumple lo pedido.
- ◇ Condiciones para el caso (ii.2). 2 puntos. Asignar 0.5 puntos si no mostró los rangos y relaciones de c_1 y c_2 pero indicó gráficamente cómo debe ser el vector c o un ejemplo de un vector c que cumple lo pedido.
- ◇ Condiciones para el caso (ii.3). 2 puntos. Asignar 0.5 puntos si no mostró los rangos y relaciones de c_1 y c_2 pero indicó gráficamente cómo debe ser el vector c o un ejemplo de un vector c que cumple lo pedido.
- ◇ Condiciones para el caso (ii.4). 2 puntos. Asignar 0.5 puntos si no mostró los rangos y relaciones de c_1 y c_2 pero indicó gráficamente cómo debe ser el vector c o un ejemplo de un vector c que cumple lo pedido. En esta pregunta solo se requiere que lo hagan para un vértice de su elección.

(b) **(4 puntos)** Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & 24x_1 + 15x_2 + 6x_3 \\ \text{s.a:} \quad & 4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 300 \\ & 6x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 400 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Realice una iteración del algoritmo Simplex partiendo desde la base $B = \{1, 2\}$. Indique claramente el valor de la solución a la que llega y su base asociada.

Solución:

Primero, escribimos el problema en forma estándar:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5_+} \quad & -24x_1 - 15x_2 - 6x_3 \\ \text{s.a:} \quad & 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 300 \\ & 6x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 400 \end{aligned}$$

Dada la base $B = \{1, 2\}$, tenemos:

$A_B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

$A_B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

$\bar{b} = \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \end{bmatrix}$

$\bar{A_D} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$

$r_D^\intercal = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -24 & -15 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{10} & \frac{42}{10} & \frac{12}{10} \end{bmatrix}$

Dado que tenemos $r_3 < 0$, tenemos incentivo a cambiar de base para aumentar el valor de la variable x_3. Usando, el test de razón mínima, vemos que debe salir x_2 $(min(\frac{60}{(\frac{1}{10})}, \frac{20}{(\frac{2}{10})}) = min(600, \mathbf{100}))$.

Llegamos a la base $B = \{1, 3\}$ y tenemos ahora:

$A_B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

$A_B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

$\bar{b} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$z = 1800$

Distribución del puntaje

- ◇ Pasar a forma estándar y cálculo de la solución asociada a la base entregada. 1 punto.
- ◇ Se calculan los costos reducidos y se identifica qué variable entra. 1 punto.
- ◇ Se identifica qué variable sale (criterio de salida). 1 punto.
- ◇ Se actualiza y muestra la solución asociada a la nueva base (con que muestre el vector de solución se considera puntaje completo aunque no se indique el valor de la función objetivo). 1 punto.

Recuerde que para una matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ se tiene $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Pregunta 3 (15 puntos)

(a) **(7 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & f(x) & \\ \text{s.a} & g_i(x) \leq b_i \quad \forall i \in I & (\mu_i) \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \in J_1 & \\ & x_j \leq 0 \quad \forall j \in J_2 & \end{array}$$

donde $x \in \mathbb{R}^J$, $J_1 \subseteq J$, $J_2 \subseteq J$, $J_1 \cup J_2 = J$ y $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$.

Muestre que las condiciones de KKT son las siguientes:

(i) $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i \in I} \mu_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \geq 0 \quad \forall j \in J_1$

(ii) $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i \in I} \mu_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \leq 0 \quad \forall j \in J_2$

(iii) $\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i \in I} \mu_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right) x_j = 0 \quad \forall j \in J$

(iv) $\mu_i \left(g_i(x) - b_i \right) = 0 \quad \forall i \in I$

(v) $\mu_i \geq 0 \quad \forall i \in I$

Solución: Definiendo los multiplicadores no negativos α_j y β_j, para las restricciones de no negatividad y no positividad, respectivamente. Obtenemos las siguientes condiciones de KKT:

(a) $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i \in I} \mu_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = \alpha_j \quad \forall j \in J_1$

(b) $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i \in I} \mu_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = -\beta_j \quad \forall j \in J_2$

(c) $\mu_i \left(g_i(x) - b_i \right) = 0 \quad \forall i \in I$

(d) $\alpha_j \left(-x_j \right) = 0 \quad \forall j \in J_1$

(e) $\beta_j \left(x_j \right) = 0 \quad \forall j \in J_2$

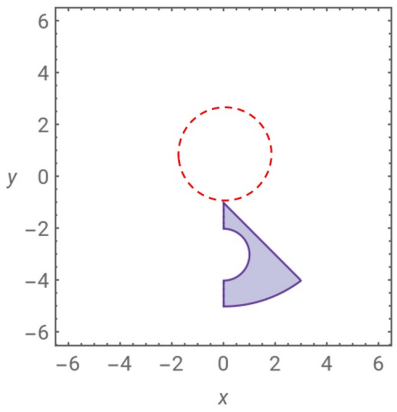
(f) $\mu, \alpha, \beta \geq 0$

Como $\alpha \geq 0$, la condición (a) implica la condición (i). Análogamente, como $-\beta \leq 0$, la condición (b) implica la condición (ii). (c) es equivalente a (iv). Reemplazando (a) en (d) y (b) en (e), se obtiene (iii). Ahora, las condiciones ya no están definidas por α_j y β_j, y (f) es lo mismo que (v). Demostrando lo deseado.

(b) **(8 puntos)** Sea el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & x^2 + (y-1)^2 \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 25 \\ & x^2 + (y+3)^2 \geq 1 \\ & x + y \leq -1 \\ & x \geq 0 \\ & y \leq 0. \end{array}$$

(i) **(4 puntos)** Encuentre la solución óptima de manera gráfica. ¿Es regular? **Solución:** La solución óptima es $(x^*, y^*) = (0, -1)$.



Las restricciones activas son $g_1(x, y) = x + y \leq -1$ y $g_2(x, y) = -x \leq 0$. Calculamos $\nabla g_1(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\nabla g_2(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Como $\nabla g_1(x^*, y^*)$ y $\nabla g_2(x^*, y^*)$ son l.i., el punto (x^*, y^*) es regular.

(ii) **(4 puntos)** Verifique si la solución óptima satisface las condiciones de KKT.

Solución: Calculamos $\nabla f(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$. Luego se tiene que la condición $\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, se satisface para $\mu_1 = \mu_2 = 4 \geq 0$. (También se pueden usar las condiciones de KKT de la pregunta (a).

Pregunta 4 (15 puntos)

(a) **(5 puntos)** A continuación se presenta parte de la salida de Gurobi al resolver un problema de programación lineal entera.

```
    Nodes    |    Current Node    |     Objective Bounds      |     Work
 Expl Unexpl |  Obj  Depth IntInf | Incumbent    BestBd   Gap | It/Node Time

     0     0  147.20113    0  301 -75897.975  147.20113   100%     -    0s
H    0     0                       48.6750000  147.20113   202%     -    0s
H    0     0                       48.7250000  147.20113   202%     -    0s
H    0     0                       49.1250000  147.20113   200%     -    0s
H    0     0                      127.1750000  140.63938  10.6%     -    0s
     0     0  138.36867    0  730  127.17500  138.36867  8.80%     -    0s
H    0     0                      127.5750000  138.36867  8.46%     -    0s
     0     0  135.38671    0  794  127.57500  135.38671  6.12%     -    0s
     0     0  135.38671    0  803  127.57500  135.38671  6.12%     -    0s
     0     0  134.96575    0  808  127.57500  134.96575  5.79%     -    0s
     0     0  134.78872    0  809  127.57500  134.78872  5.65%     -    0s
H    0     0                      128.1000000  134.32635  4.86%     -    0s
     0     0  129.12705    0 1015  128.10000  129.12705  0.80%     -    0s
     0     0  129.12483    0 1003  128.10000  129.12483  0.80%     -    0s
H    0     0                      128.4500000  129.12483  0.53%     -    0s
     0     2  129.12483    0  994  128.45000  129.12483  0.53%     -    0s
```

(i) **(2 puntos)** Indique si el problema es de minimización o maximización, y el valor óptimo de la relajación lineal.

Solución: El problema es de maximización, puesto que la columna `Incumbent`, la cual indica el valor del incumbente, es creciente, o que la columna `BestBd`, la cual indica la mejor cota dual, es decreciente. El valor óptimo de la relajación lineal corresponde al primer valor de la columna `BestBd`, es decir, 147.20113.

(ii) **(3 puntos)** Indique a qué corresponde la columna `BestBd` y explique a qué se debe el decrecimiento observado.

Solución: La columna `BestBd` indica la mejor cota dual para el valor óptimo del problema, en este caso, la menor cota superior dado que estamos maximizando. La reducción de su valor en este caso se debe a que Gurobi, de forma sucesiva, agrega planos cortantes al nodo raíz y lo reoptimiza. Como los cortes acotan la región factible y el problema es de maximización, el valor óptimo en cada iteración se mantiene o disminuye.

(b) **(3 puntos)** Explique por qué todo problema de optimización es equivalente a uno con función objetivo lineal.

Solución: Todo problema de la forma $\min\{f(x) : \ x \in X\}$ puede ser reformulado como $\min\{z : \ f(x) \leq z, \ x \in X, \ z \in \mathbb{R}\}$. Como la función $g(x, z) = z$ es lineal, obtenemos lo deseado.

(c) **(2 puntos)** Considere un problema de optimización donde el lado derecho de una de sus restricciones de desigualdad disminuye. Sin necesidad de justificar, complete la siguiente tabla indicando el signo del cambio del valor óptimo según el sentido de la optimización y de la restricción.

	Maximizar	Minimizar
$\leq$		
$\geq$		

Solución:

	Maximizar	Minimizar
$\leq$	-	+
$\geq$	+	-

(d) **(5 puntos)** Demuestre que el conjunto de soluciones óptimas de un problema convexo es convexo.

Solución: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ el conjunto de soluciones óptimas de mín$\{f(x) : x \in X\}$, donde $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo y $f : X \to \mathbb{R}$ es convexa. Sea z^* el valor óptimo. Dados $x^1, x^2 \in S$ y $\lambda \in [0, 1]$, debemos demostrar que $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in S$. Primero, por convexidad de X, tenemos que $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in X$, por lo que este punto es factible. Tenemos entonces

$$z^* \leq f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2) = \lambda z^* + (1 - \lambda)z^* = z^*,$$

donde la primera desigualdad viene de la definición de valor óptimo, la segunda de la convexidad de f, y las igualdades de la optimalidad de x^1 y x^2. Concluimos así que $f(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2) = z^*$, por lo que $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in S$.