PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - M. Klapp
A. Cataldo - J.T. Marquinez

Solución Tarea 2

Fecha de Entrega: Lunes 2 de Octubre.

La tarea contiene 60 puntos.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- Esta Tarea **debe** ser desarrollada por el mismo grupo ya asignado para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- La respuesta debe tener **hojas separadas por pregunta**. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y es decisión del alumno escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenada**. En cada hoja se debe colocar **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Se debe hacer **una entrega independiente por pregunta** y las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas.
- El plazo es el día Lunes 2 de Octubre a las 12:30 horas (impostergable). Aquellas Tareas no entregadas hasta la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **NO Entregadas**.
- La Tarea se entrega en la **secretaría docente de Ingeniería Industrial y de Sistemas en el segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar cada pregunta en el buzón correspondiente. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 10:30 y las 12:30 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- El desarrollo y discusión de la tarea debe ocurrir dentro de cada grupo. La tarea está construida con el propósito de desarrollar aprendizaje colaborativo y para entrenar al alumno antes de cada prueba. No se permite distribuir cada pregunta entre los integrantes del grupo y se espera que el grupo realize un trabajo conjunto. Está permitido discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar y desarrollar sus soluciones. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada por el equipo docente con consecuencias que podrían escalar a la **reprobación del curso** más la denuncia a las autoridades correspondientes (revisar medidas de programa con respecto a faltas a la ética).
- Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.

Problema 1. (15 puntos)

a) (11 Puntos) Considere el problema de optimización $P = \{Min \quad f(x) : x \in D\}$, con $D \subset \mathbb{R}^m$ un polítopo (poliedro acotado). Se define $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ como el conjunto de los puntos extremos de D, y S^* como el conjunto solución de P.
(*Hint: Para las demostraciones de esta pregunta puede hacer uso del siguiente teorema. Cualquier punto de un polítopo puede ser escrito como combinación convexa de sus vértices, en otras palabras, sea* $\hat{x} \in D$, *entonces existen* λ_i *con* $i = 1, \ldots, n$ *y* $\lambda_i \in [0, 1]$ *tales que:* $\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ *y* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$)

- *i*) (2.5 Puntos) Sea: $f(x) = c^T x$. Demuestre que sí $x^* \in S^*$ y $V \neq \emptyset$, entonces existe al menos un i con $i = 1 \ldots n$ tal que $c^T x^* = c^T v_i$.
- *ii*) (2.5 Puntos) Sea: $f(x) = c^T x$. Demuestre que si $x_1 \in S^*$, $x_2 \in S^*$ y $x_1 \neq x_2$, entonces existen al menos 2 i con $i = 1 \ldots n$ tal que $c^T x_1 = c^T x_2 = c^T v_i$.
- *iii*) (2 Puntos) Sea $D = \{x : Ax = b \wedge x \geq 0\}$ y $A \subseteq R^{m \times m}$ de rango completo. Demuestre que $n = |D| \leq 1$.
- *iv*) (2 Puntos) Sea D no vacío. Demuestre con un contraejemplo que: $S^* \cap \{v_1, \cdots, v_n\} \neq \emptyset$, no es necesariamente cierto.
- *v*) (2 Puntos) Sea $D \subset \mathbb{R}^m_+$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $g(c) = \text{mín}\{c^T x : x \in D\}$, es decir, $g(c)$ es el valor óptimo del problema P como función del vector de costos. Demuestre que $g(c)$ es creciente y cóncava en c.

b) (2 Puntos) Demuestre matemáticamente que si se aplica SIMPLEX Fase I a un problema de optimización en forma estándar, entonces el valor óptimo de esta fase será positivo sí y sólo sí el problema original es infactible.

c (2 Puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$P) \qquad \text{mín} \quad -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5$$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & & & + & x_4 & - & 6x_5 & = & 6 \\ -x_1 & + & x_2 & & & - & 2x_4 & + & 7x_5 & = & -4 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & - & 8x_5 & = & 46 \\ & & & & & & x & & \geq & & 0 \end{array}$$

Aplique el algoritmo SIMPLEX. ¿Es el problema acotado?. En caso de sí ser acotado encuentre la solución, y en caso de no ser acotado encuentre algún rayo de escape. Puede no aplicar Fase I, pero debe encontrar una base inicial factible.

Solución Problema 1.

a) *i*) Haciendo uso del teorema enunciado, se tiene que existe un $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*)$ tal que $x^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* v_i$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* = 1$. Ahora, supongamos que no existe ningún i tal que $c^T x^* = c^T v_i$. Entonces, $c^t v_i < c^t x^*, \forall i = 1 \ldots n$. Pero,

$$c^T x^* = c^T \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* c^T v_i < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* c^T x^* = c^T x^* \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* = c^T x^*$$

Lo que claramente es una contradicción, por lo que se demuestra que existe el menos un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $c^T x^* = c^t v_i$.

ii) Llamemos $v^* = c^T x_1 = c^T x_2$ e i_1 a algún $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $v^* = c^T v_{i_1}$ (en i) se demostró que debe existir al menos un i que cumpla esta condición). Ahora, supongamos que v_{i_1} es el único vértice perteneciente a S^*. Entonces, $c^t v_i < v^*, \forall i \in \{1 \ldots n\}/\{i_1\}$. Luego, existen $\lambda^j = (\lambda_1^j, \ldots, \lambda_n^j)$ tal que $x_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i^j v_i$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i^j = 1$ con $j = 1, 2$. Pero,

$$c^T x_1 = c^T x_2 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1 c^T v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 c^T v_i = v^* \iff \lambda_{i1}^1 = \lambda_{i1}^2 = 1 \iff v_{i1} = x_1 = x_2$$

Lo que claramente es una contradicción con el enunciado, por lo que se demuestra que existen al menos 2 i tal que $v^* = c^T v_i$.

iii) En primer lugar, es importante notar que $V \subseteq D \iff |V| \leq |D|$
Por enunciado, se sabe que A es de rango completo. Entonces, es invertible y tiene sólo una base, y por lo tanto, $\bar{x} = A^{-1}b$ es el único punto que cumple con la condición $Ax = b$. Finalmente, si $\bar{x} \geq 0 \rightarrow \bar{x} \in D \rightarrow |D| = 1$, además si $|D| = 1 \rightarrow D = V \rightarrow |V| = n = 1$. Por otro lado, si $\bar{x} \ngeq 0 \rightarrow \bar{x} \notin D \rightarrow |D| = n = 0$.
En conclusión, $|D| = n \leq 1$ y se demuestra lo pedido.

iv) Basta tomar $D = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$ y $f(x) = x^2$. Entonces, $V = \{-1, 1\}$ y $S^* = \{0\}$, por lo que $V \cap S^* = \emptyset$.

v) En primer lugar, se debe notar que $g(c') = (c')^T v_j$ para algún $v_j \in V$, dado que la F.O. es lineal y D un poliedro. Asumiremos que D no es vacío, en caso contrario cualquier afirmación sobre $g(c)$ sería cierta. Sea $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in [0, 1]$, y $v_i \in V$ tal que $g(c_i) = c^T v_i$ con $i = 1, 2$.
Para demostrar concavidad tomemos $v_3 \in V$ tal que $g(\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2) = (\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2)^T v_3$. Entonces:

$$(\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2)^T v_3 = \lambda c_1^T v_3 + (1-\lambda) c_2^T v_3 \geq \lambda c_1^T v_1 + (1-\lambda) c_2^T v_2 = \lambda g(c_1) + (1-\lambda) g(c_2)$$

Con lo que se demuestra la concavidad.

Para demostrar que $g(c)$ es creciente, supongamos $c_1 \leq c_2$ y sea $\Delta = c_2 - c_1$. Entonces, p.d. $g(c_1) \leq g(c_2)$. Por enunciado se sabe que $v_2 \geq 0$ y claramente $\Delta \geq 0$, por lo que:

$$g(c_1) = c_1^T v_1 \leq c_1^T v_2 \leq c_1^T v_2 + \Delta^T v_2 = (c_1 + \Delta)^T v_2 = c_2^T v_2 = g(c_2)$$

Con esto se demuestra que $g(c)$ es creciente en c.

b) Sea P) la Fase I de un problema de optimización en su forma estándar:

$$\begin{aligned} P) \qquad & \text{mín } \left(\vec{1}\right)^T t \\ s.a. \quad & \\ & \begin{array}{rcl} Ax + It & = & b \\ x, t & \geq & 0 \end{array} \end{aligned}$$

En primer lugar, es fácil ver que la cota mínima de la función objetivo es 0. Entonces, lo que se pide demostrar es equivalente a demostrar que el valor óptimo de P es igual a 0 si y sólo si el problema original es factible. Esta demostración es simple y se puede hacer de la siguiente manera:

$$t \geq 0 \wedge \left(\vec{1}\right)^T t = 0 \iff t = 0 \iff \text{existe algún } \bar{x} \text{ tal que } A\bar{x} = b \wedge \bar{x} \geq 0$$

Con la última condición se demostró que el valor óptimo de P es 0, si y sólo si existe algún x que cumpla las condiciones del problema original, es decir, que el problema original sea factible.

c) Es fácil ver que una base inicial factible para ejecutar SIMPLEX es el punto $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (6, 2, 26, 0, 0)$. Entonces, aplicando SIMPLEX:

$$B^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad R^0 = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 7 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 46 \end{pmatrix}$$

$$\left(B^0\right)^{-1} R^0 = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \quad \left(B^0\right)^{-1} b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \left(B^0\right)^{-1} R^0 = (-1, 3) - (-8, 23) = (7, -24)$$

No se está en el óptimo porque el costo reducido de x_5 es negativo y esta variable debe entrar a la base.

Iteración 1:
Haciendo el test de la razón mínima: $\frac{\bar{b}_i}{\bar{R}_{i5}} = (-1, 2, 3)$, se ve que x_2 debe salir de la base.

$$B^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -8 \end{bmatrix} \quad R^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left(B^1\right)^{-1} R^1 = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -8 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \left(B^1\right)^{-1} b = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \left(B^1\right)^{-1} R^1 = (-1, 3) - (-19, 12) = (18, -15)$$

No se está en el óptimo porque el costo reducido de x_4 es negativo y esta variable debe entrar a la base.

Iteración 2:
Haciendo el test de la razón mínima: $\frac{\bar{b}_i}{\bar{R}_{i4}} = (-18/5, 8/5, -2)$, se ve que x_3 debe salir de la base.

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \\ 3 & -2 & -8 \end{bmatrix} \quad R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(B^2\right)^{-1} R^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8/5 & 1 \\ -3/5 & 0 \end{bmatrix} \quad \left(B^2\right)^{-1} b = \begin{pmatrix} 26 \\ 8/5 \\ 18/5 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \left(B^2\right)^{-1} R^2 = (1, 2) - (9/5, -1) = (-4/5, 3)$$

No se está en el óptimo porque el costo reducido de x_2 es negativo y esta variable debe entrar a la base.

No hace falta hacer el test de la razón mínima, ya que toda la columna $\bar{R}_2$ tiene valores negativos, es decir, el problema es no acotado. Un rayo de escape por el cual la función objetivo aumenta indefinidamente se puede encontrar como $h = -\bar{R}_i \hat{x_B}$ con i la variable entrante. Finalmente, el rayo de escape es $h = (2, 1, 0, 8/5, 3/5)$.

Problema 2. (15 puntos)

a) (6 Puntos) Para las siguiente preguntas asuma que se desea ejecutar el algoritmo SIMPLEX sobre el problema $P = \{\text{mín} \quad c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$. Indique, justificando adecuadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) (1 Punto) Suponga que está en una iteración intermedia del algoritmo SIMPLEX, y sabe que uno de los vértices adyacentes a la base actual está sobredeterminado, entonces el algoritmo se quedará ciclando infinitamente.

ii) (1 Punto) Suponga que antes de empezar el algoritmo sabe que el problema tiene solución única y que el vértice óptimo está sobredeterminado, entonces el algoritmo visitará un vértice degenerado y realizará infinitas iteraciones sobre este (ciclaje).

iii) (1 Punto) Suponga que está en una iteración intermedia del algoritmo SIMPLEX y que uno de los costos reducidos de las variables no básicas es igual a 0, esto significa que alguna restricción es linealmente dependiente con las curvas de nivel de la función objetivo.

iv) (1 Punto) Suponga que está en una iteración intermedia del algoritmo SIMPLEX, entonces puede haber como máximo una variable no básica con costo reducido igual a 0.

v) (1 Punto) Suponga que está en una iteración intermedia del algoritmo SIMPLEX y tiene más de 1 variable con costo reducido menor a 0, entonces la variable con menor costo reducido será la que más disminuya el valor de la función objetivo al entrar a la base.

vi) (1 Punto) Si es que el dominio del problema es factible, entonces el algoritmo de SIMPLEX Fase I no puede tener degenerancia.

b) (9 Puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$P) \qquad \text{mín} \quad 3x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcll} 0.5x_1 + 2x_2 - 3x_3 & \leq & 10 & (1) \\ -2x_1 + 3x_3 & \geq & 3 & (2) \\ x_2 - x_3 & \geq & -3 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 10 & (4) \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 & \leq & 5 & (5) \\ x_1 & \leq & 0 & \\ x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

i) (2 Puntos) Formule el problema dual de P).

ii) (1 Punto) Determine la forma estándar del problema dual formulado en *i*).

Para las siguientes preguntas considere que y_i es la variable dual correspondiente a la restricción i del primal.

iii) (2 Puntos) Considere que en la solución del problema dual descrito en *ii*) se tiene que $y_1 = -0,6$ e $y_4 = 4.2$. Haciendo uso sólo de esta información y del modelo, encuentre la solución del problema dual y su valor óptimo.

iv) (1 puntos) Determine en qué rangos se pueden mover los coeficientes del lado derecho de las restricciones sin que cambie la solución encontrada en *iii*). Haga el análisis para cada restricción por separado.

v (1 Puntos) Determine en qué rango de valores puede estar el coeficiente de la función objetivo del dual correspondiente a las variables y_1 e y_2 sin que la solución encontrada en *iii*) cambie. Haga el análisis de sensibilidad para cada coeficiente por separado, y manteniendo todo lo demás constante.

vi) (2 Puntos) Ahora suponga que se quiere agregar la siguiente restricción al problema primal original:

$$4x_1 + 2.5x_2 - 3x_3 \geq 8$$

Determine si el ingreso de esta restricción cambiará el valor de la función objetivo o la solución encontrada en *iii*). En caso de que la solución cambie, resuelva el problema *iii*) nuevamente.

Solución Problema 2.

a) *i)* Esta afirmación es falsa. El algoritmo no necesariamente visitará el vértice sobredeterminado, por ejemplo en caso de que el vértice sobredeterminado tenga costo reducido positivo.

ii) Esta afirmación es falsa. Basta tomar el siguiente contraejemplo:

$$P) \qquad \min x_1$$

$$s.a.$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

La base solución es x_2 o x_3, pues los costos reducidos de la variables no básicas son $(1, 0)$ en ambos casos, sin embargo, las bases x_1, x_2, x_3 definen el mismo punto, por lo que el vértice óptimo está sobredeterminado y no entrará en degenerancia.

iii) Esta afirmación es falsa. Como contraejemplo tomemos el cubo unitario definido como $C = \{(x, y, z) : |x|, |y|, |z| \leq 1\}$, y la función objetivo $f(x) = x + y$. Ahora, si minimizamos este problema partiendo del punto $(1, 1, -1)$, es fácil ver que el punto $(1, 1, 1)$ es adyacente y que cualquier combinación convexa entre estos dos tendrá el mismo valor de la función objetvo, es decir, alguno de los costos reducidos de las variables no básica es igual a 0. Sin embargo, las curvas de nivel de la función objetivo no son paralelas (LD) a ninguna restricción, con lo que se contradice lo afirmado.

iv) Esta afirmación es falsa. Tomemos nuevamente el cubo unitario C definido en *iii)*, y la función objetivo $f(x) = z$. En este caso, es fácil ver que en cualquier base del algoritmo habrán 3 vértices que tendrán el mismo valor de la función objetivo, y por lo tanto, tendrán costo reducido igual a 0.

v) Esta afirmación es falsa. El costo reducido representa el cambio marginal de la función objetivo por aumentar una variable no básica, sin embargo, el cambio total en la función objetivo será igual a $\bar{c}_i \times \Delta$, siendo Δ el cambio en la variable no básica.

vi) Esta afirmación es falsa. Basta tomar un problema simple de optimización en Fase I como contraejemplo:

$$P) \qquad \min t_1 + t_2$$

$$s.a.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} x + It = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x, t \geq 0$$

Finalmente, la base correspondiente a las variables $(x_1, x_2) = (0, 4)$ es solución del problema, pero la base $(x_2, t_1) = (4, 0)$ también lo es, por lo tanto, el algoritmo SIMPLEX Fase I entrará en degenerancia.

b) *i)* La formulación dual de P es:

$$D) \qquad \text{máx} \quad 10y_1 + 3y_2 - 3y_3 + 10y_4 + 5y_5$$

$$s.a.$$

$$\begin{aligned} 0.5y_1 - 2y_2 + y_4 + 3y_5 &\geq 3 \quad (1) \\ 2y_1 + y_3 + y_4 - 2y_5 &\leq 3 \quad (2) \\ -3y_1 + 3y_2 - y_3 + y_4 - y_5 &= 6 \quad (3) \\ y_1, y_5 &\leq 0 \\ y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

ii) El problema dual planteado en su forma estándar es:

$$D) \qquad \text{mín} \quad 10y_1' - 3y_2 + 3y_3 - 10y_4^+ + 10y_4^- + 5y_5'$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcl} -0.5y_1' - 2y_2 + (y_4^+ - y_4^-) - 3y_5' - y_6 & = & 3 \\ -2y_1' + y_3 + (y_4^+ - y_4^-) + 2y_5' + y_7 & = & 3 \\ 3y_1' + 3y_2 - y_3 + (y_4^+ - y_4^-) + y_5' & = & 6 \\ y_1', y_2, y_3, y_4^+, y_4^-, y_5' & \geq & 0 \end{array}$$

iii) Por enunciado se sabe que $y_1 = -0.6$ e $y_4 = 4.2$. Llevándolo a las variables auxiliares esto queda $y_1' = 0.6$ e $y_4^+ = 4.2$, y por lo tanto, $y_4^- = 0$. Entonces, se sabe que estas dos variables pertenecerán a la base y que el sistema de ecuacciones queda:

$$\begin{array}{rcl} -2y_2 - 3y_5' - y_6 & = & -0.9 \\ y_3 + 2y_5' + y_7 & = & 0 \\ 3y_2 - y_3 + y_5' & = & 0 \end{array}$$

Ahora, considerando que la base es un sistema de 3 variables, sólo puede haber una variable básica entre las 4 restantes, es decir, 3 serán no básicas y valdrán valor 0. Se puede comprobar que la única variable que puede tener valor positivo si el resto vale 0 es y_6, por lo que se concluye que $y_6 = 0.9$.

Finalmente, la solución será: $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (-0.6, 0, 0, 4.2, 0)$ y el valor óptimo es 36.

iv) Para hacer un análisis de sensibilidad en el lado derecho, es necesario calcular la base de la solución y su inversa:

$$B = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ -1 & 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

δ será el cambio que puede aumentar el lado derecho de cada restricción sin que cambie la base.

- ◇ Restricción (1):

$$-\delta \geq -0.9\} \longrightarrow \delta \leq 0.9$$

- ◇ Restricción (2):

$$\left.\begin{array}{c} -0.2\delta \geq -0.6 \\ 0.6\delta \geq -4.2 \\ 0.7\delta \geq -0.9 \end{array}\right\} \longrightarrow -\frac{9}{7} \leq \delta \leq 3$$

- ◇ Restricción (3):

$$\left.\begin{array}{c} 0.2\delta \geq -0.6 \\ 0.4\delta \geq -4.2 \\ 0.3\delta \geq -0.9 \end{array}\right\} \longrightarrow -3 \leq \delta$$

v) Se supondrá que δ es la variación de cada coeficiente. Para hacer el análisis de sensibilidad en los coeficientes de la función objetivo se requiere el siguiente cálculo:

$$B^{-1}R = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 & 0 & -0.2 & -0.2 \\ 1.2 & 0.2 & -1 & 1.6 & 0.6 \\ 2.9 & 0.4 & 0 & 4.7 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \left(B\right)^{-1} R = (-3, 3, 10, 5, 0) - (-6, -6, 10, -18, -8) = (3, 9, 0, 23, 8)$$

- ◇ Variable y_1: Esta es una variable básica en la solución, por lo que obviamente el valor de la función objetivo cambiará, pero la solución no cambiará mientras δ cumpla $\bar{c}_R \geq \delta\eta_1$ siendo η_1 la primera fila de $B^{-1}R$. Finalmente, para que la base no cambie se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{c} 3 \geq 0.6\delta \\ 9 \geq -0.4\delta \\ 23 \geq -0.2\delta \\ 8 \geq -0.2\delta \end{array}\right\} \longrightarrow -22.5 \leq \delta \leq 5$$

- ◇ Variable y_2: Esta es una variable no básica en la solución, por lo que no cambiarán el valor de la función objetivo ni la solución mientras δ cumpla $\delta \geq -\bar{c}_2$. Finalmente, para que la solución se mantenga se debe cumplir:

$$\delta \geq -3$$

Sin embargo, recordemos que se cambió el signo al coeficiente de y_3 al estandarizar el modelo, por lo que en la función objetivo del dual original, mientras el coeficiente no aumente más de 3 unidades, se mantendrá la solución.

vi) Agregar una nueva restrcción en el primal equivale a agregar una variable al dual, por lo que se puede hacer un análisis de sensiblidad considerando una nueva variable y_8 al modelo plantedo en *ii*). La columna agregada al modelo será $R_8 = [4, -0.5, 3.5]$ y el coeficiente en la función objetivo de y_8 será 5. Nótese que la restricción es de carácter mayor o igual al lado derecho, por lo que y_8 será no negativa, y no es necesario transformarla en variable auxiliar. Finalmente, el costo reducido de la nueva variable considerando la solución de *ii*) es:

$$B^{-1}R_8 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.1 \\ -3.3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_8 = c_8 - c_b^T \left(B\right)^{-1} R_8 = 5 - (-3) = 8$$

El costo reducido es positivo por lo que la variable y_8 no entrará a la base y valdrá 0. Además, la solución y su valor objetivo se mantienen.

Problema 3. (15 puntos)

a) (2 Puntos)Determine condiciones para a, b y c, de manera que P tenga infinitas soluciones.

$$\begin{array}{lll} P) & \text{mín} & ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ s.a. & & \\ & x_1 + x_2 + x_3 & \leq 1 \\ & x_1 - x_2 + x_3 & \leq 1 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 & \leq 1 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 & \leq 1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 & \leq 1 \\ & x_1 - x_2 - x_3 & \leq 1 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 & \leq 1 \\ & -x_1 - x_2 - x_3 & \leq 1 \end{array}$$

b) (13 Puntos) Daniel es un inversionista que se enfrenta con el siguiente problema; debe decidir cuánto consumir este año ($t = 1$) y el próximo ($t = 2$), pero está restringido a limitaciones de ingreso. Su ingreso este año ya se lo entregaron y fue de a_1\$, y el ingreso del próximo año se lo entregan a principio de año y será de a_2\$. Suponga que Daniel no tenía ahorros, ni tiene ingresos externos a los dos mencionados. Con respecto al consumo del primer año Daniel no puede consumir más que sus ingresos, es decir, a_1\$. Mientras que en el consumo del segundo año puede endeudarse para el año 3 y consumir todo lo que quiera, o, quedar con ahorro para el año 3. Daniel es una persona conservadora y privilegia más los ahorros a medida que pasa el tiempo, entonces para evitar riesgos quiere que su ahorro total ponderado (ahorro del año 1 $\times 1$ + ahorro del año 2 $\times 2$) sea mayor o igual a m\$. Por último, Daniel requiere de un

mínimo de consumo entre los dos años para sobrevivir, por lo que se pide que la suma del ahorro en el año 1 y en el año 2 sea menor o igual a n\$.

La utilidad de Daniel de consumir en el año t es u_t *utiles*/\$ ($t = 1, 2$), y la utilidad de ahorrar plata o tener una deuda después del año 2 es u_3 *utiles*/\$ (positiva o negativa respectivamente).

i) (2 Puntos) Plantee un modelo de programación matemática lineal continuo que maximice la utilidad de Daniel y que **sólo** use las siguientes dos variables:

$$x_t = \text{Cantidad total de plata ahorrada al final del año } t, \ (t \in \{1, 2\})$$

Note que la variable x_2 puede ser positiva o negativa dependiendo de si ahorra o se endeuda al final del año 2.

ii) (1 Punto) ¿Cuántas posibles bases (factibles e infactibles) tiene este problema?

iii) (1 Punto) Suponga ahora que $a_1 = 200$ \$, $a_2 = 150$ \$, $u_1 = 5$ *utiles*/\$, $u_2 = 7$ *utiles*/\$, $u_3 = 8.5$ *utiles*/\$, $m = 120$ \$ y $n = 300$ \$. Con estos datos, escriba el modelo planteado en *a*) en su forma estándar.

iv) (2 Puntos) Encuentre una base inicial factible utilizando el algoritmo de SIMPLEX Fase I. Cuando tenga que ingresar una variable a la base, elija la de costo reducido negativo con mayor índice. Por ejemplo, si x_1 y x_2 tienen costo reducido negativo, entonces debe ingresar x_2 a la base. Además, si la decisión es entre 2 variables de holgura elija la que quiera, pues los índices son arbitrarios, y si es entre una variable original o una de holgura, debe entrar la de holgura.

v) (4 Puntos) Resuelva el modelo con el algoritmo SIMPLEX Fase II, a partir de la base inicial encontrada en *iv*). Indique la solución del problema estándar y del problema original. Para entrar variables a la base, use el mismo criterio que en *iv*).

vi) (1 Punto) Resuelva gráficamente el modelo planteado en *i*) y corrobore que la solución sea igual a la encontrada en *v*).

vii) (1 Punto) Haciendo uso del gráfico de *vi*), indique claramente los vértices de las bases por las que iteró en *v*).

viii) (1 Punto) Ahora suponga que el criterio para entrar variables a la base hubiera sido el contrario al usado en *iv*) y *v*), es decir, seleccionando la variable con costo reducido de menor índice. Haciendo uso del gráfico de *vi*), indique cuál sería un posible camino en caso de aplicar SIMPLEX partiendo de la misma base que *v*).

Solución Problema 3.

a) Notemos que para que haya infinitas soluciones, las curvas de nivel de la función objetivo deben ser paralelas a alguna arista de la figura, o en particular, a alguna restricción. Entonces, para que hayan infinitas soluciones se debe cumplir al menos 1 de las siguientes restricciones:

- $\diamond$ $|a| = |b| \wedge |c| \leq |a|$
- $\diamond$ $|a| = |c| \wedge |b| \leq |a|$
- $\diamond$ $|b| = |c| \wedge |a| \leq |b|$

b) *i*)

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & u_1(a_1 - x_1) + u_2(a_2 + x_1 - x_2) + u_3 x_2 \\ s.a. \quad & \\ & x_1 \leq a_1 \\ & x_2 \leq a_2 + x_1 \\ & x_1 + 2x_2 \geq m \\ & x_1 + x_2 \leq n \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

ii) En primer lugar, es preciso notar que la restricción 1 con la restricción 5 son paralelas, por lo que no se puede hacer un conteo con las 5 restricciones. Entonces, la cantidad de bases posibles será un conteo de 4 restricciones no paralelas, más las bases extras que suma una nueva restricción paralela:

$$\binom{4}{4-2} + 1 * 3 \quad = \quad 9$$

iii) El modelo de *a*) en su forma estándar quedará:

$$\begin{aligned} P) \qquad & \text{mín} \qquad -2x_1 - 1.5x_2^+ + 1.5x_2^- \\ s.a. & \\ & \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & 200 \\ -x_1 + x_2^+ - x_2^- + x_4 & = & 150 \\ x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- - x_5 & = & 120 \\ x_1 + x_2^+ - x_2^- + x_6 & = & 300 \\ x & \geq & 0 \end{array} \end{aligned}$$

iv) El modelo planteado con la nuevas variables artificiales quedará:

$$\text{mín} \qquad t_1$$

$$s.a.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 120 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$x, t \geq 0$$

El punto inicial está a la vista y equivale a la base x_3, x_4, x_6, t_1:

$$B_I^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_I^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 120 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$(B_I^0)^{-1} R_I^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (B_I^0)^{-1} b = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 300 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \left(B^0\right)^{-1} R^0 = \vec{0} - (1, 1, 0, -1) = (-1, -1, 0, 1)$$

Los costos reducidos de x_1 y x_2^+ son negativos, por lo que alguna de estas debe entrar a la base. Por enunciado, se debe elegir x_2^+.

Iteración 1:

Según el criterio del mínimo cuociente debe salir la variable t_1. Calculando nuevamente:

$$B_I^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_I^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B_I^0)^{-1} R_I^0 = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \qquad (B_I^0)^{-1} b = \begin{pmatrix} 60 \\ 200 \\ 90 \\ 240 \end{pmatrix}$$

Considerando que el valor de la función ya está en 0 y que esta es la cota mínima, se sabe que este es el óptimo y termina la fase I. Además, se concluye que una base factible para iniciar la fase II es $(x_2^+, x_3, x_4, x_6) = (60, 200, 90, 240)$

v) Tomando la base que se encontró y los cálculos que se hicieron en *iv*), se inicia el algoritmo SIMPLEX Fase II.

$$B^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 120 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$\left(B^0\right)^{-1} R^0 = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad \left(B^0\right)^{-1} b = \begin{pmatrix} 60 \\ 200 \\ 90 \\ 240 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \left(B^0\right)^{-1} R^0 = (-2, 1.5, 0) - (-0.75, 1.5, 0.75) = (-1.25, 0, -0.75)$$

No se está en el óptimo porque el costo reducido de x_1 y de x_5 es negativo. Usando la regla del enunciado, x_5 debe entrar a la base.

Iteración 1:
Haciendo el test de la razón mínima: $\frac{\bar{b}_i}{\bar{R}_{i4}} = (-120, \infty, 180, 480)$, se ve que x_4 debe salir de la base.

$$B^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(B^1\right)^{-1} R^1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \left(B^1\right)^{-1} b = \begin{pmatrix} 120 \\ 200 \\ 180 \\ 150 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \left(B^1\right)^{-1} R^1 = (-2, 1.5, 0) - (1.5, 1.5, -1.5) = (-3.5, 0, 1.5)$$

No se está en el óptimo porque el costo reducido de x_1 es negativo, por lo que debe entrar a la base.

Iteración 2:
Haciendo el test de la razón mínima: $\frac{\bar{b}_i}{\bar{R}_{i4}} = (-120, 200, -60, 75)$, se ve que x_6 debe salir de la base.

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(B^2\right)^{-1} R^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \quad \left(B^2\right)^{-1} b = \begin{pmatrix} 75 \\ 225 \\ 125 \\ 405 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \left(B^2\right)^{-1} R^2 = (1.5, 0, 0) - (1.5, 0.25, -1.75) = (0, -0.25, 1.75)$$

No se está en el óptimo porque el costo reducido de x_4 es negativo, por lo que debe entrar a la base.

Iteración 3:
Haciendo el test de la razón mínima: $\frac{\bar{b}_i}{\bar{R}_{i4}} = (-150, 450, 250, 810)$, se ve que x_3 debe salir de la base.

$$B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(B^3\right)^{-1} R^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \quad \left(B^3\right)^{-1} b = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 250 \\ 280 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \left(B^3\right)^{-1} R^3 = (1.5, 0, 0) - (1.5, -0.5, -1.5) = (0, 0.5, 1.5)$$

Finalmente, todos los costos reducidos son positivos, por lo que finaliza el algoritmo. La solución final de la solución estándar es $(x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5, x_6) = (200, 100, 0, 0, 250, 280, 0)$ y el valor óptimo es -550. Mientras que la solución del problema original es $(x_1, x_2) = (200, 100)$ y el valor óptimo es 550.

vi) A continuación se encuentra la resolución gráfica del problema:

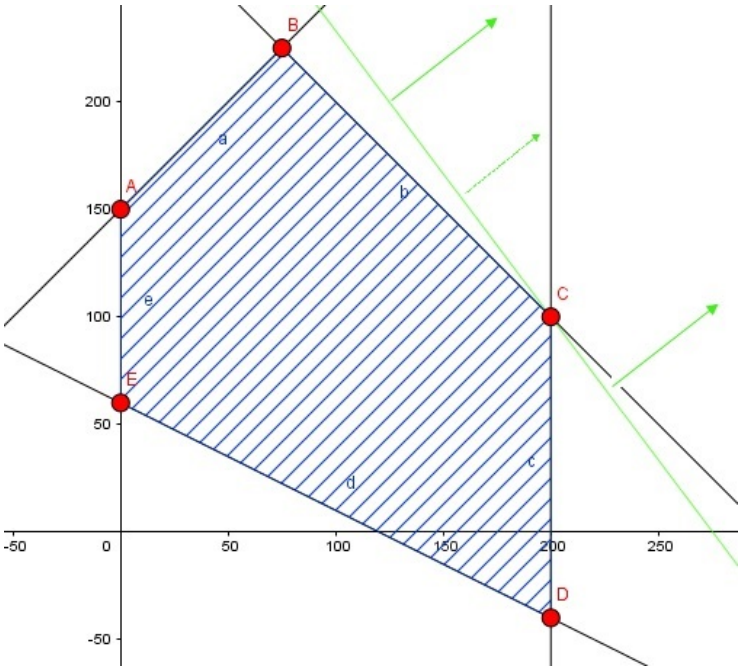


Figura 1: Dominio 3.b)

La región achurdad azul corresponde al dominio del problema, y la línea verde es la curva de

nivel de la función objetivo en el óptimo. La solución del problema está en el punto C, es decir, $(x_1, x_2) = (200, 100)$, por lo que se corrobora que la solución de v es correcta.

vii) Los vértices por los que se iteró con el algoritmo SIMPLEX en v) fueron (en orden):
- $\diamond$ $E : (x_1, x_2) = (0, 60)$
- $\diamond$ $A : (x_1, x_2) = (0, 150)$
- $\diamond$ $B : (x_1, x_2) = (75, 225)$
- $\diamond$ $C : (x_1, x_2) = (200, 100)$

viii) En este caso, los vértices que se hubieran visitado y su orden hubieran sido:
- $\diamond$ $E : (x_1, x_2) = (0, 60)$
- $\diamond$ $D : (x_1, x_2) = (200, -40)$
- $\diamond$ $C : (x_1, x_2) = (200, 100)$

Problema 4. (15 puntos)

a) (13 puntos) Suponga que Jack Sparrow, lo ha llamado a bordo del famoso barco pirata el *Perla Negra*, para que lo ayude con un problema de optimización que él no es capaz de resolver. Durante años ha robado riquezas a muchos puertos, y esta riqueza, que es el equivalente a R monedas de oro, se encuentra actualmente dentro del *Perla Negra* y la debe esconder antes de que se la roben. Para esto, cuenta con un conjunto I de posibles islas donde esconder el tesoro. Entonces, debe decidir en qué islas esconder el tesoro, y en qué orden visitarlas. Es posible navegar entre cualquier par de islas, pero hay un costo c_{ij} por viajar de la isla i a la isla j, con $i, j \in I$. Cada isla i tiene un cuidador designado que cobra t_i^1 \$ de costo variable por guardar el equivalente a una moneda de oro , t_i^2 \$ de costo fijo, y permite guardar como máximo el equivalente a k_i monedas de oro. Para disminuir las pérdidas en caso de robo, el tesoro debe dividirse en al menos n islas. Algunos de los cuidadores de las islas son muy rencorosos entre ellos y pueden poner tres tipos de condiciones en caso de que se quiera esconder una parte del tesoro ahí. La primera restricción la deben cumplir las islas l_1 pertenecientes al conjunto $L_1 \subset I$, y es que sí se esconde una parte del tesoro en el conjunto $A_{l_1} \subset I$ de islas, entonces se debe esconder en l_1 al menos el doble de lo guardado en cada una de esas islas (individualmente, no la suma). La segunda restricción la deben cumplir las islas l_2 pertenecientes al conjunto $L_2 \subset I$, y es que no se puede esconder nada del tesoro en el conjunto $A_{l_2} \subset I$ de islas para poder esconder en l_2. Por último, la tercera restricción la deben cumplir las islas l_3 pertenecientes al conjunto $L_3 \subset I$, y es que l_3 debe ser visitada dentro de las primeras v_{l_3} islas. Suponga que las restricciones no implican infactibilidades, por ejemplo, la isla j no puede pedir que se esconda el doble que la isla i y viceversa, ya que esto implicaría no pasar por ninguna de las dos.

Por otro lado, hay un conjunto $S \subset I$ de islas que Jack Sparrow quiere visitar en cualquier caso, dado que ahí es posible encontrar a la hermosa Elizabeth Swann. No necesariamente se debe esconder una parte del tesoro en estas islas.

Jack Sparrow no sabe mucho de optimización, pero el contraalmirante entiende algo del tema y recomienda no pasar más de una vez por cada isla. Entonces, le pide a usted que plantee un modelo de programación matemática lineal entero mixto que minimice los costos de esconder por completo el tesoro dentro del conjunto I de islas con un itinerario continuo y que no pase más de una vez por cada isla. Considere que la riqueza puede ser dividida en cantidades continuas, y que el *Perla Negra* parte y termina en isla Tortuga (representada en los índices por t), pero que no necesariamente debe esconder parte del tesoro en esta isla.

b) (2 puntos) Considere el siguiente problema de optimización P, en que f es continua y D es compacto.

$$\begin{aligned} P) \qquad & \min f(x) \\ s.a. \quad & \\ & x \in D \end{aligned}$$

Suponga que usted sabe que en este problema hay vértices sobredeterminados. Comente alguna regla que asegure que el método de SIMPLEX llegue a la solución óptima sin entrar en ciclaje. Para esto, puede investigar en internet o desarrollarla por su cuenta.

Solución Problema 4.

a) Variables de decisión:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el barco viaja de la isla } i \text{ a la isla } j. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{Si se esconde parte del tesoro en la isla } i. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Definiremos como T el conjunto de subconjuntos de I (inclusive I). Es decir, $T = \{t : t \subseteq I\}$

$$\alpha_t = \begin{cases} 1 & \text{Si el subconjunto } t \in T \text{ es el conjunto de todas las islas que visita Jack Sparrow.} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$y_i = \text{Equivalente a monedas de oro escondido en la isla } i.$$

$$z_i = \text{Posición en que se visita la isla } i.$$

$$W = \text{Cantidad de islas que se visitan}$$

Función Objetivo:

$$\text{mín} \sum_{i \in I} \left(\left(t_i^1 y_i + t_i^2 \delta_i \right) + \sum_{j \in I} c_{ij} x_{ij} \right)$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

(1) Se puede viajar máximo una vez a cada isla:

$$\sum_{j \in I} x_{ji} \leq 1 \qquad \forall i \in I$$

(2) Si se llega a una isla, se debe salir de esta:

$$\sum_{j \in I} x_{ij} = \sum_{j \in I} x_{ji} \qquad \forall i \in I$$

(3) Definición de W:

$$W = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} x_{ij}$$

(4) Definición de z_i (si la isla no se visita $z_i = 0$):

$$
\begin{aligned}
z_i &\leq |I| \sum_{j \in I} x_{ji} && \forall i \in I \\
z_i &\leq W \\
z_i &\geq z_j + 1 - |I|(1 - x_{ji}) && \forall i \in I/t, \forall j \in I \\
z_i &\leq z_j + 1 + |I|(1 - x_{ji}) && \forall i \in I/t, \forall j \in I
\end{aligned}
$$

(5) Se puede esconder parte del tesoro en i sólo si se visita esta isla:

$$\delta_i \leq z_i \qquad \forall i \in I$$

(6) Se puede esconder un máximo por isla:

$$y_i \leq k_i \delta_i \qquad \forall i \in I$$

(7) Restricción 1 de los cuidadores:

$$2y_j \leq y_{l_1} + R(1 - \delta_{l_1}) \qquad \forall l_1 \in L_1, \forall j \in A_{l_1}$$

(8) Restricción 2 de los cuidadores:

$$\delta_j + \delta_{l_2} \leq 1 \qquad \forall l_2 \in L_2, \forall j \in A_{l_2}$$

(9) Restricción 3 de los cuidadores:

$$z_{l_3} \leq v_{l_3} \delta_{l_3} \qquad \forall l_3 \in L_3$$

(10) Debe partir y terminar en isla Tortuga:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i \in I} x_{ti} &= 1 \\
z_t &= 1
\end{aligned}
$$

(11) El tesoro se debe esconder en al menos n islas:

$$\sum_{i \in I} \delta_i \geq n$$

(12) Se debe visitar el conjunto de islas S:

$$z_s \geq 1 \qquad \forall s \in S$$

(13) Se debe esconder todo el tesoro:

$$\sum_{i \in I} y_i = R$$

(14) Definición de α_T:

$$\sum_{i \in I/t} \sum_{j \in I} x_{ij} \leq |I|(1 - \alpha_t) \qquad \forall t \in T$$

$$\sum_{i \in I/t} \sum_{j \in I} x_{ji} \leq |I|(1 - \alpha_t) \qquad \forall t \in T$$

$$\sum_{t \in T} \alpha_t = 1$$

(15) Se deben evitar los subcircuitos (un sólo circuito continuo):

$$\sum_{j \in t} \sum_{i \in t : i \neq j} x_{ij} \leq |t| - 1 + \alpha_t \qquad \forall t \in T$$

(16) Naturaleza de las variables:

$$\begin{aligned}
x_{ij} &\in \{0, 1\} && \forall i \in I, \forall j \in I \\
\delta_i &\in \{0, 1\} && \forall i \in I \\
\alpha_t &\in \{0, 1\} && \forall t \in T \\
z_i &\in \{0, \ldots, |I|\} && \forall i \in I \\
W &\in \{0, \ldots, |I|\} && \\
y_i &\in \mathbb{R}_0^+ && \forall i \in I
\end{aligned}$$

b) A continuación se muestran 3 de los posibles métodos para evitar que SIMPLEX entre en ciclaje:

(I) Regla de Bland: Elegir siempre el costo reducido negativo con menor índice, y si hay empate en el Test de la Razón Mínima, también elegir el menor índice.

(II) Método Lexicográfico: Similar a la Regla de Bland, pero la elección de variables se realiza en orden lexicográfico (por abecedario)

(III) Método de Perturbación: Perturbar ligeramente el lado derecho de las restricciones con cambios aleatorios, para que las restricciones no sobredeterminen un vértice.

Cualquier respuesta que haya explicado algo similar a estos 3 métodos, se considerará buena.