PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - F. Palominos
A. Cataldo - J.T. Marquinez

Interrogación 3

COMPROMISO DEL CÓDIGO DE HONOR

Me comprometo a no entregar ni recibir ayuda indebida en esta evaluación. Esto incluye discutir la evaluación con compañeros que aún no lo han rendido. También declaro que si me percato de que existe fraude de cualquier tipo en esta evaluación, tengo el deber de comunicárselo a los profesores del curso, quienes seguirán los procedimientos establecidos en la reglamentación de la Escuela de Ingeniería y de la Pontificia Universidad Católica de Chile para perseguir y sancionar cualquier acto de deshonestidad académica.

Nombre completo: _____

Firma: _____

Fecha: _____

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 01-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - F. Palominos
A. Cataldo - J.T. Marquinez

Interrogación 3

Duración: 2 horas y 50 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) **(3 puntos)** En un problema de maximización se tiene un punto x_0 que alcanza un valor de C al ser evaluada en la función objetivo. A su vez, se le entrega una solución factible del problema dual, y_0, con valor D en su función objetivo. Comente que implicancias tiene para x_0 si se cumplen las siguientes relaciones para D.

(i) $D < C$

(ii) $D = C$

(iii) $D > C$

Con $D, C \geq 0$

Solución:

(i) Lo comprobaremos por contradicción. Si x_0 fuese factible, se tendría por dualidad débil que: $c^T x_0 <= b^T y$, pero del enunciado se plantea que $D < C$, por lo tanto necesariamente x_0 debe ser una solución infactible.

(ii) Por dualidad fuerte, necesariamente si $D = C$ implicaría que x_0 es solución óptima del problema primal, a menos que x_0 sea infactible. Por lo tanto, si x_0 es factible, x_0 es óptimo.

(iii) Por dualidad débil y fuerte, se puede garantizar que si x_0 es factible, esta no es la solución óptima del problema primal. Ya que necesariamente las soluciones óptimas de ambos problemas deben alcanzar el mismo valor, por lo que x_0 no puede ser la solución óptima del problema.

(b) **(4 puntos)** Se tiene el siguiente modelo de optimización

$$\begin{array}{lll} \max & ax_1 + bx_2 & \\ & cx_1 + dx_2 & \geq e \\ & fx_1 + gx_2 & \leq h \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Le indican que en el óptimo se obtuvo el siguiente modelo en forma canónica.

$$\begin{array}{lrl} \min & K - \hat{a}x_3 + \hat{b}x_4 & \\ & x_1 + \hat{c}x_3 + \hat{d}x_4 & = \hat{e} \\ & x_2 + \hat{f}x_3 + \hat{g}x_4 & = \hat{h} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Con $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{e}, \hat{f}, \hat{g}, \hat{h} > 0$

(i) **(2 puntos)** Determine cuál es el valor de las variables duales en el óptimo y el valor de la función objetivo evaluada en ellas. ¿Existe alguna condición que se deba respetar para cumplir la proposición anterior?
Solución: Si el problema dual es factible, el valor de las variables duales son $y_1 = \hat{a}$ y $y_2 = \hat{b}$, siendo el valor de la función objetivo $e\hat{a} + h\hat{b}$. Para que este resultado sea válido, y por lo tanto el valor de las variables duales sea único, se debe cumplir que en el óptimo del problema no existe degenerancia.

(ii) **(2 puntos)** Indique en cuánto varía el valor de la función objetivo en caso de aumentar la cantidad de recursos disponibles de la restricción 2 en delta unidades. ¿Existe alguna condición adicional para delta de manera que el análisis anterior sea válido?

Solución: Utilizando el valor del precio sombra asociado a la restricción 2, se puede determinar que la variación en la función objetivo corresponde a $\delta\hat{b}$. El análisis anterior será válido mientras no exista degenerancia en el óptimo del problema original, y que además el valor de δ cumpla con la condición que $B^{-1}b' \geq 0$, que corresponde a asegurar que el cambio es suficientemente pequeño.

(c) **(6 puntos)** Se tiene el siguiente modelo de optimización en variables enteras

$$\begin{array}{lrl} \max & 5x_1 + 25x_2 & \\ & \frac{1}{2}x_1 + x_2 & \leq 7.75 \\ & \frac{-1}{3}x_1 + x_2 & \leq 4 \\ & x_1, x_2 & \in Z_0^+ \end{array}$$

cuyo sistema canónico en el óptimo relajado es el siguiente:

$$\begin{array}{lrl} \min & 160 - 16x_3 - 9x_4 & \\ & x_1 + \frac{6}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4 & = \frac{9}{2} \\ & x_2 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 & = \frac{11}{2} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{array}$$

(i) **(3 puntos)** Indique si incorporar las siguientes restricciones corresponden a desigualdades válidas o no.

1) $x_1 + x_2 \geq -1$
2) $\frac{6}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4 \geq \frac{3}{2}$
3) $\frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 \geq \frac{1}{2}$

Solución:

1) No corresponde a una desigualdad válida ya que esta no está cortando al óptimo fraccionario.
2) La restricción planteada la podemos reescribir como $x_1 \leq 3$ (al reemplazar que $x_3 = 7.75 - \frac{1}{2}x_1 - x_2$ y $x_4 = 4 + \frac{1}{3}x_1 - x_2$), con lo cual no puede ser una desigualdad válida ya que estaríamos cortando a soluciones enteras factibles como el punto $(4, 5)$

3) La restricción planteada si corresponde a una desigualdad válida, ya que la podemos reescribir como $x_2 \leq 5$ (usando nuevamente que $x_3 = 7.75 - \frac{1}{2}x_1 - x_2$ y $x_4 = 4 + \frac{1}{3}x_1 - x_2$) con lo cual estaría cortando a la solución relajada $(4.5, 5.5)$ y no estaría cortando a ninguna solución factible entera.

(ii) **(3 puntos)** Construya un plano cortante utilizando el método de generación de cortes de Gomory. Indique qué es lo que sucede con la solución óptima del problema relajado.

Solución: Podemos utilizar por ejemplo un corte de gomory:

Si se usa la primera variable fraccionaria se tiene el siguiente corte de Gomory:

$$\frac{1}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{5}\left(\frac{31}{4} - \frac{1}{2}x_1 - x_2\right) + \frac{4}{5}\left(4 + \frac{1}{3}x_1 - x_2\right) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{6}x_1 - x_2 \geq -\frac{17}{4}$$

Con ello, la solución óptima del problema relajado en este nuevo escenario sería infactible.

Si se usa la segunda variable fraccionaria se tiene el siguiente corte de Gomory:

$$\frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \frac{2}{5}\left(\frac{31}{4} - \frac{1}{2}x_1 - x_2\right) + \frac{3}{5}\left(4 + \frac{1}{3}x_1 - x_2\right) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x_2 \geq -5$$

Con ello, la solución óptima del problema relajado en este nuevo escenario sería infactible.

Pregunta 2 (16 puntos)

(a) **(10 puntos)** Considere el siguiente problema:

$$(P) \quad max \quad 2x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \; -3x_1 + 4x_2 &\leq 8 && (1)\\ x_1 + 4x_2 &\leq 24 && (2)\\ x_1 + 8x_2 &\geq 16 && (3)\\ x_1 + x_2 &\leq 9 && (4) \end{aligned}$$

Usted sabe que la solución óptima del problema es el punto $(4, 5)$.

(i) **(2 puntos)** Escriba el problema dual.

(ii) **(2 puntos)** Determine la solución óptima del problema dual.

(iii) **(3 puntos)** ¿Qué sucede con el valor óptimo del problema si es que el lado derecho de la restricción (2) aumenta en una unidad? Para responder utilice conceptos de dualidad en su respuesta.

(iv) **(3 puntos)** Suponga que se elimina del problema la restricción (2), ¿qué sucede con el valor óptimo del problema si es que el lado derecho de la restricción (4) aumenta en una unidad? Para responder utilice conceptos de dualidad en su respuesta.

Solución:

(i) El problema dual es (considera que el primal se transformó a un problema de minimización):

$$(D) \quad max \quad 8y_1 + 24y_2 + 16y_3 + 9y_4$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \; -3y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= -2 && (5)\\ 4y_1 + 4y_2 + 8y_3 + y_4 &= -4 && (6)\\ y_3 &\geq 0 && (7)\\ y_1, y_2, y_4 &\leq 0 && (8) \end{aligned}$$

Dado que la solución óptima del problema primal es degenerada, se pueden definir múltiples soluciones del problema dual definiendo pares de restricciones del problema primal que están activas en ese punto.

Primera solución dual: se asume que las restricciones (1) y (3) están inactivas, por lo que $y_1 = 0$ e $y_3 = 0$. Por lo tanto, para calcular la solución dual se tiene que:

$$y_2 + y_4 = -2$$
$$4y_2 + y_4 = -4$$

Resolviendo el problema se tiene que $y_2 = \frac{-2}{3}$ e $y_4 = \frac{-4}{3}$, lo cual cumple con que $y_2, y_4 \leq 0$.

Segunda solución dual: se asume que las restricciones (2) y (3) están inactivas, por lo que $y_2 = 0$ e $y_3 = 0$. Por lo tanto, para calcular la solución dual se tiene que:

$$-3y_1 + y_4 = -2$$
$$4y_1 + y_4 = -4$$

Resolviendo el problema se tiene que $y_1 = \frac{-2}{7}$ e $y_4 = \frac{-20}{7}$, lo cual cumple con que $y_1 \geq 0, y_4 \leq 0$.

Tercera solución dual: se asume que las restricciones (3) y (4) están inactivas, por lo que $y_3 = 0$ e $y_4 = 0$. Por lo tanto, para calcular la solución dual se tiene que:

$$-3y_1 + y_2 = -2$$
$$4y_1 + 4y_2 = -4$$

Resolviendo el problema se tiene que $y_1 = \frac{1}{4}$ e $y_2 = \frac{-5}{4}$, lo cual no es una solución válida, ya que no cumple con que $y_1 \leq 0$.

(ii) El valor óptimo del problema dual es -28.

(iii) Dado que se trata de una solución degenerada y se desea aumentar en una unidad el lado derecho de la restricción (2), el valor óptimo no cambiará, ya que el punto óptimo se encontrará definido por las restricciones (1) y (2) y se mantendrá en $(4, 5)$.

(iv) Considerando que la restricción (2) se elimina, la solución óptima del primal no cambia ni su valor óptimo. Por lo que sólo considerando las variables duales y el cambio en una unidad del lado derecho de la restricción (4), se tiene que el valor óptimo se debiese ver aumentado en $\frac{20}{7}$ unidades, es decir, el nuevo valor óptimo es: $28 + \frac{20}{7} = \frac{216}{7}$.

(b) **(6 puntos)** En la siguiente tabla se le entrega un listado de todas las soluciones básicas que posee el problema P) junto con sus respectivos valores evaluados en la función objetivo y si son o no factibles, y en la tabla siguiente se le entrega un listado de todos las soluciones básicas que posee el problema dual con sus respectivos valores evaluados en la función objetivo.

Puntos	Coordenadas	Valor	Factibilidad
A	$(0, 2)$	2	Factible
B	$(\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$	2	Factible
C	$(1, 0)$	1	Factible
D	$(0, 0)$	0	Factible
E	$(0, -3)$	-3	Infactible
F	$(2, 0)$	2	Infactible

Puntos	Coordenadas	Valor
E	$(0, -1)$	-3
F	$(1, 0)$	2
G	$(0, \frac{1}{3})$	1
H	$(0, 0)$	0

(i) **(3 puntos)** Determine en base a la información anterior todos las soluciones básicas factibles del problema dual. Indique adicionalmente cuál es la solución y valor óptimo tanto del problema primal como del problema dual.

(ii) **(3 puntos)** Construya en base a la información anterior el modelo del problema primal y demuestre que si se modificaran los lados derechos de ambas restricciones al valor -1, el problema dual sería no acotado.

Solución:

(i) Dado que solamente los puntos A, B, C, D son soluciones factibles del problema primal, por dualidad débil podemos garantizar que ninguna solución factible del problema dual puede alcanzar un valor superior a 0. Con ello, necesariamente F y G deben ser soluciones infactibles para el problema dual. Luego, como el problema primal es acotado, necesariamente la solución óptima del problema primal debe ser alguno de los puntos extremos entregados. Por lo tanto, el óptimo del problema primal se alcanza en el punto $(0, 0)$ con valor óptimo igual a 0. Por último, como el problema primal es factible y acotado, necesariamente el problema dual debe ser factible y acotado. Luego por dualidad fuerte podemos garantizar que el valor óptimo del problema dual es el punto H ya que es el único punto extremo que alcanza el valor 0.

(ii) De la información anterior de la tabla 1, podemos construir el sistema de ecuaciones del problema primal. Gráficamente nos damos cuenta que los puntos $(0, 2)$ y $(2, 0)$ forman una primera restricción, y los puntos $(1, 0)$ y $(\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$ forman la segunda restricción.
A su vez, utilizando los puntos A y C, podemos construir un sistema de ecuaciones para encontrar el valor de los coeficientes de las variables en la función objetivo.
Con todo lo anterior, el modelo del problema primal es el siguiente:

$$\begin{array}{lrl} \min & x_1 + x_2 & \\ & x_1 + x_2 & \leq 2 \\ & 3x_1 - x_2 & \leq 3 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Luego, si modificáramos los valores del lado derecho de la primera y segunda restricción a -1 y considerando que las variables son no negativas, obtendríamos un dominio infactible. Con ello, mediante el corolario de la dualidad débil podemos garantizar que el problema dual es no acotado, ya que el problema dual con los cambios realizados en el problema primal seguirá siendo factible (sólo se modificará la función objetivo del problema dual).

Pregunta 3 (14 puntos)

(a) **(10 puntos)** Considere el siguiente problema de programación lineal entera:

$$\begin{array}{lrl} (PE) \quad \max & 3x_1 + 5x_2 & \\ & 6x_1 + 7x_2 & \leq 38 \\ & 9x_1 + x_2 & \leq 44 \\ & -x_1 + 5x_2 & \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0, & \textit{enteros} \end{array}$$

Al resolver la relajación lineal de este problema, se obtiene que $x_1 \cong 2,29$ y que $x_2 \cong 3,45$; además la función objetivo vale $z_0 \cong 24,19$.

Si comenzamos a resolver mediante Branch & Bound, al ramificar a partir de x_1; en particular con $x_1 \leq 2$ obtendríamos que el incumbente pasa de $-\infty$ a 21 en alguno de los subproblemas obtenidos a partir de esa ramificación.

(i) **(5 puntos)** Resuelva el resto del árbol mediante Branch & Bound, indicando claramente los subproblemas resueltos, sus soluciones y valor de su función objetivo. También debe indicar si se generó un cambio en el incumbente o no, además de que si en la ramificación que desarrolló encontró el óptimo del problema entero (y su valor) o si se encuentra en la ramificación no desarrollada.

(ii) **(3 puntos)** Ahora busque la solución al problema entero de dos formas: primero mediante una regla *Greedy* (o "golosa"), es decir, que se basa en elegir primero la variable que más conviene según función objetivo), y, segundo, por redondeo simple a partir de la solución relajada. Compare sus resultados con lo obtenido en (i).

(iii) **(2 puntos)** Construya una desigualdad que **fortalezca** la formulación del problema (PE).

Solución:

(i) Dado que ya se ramificó con $x_1 \leq 2$; debemos continuar con la rama obtenida de agregar la restricción $x_1 \geq 3$; obteniendo el siguiente subproblema $P1$):

$$\begin{array}{lrl} \max & 3x_1 + 5x_2 & \\ & 6x_1 + 7x_2 & \leq 38 \\ & 9x_1 + x_2 & \leq 44 \\ & -x_1 + 5x_2 & \leq 15 \\ & x_1 & \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0, & \end{array}$$

Al resolver mediante método gráfico, obtenemos lo siguiente:

Por lo que la solución óptima de este subproblema es $(x_1^*; x_2^*) \cong (3; 2,86)$, obteniendo como valor de la función objetivo $z_1^* \cong 23,28$ y el incumbente continúa siendo 21. Adicionalmente no podemos podar esta rama, por lo que debemos seguir ramificando.

Ahora, para $P2$), agregamos la restricción $x_2 \leq 2$ a $P1$), lo cual queda:

$$\begin{array}{lrl} \max & 3x_1 + 5x_2 & \\ & 6x_1 + 7x_2 & \leq 38 \\ & 9x_1 + x_2 & \leq 44 \\ & -x_1 + 5x_2 & \leq 15 \\ & x_1 & \geq 3 \\ & x_2 & \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0, & \end{array}$$

Al resolver mediante método gráfico, obtenemos lo siguiente:

Por lo que la solución óptima de este subproblema es $(x_1^*; x_2^*) = (4; 2)$, obteniendo como valor de la función objetivo $z_2^* = 22$ y entonces el incumbente cambia ya que se obtuvo una solución entera de mejor valor que 21, siendo ahora $\bar{z} = 22$. Adicionalmente, podemos podar esta rama.

Ahora, para $P3$), agregamos la restricción $x_2 \geq 3$ a $P1$), lo cual queda:

$$\begin{array}{lrl} \max & 3x_1 + 5x_2 & \\ & 6x_1 + 7x_2 & \leq 38 \\ & 9x_1 + x_2 & \leq 44 \\ & -x_1 + 5x_2 & \leq 15 \\ & x_1 & \geq 3 \\ & x_2 & \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0, & \end{array}$$

Al resolver mediante método gráfico, obtenemos rápidamente que este subproblema es infactible. El incumbente continúa siendo $\bar{z} = 22$. Adicionalmente, podemos podar esta rama.

Con la información obtenida, y sin saber si la rama no desarrollada aún posee nodos sin resolver, no se puede garantizar que se ha obtenido la solución óptima del problema.

A modo de resumen, el siguiente árbol parcial representa el trabajo realizado:

(ii) Mediante una regla *Greedy* (o "golosa"); debería aumentar lo más que pueda x_2 y dado el dominio del problema, esto lo consigo con $x_2 = 3$. Luego, $x_1 = 2$. Si realizó el redondeo simple de la relajación lineal, obtengo el mismo punto. En este punto la función objetivo vale $z = 21$.

Al resolver mediante Branch & Bound, vemos que las aproximaciones de solución obtenidas eran incorrectas, es decir de menor aporte a la función objetivo. Luego estos resultados son una muestra de la robustez del algoritmo B&B, y que en pequeños problemas ya es claro que estas reglas son solo aproximaciones y que usualmente obtendremos resultados sub-óptimos.

(iii) Basta con mirar la primera restricción: $6x_1 + 7x_2 \leq 38$. Es fácil ver que cuando $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 \leq 5$ para satisfacer la restricción y la integralidad de las variables. Del mismo modo, cuando $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 \leq 6$ para satisfacer la restricción y la integralidad de las variables. En consecuencia, la nueva restricción $x_1 + x_2 \leq 6$ es una desigualdad que fortalece la formulación del problema.

(b) **(4 puntos)** Considere el problema:

$$\begin{array}{lrl} \max & 2x_1 - 3x_2 + x_3 & \\ & x_1 - x_2 & \leq 5 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq 11 \\ & 3x_2 + 2x_3 & \geq 4 \\ & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z}_+ \end{array}$$

No es difícil deducir que $x_1 \leq 5$ es una desigualdad válida para el problema. Lo que nos interesa es considerar una desigualdad que contenga simultáneamente a x_1 y x_3. ¿Cómo se podría calcular el máximo valor que puede tomar α para que la desigualdad $x_1 + \alpha x_3 \leq 5$ sea válida para el problema? Calcule este valor.

Solución: Para calcular este valor, es necesario mirar cómo las restricciones del problema limitan los valores posibles que pueden tomar x_1 y x_3, y chequear que los valores posibles del parámetro α no limitan estos valores para estas variables.

Se puede ver de la primera restricción que $x_2 \leq \frac{11}{2}$. Esto hace que la segunda restricción entregue que $x_3 \geq -\frac{7}{2}$. Luego, el sistema restringe a x_3 al intervalo de valores $[-\frac{7}{2}, \infty)$. Así, la restricción construida no puede limitar a que x_3 alcance los valores del intervalo antes descrito para todos los valores de $x_1 \in [0, 5]$. Para esto, se debe cumplir que $\alpha \leq 0$.

Pregunta 4 (17 puntos)

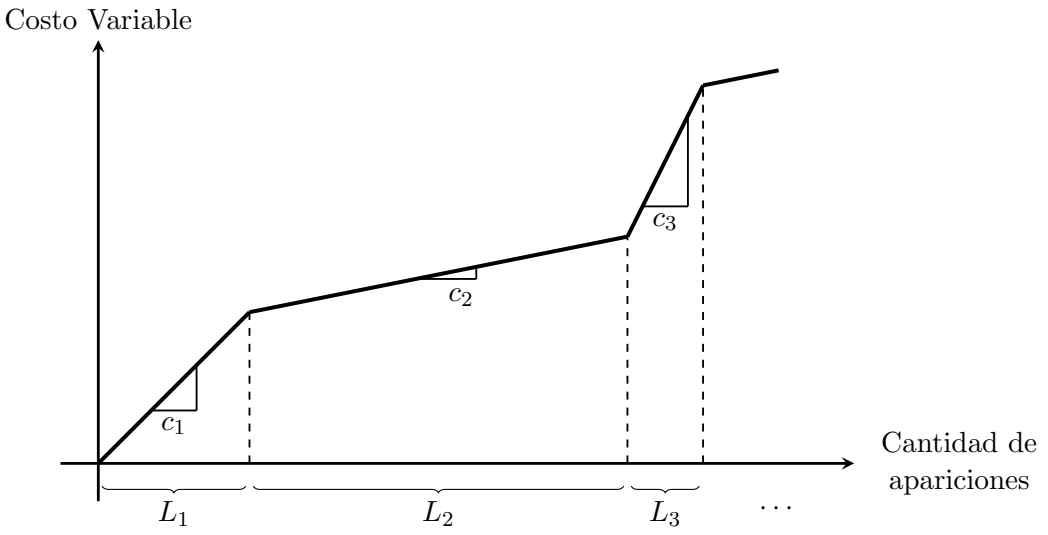
La exitosa empresa Nesclé requiere de asesoría para diseñar un plan de marketing para el próximo año. Dado que posee una gran lista I de productos, uno de sus principales intereses es reducir lo más posible el gasto en publicidad.

Nesclé tiene contactados a M medios de comunicación para publicitar sus productos. De esta manera, ella busca mantener a todos los productos en el "Top of the Mind" de los clientes, es decir, recordarles periódicamente su existencia para que estén siempre entre sus preferencias. Para ello, los consejeros del gerente le sugieren que cada producto i se promocione con un mínimo de A_i en total apariciones cada semana. Para ello, le sugirieron utilizar el conjunto $Lunes = \{1, 8, 15, 22, \ldots, T-6\}$ de todos los lunes en el horizonte de planificación de T días.

Eso sí, los consejeros le indican que si un producto aparece en demasiados medios de comunicación el mismo día, produce un efecto de "saturación" en los clientes que es contraproducente, por lo que le sugieren que ningún producto aparezca en más del q_t por ciento de los medios de comunicación disponibles en cada día t. También le sugieren tener cuidado con el efecto del "canibalismo". Este consiste en que, al hacer publicidad a uno de los productos, disminuyen las ventas del otro, por el efecto de sustitución. Para determinar el efecto, en el conjunto R se encuentran todos los pares (i, j) en los que hay canibalismo entre i y j. Para evitar eso, le sugirieron que evitara que haya publicidad en el mismo día y medio para dos productos entre los que hay canibalismo.

Debido a que los medios de comunicación también deben publicitar otras compañías, su capacidad de promoción para Nesclé es limitado. Por ende, cada medio m le ha dado un máximo de U_{mt} apariciones para el día t, el que considera todos los distintos productos de la empresa.

Cada uno de los medios de comunicación tiene un sistema de costos especial para cada producto en cada día. En particular, cada medio m posee un costo fijo CF_{mt} por el simple hecho de ser utilizado en el día t. Sin embargo, también posee un costo variable lineal a tramos para cada uno de los productos y períodos, con S_{imt} tramos en total. Para explicarle al gerente de Nesclé, usted le hizo este gráfico que representa el costo variable de publicidad de un producto i para un medio m y un período t en particular, en función de la cantidad de apariciones:



Considerando que el área de estimaciones indica que, por cada aparición del producto i en el medio m el día t, se obtiene un ingreso adicional a I_{imt}, se le pide escribir el modelo de programación **lineal** entera mixta que permita encontrar la estrategia de publicidad que maximice las utilidades de la empresa.

HINT: Intente escribir el costo variable del producto graficado en función de la cantidad de productos y los costos $c_1, c_2, \ldots$ para ayudarse a definir variables, y luego generalícelo. Ayúdese del gráfico y aproveche el parámetro L_{imkt} como el largo del tramo k del producto i para el medio m en el período t.

Solución:

ÍNDICES:

i, j: productos

t, θ: días

m: medios de comunicación

k: tramos de costo variable

VARIABLES:

x_{imt}: Variable binaria que vale 1 si se publicita el producto i en el medio m en el día t.

y_{imt}: Cantidad de apariciones del producto i en el medio m el día t.

z_{mt}: Variable binaria que vale 1 si se usa el medio m en el día t.

δ_{imkt}: Cantidad de productos i del tramo k que están promocionados en m el día t.

w_{imkt}: Variable binaria que vale 1 si δ_{imkt} está en su cota superior.

FUNCIÓN OBJETIVO:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{m=1}^{M} \sum_{t=1}^{T} I_{imt} y_{imt} - \sum_{m=1}^{M} \sum_{t=1}^{T} CF_{mt} z_{mt} - \sum_{i \in I} \sum_{m=1}^{M} \sum_{t=1}^{T} \sum_{k} c_{imkt} \delta_{imkt}$$

RESTRICCIONES:

R1) Si no se usa el medio, no se publicitan los productos.

$$x_{imt} \leq z_{mt} \qquad \forall i \in I \quad \forall m = 1, \ldots, M \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

R2) Si no se publicita el producto, no hay apariciones de él.

$$y_{imt} \leq M x_{imt} \qquad \forall i \in I \quad \forall m = 1, \ldots, M \quad \forall t = 1, \ldots, T \quad M \ggg 0$$

R3) No saturar a los clientes.

$$\sum_{m=1}^{M} x_{imt} \leq M \cdot \frac{q_t}{100} \qquad \forall i \in I \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

R4) Evitar canibalismo.

$$x_{imt} + x_{jmt} \leq 1 \qquad \forall (i, j) \in R \quad \forall m = 1, \ldots, M \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

R5) No se puede superar el máximo de apariciones de cada medio.

$$\sum_{i \in I} y_{imt} \leq U_{mt} \qquad \forall m = 1, \ldots, M \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

R6) Mantener a los productos en el "Top of the Mind".

$$\sum_{\theta=t}^{t+6} \sum_{m=1}^{M} y_{im\theta} \geq A_i \qquad \forall i \in I \quad \forall t \in Lunes$$

R7) Manejar las variables δ para respetar la función lineal por tramos.

$$L_{im1t} \cdot w_{im1t} \leq \delta_{im1t} \leq L_{im1t} \qquad \forall i \in I \qquad \forall m = 1, \ldots, M \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

$$L_{imkt} \cdot w_{imkt} \leq \delta_{imkt} \leq L_{imkt} \cdot w_{im(k-1)t} \qquad \forall k = 2, \ldots, S_{imt} - 1 \qquad \forall i \qquad \forall m \quad \forall t$$

$$\delta_{imkt} \leq L_{imkt} \cdot w_{im(k-1)t} \qquad k = S_{imt} \quad \forall i \in I \qquad \forall m = 1, \ldots, M \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

R8) Naturaleza variables

$$\begin{aligned} w_{imkt} &\in \{0, 1\} && \forall i, m, k, t \\ x_{imt} &\in \{0, 1\} && \forall i, m, t \\ z_{mt} &\in \{0, 1\} && \forall m, t \\ y_{imt} &\geq 0 && \forall i, m, t \\ \delta_{imkt} &\geq 0 && \forall i, m, k, t \end{aligned}$$