PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2020 - 1
Profesores: : M. Arancibia - R. Cuadrado - J. González - M. Klapp - P. Guajardo

Interrogación 1
Duración: XXX horas.

INSTRUCCIONES:

- *La prueba contiene 60 puntos.*
- *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

1. Preguntas cortas (21 puntos)

1.1. Vértices (3 puntos)

Considere el siguiente polítopo en $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} & x_i \geq 0, && \forall i \in \{1,\dots,n\} \\ & x_i + x_j \leq 1, && \forall i,j \in \{1,\dots,n\} : i \neq j \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 2 \end{aligned}$$

¿Cuál(es) de las siguientes soluciones son vértices del polítopo? Marque **todas** las alternativas que correspondan.

(a) $e_1 = (1,0,0,0,\dots,0)$

(b) $\frac{e_1+e_2}{2} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,\dots,0\right)$

(c) $\frac{e_1+e_2+e_3}{2} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\dots,0\right)$

(d) $\frac{e_1+e_2+e_3+e_4}{2}$

(e) $\frac{e_1+e_2+e_3+e_4+e_5}{2}$

Solución: $(a), (c)$ y (d).

1.2. Modelos Equivalentes (3 puntos)

Considere el siguiente modelo de optimización P dado por:

$$\min_{x \in \mathbb{X}} \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} f_i(x),$$

sobre una serie de funciones $f_i(x)$ estrictamente positivas sobre un dominio $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$.

¿Cuál(es) de los siguientes modelos son equivalentes a P? Marque **todas** las alternativas que correspondan.

(a)
$$\max_{x \in \mathbb{X}} \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} f_i(x)$$

(b)
$$\max_{x \in \mathbb{X}} \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} -f_i(x)$$

(c)
$$\min_{x \in \mathbb{X}} \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} -f_i(x)$$

(d)
$$\min_{x \in \mathbb{X}} e^{\{\max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \ln(f_i(x))\}}$$

Solución: (b) y (d).

1.3. Convexidad de funciones (3 puntos)

Considere una serie de funciones unidimensionales $f_i(x) = (x - a_i)^i$ con $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, ..., n$ y una función $g(x)$ convexa. ¿Cuál(es) de las siguientes funciones son convexas? Marque **todas** las alternativas que correspondan.

(a) $f_1(x)$

(b) $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$

(c) $\sum_{i=1}^{n} f_{2 \cdot i}(x)$

(d) $\max_{i \in \{1,...,n\}} f_i(x)$

(e) $f_1(x) \cdot g(x)$

Solución: $(a), (c)$ y (d).

1.4. Restricciones de lógica (3 puntos)

Se requiere representar la siguiente restricción lógica al modelar un problema de optimización de variables $x \in \mathbb{R}^n$:

"Si se cumple $a_1^T x < b_1$, entonces se debe cumplir $a_2^T x \leq b_2$"

, donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ y $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Además, defina un número M tal que $\max_{\{i=1,\ldots,n\}} |x_i| \leq M$ en cualquier punto factible del dominio.

¿Cómo podría representar esta restricción lógica mediante programación lineal entera mixta utilizando una variable binaria $z \in \{0, 1\}$?

(a) $a_1^T x \leq b_1 + M \cdot (1 - z)$ y $a_2^T x \leq b_2 + M \cdot z$

(b) $a_1^T x \geq b_1 - M \cdot (1 - z)$ y $a_2^T x \leq b_2 + M \cdot z$

(c) $a_1^T x < b_1$ y $a_2^T x \leq b_2$

(d) $a_1^T x < b_1 + M \cdot z$ y $a_2^T x \leq b_2 + M \cdot z$

(e) $a_1^T x \geq b_1 - M \cdot (1 - z)$ y $a_2^T x \geq b_2 - M \cdot z$

Solución: Esta es selección única!

(b).

1.5. Convexidad de conjuntos (3 puntos)

¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos son convexos? Marque **todas** las alternativas que correspondan.

(a) $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{máx}_{i\in\{1,\dots,n\}}\{x_i\} \leq 1\}$

(b) $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{mín}_{i\in\{1,\dots,n\}}\{x_i\} \leq 1\}$

(c) $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq 1\}$

(d) $S_4 = S_1 \cup S_3$

(e) $S_5 = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : x \in S_4 \wedge x \notin S_1\}$

Solución: $(a), (c), (d)$ y (e).

1.6. Existencia de solución óptima (3 puntos)

¿Cómo podría garantizar la existencia de solución óptima para el siguiente problema? Marque **todas** las alternativas que correspondan.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 3x + 2y - 3z \\ \text{s.a.} \quad & 2x + y + 2z \leq 5 \\ & x - z \leq 10 \\ & 3y - 2z \geq 0 \\ & x, z \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Aplicando el teorema de existencia para problemas acotados.

(b) Aplicando el teorema de existencia extendido para problemas no acotados.

(c) Probando que el problema es convexo.

(d) Probando que el problema es estrictamente convexo.

Solución: a)

1.7. Problema No Acotado (3 puntos)

Considere el siguiente problema de programación lineal.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & -3x + 2y + 3z \\ \text{s.a.} \quad & 3x - 2y + 4z \leq 7 \\ & x - 9y + 2z \geq 5 \\ & -2x - 5y + 3z \geq 10 \end{aligned}$$

¿Cuál(es) de las siguientes direcciones son rayos del cono recesivo del poliedro del problema que garantizan que el problema no está acotado? Marque **las** alternativas correctas.

(a) $d = (-10, -2, 0)$

(b) $d = (3, 4, 3)$

(c) $d = (-5, 4, 3)$

(d) $d = (-3, -2, -2)$

Solución: a)

2. Solución gráfica y algoritmo simplex (19 puntos)

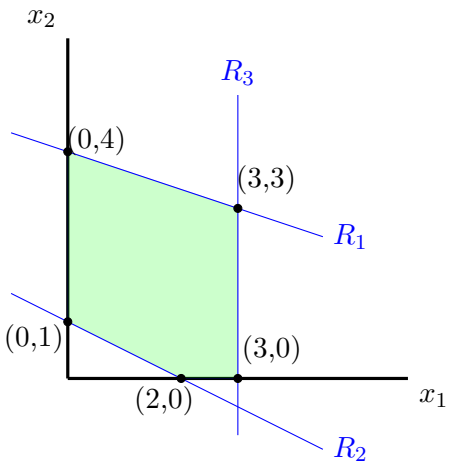
Considere el siguiente problema P de programación lineal bivariado:

$$\begin{array}{lllll} \text{máx} & 2x_1 + x_2 & & \\ s.a. & x_1 + 3x_2 & \leq 12 & (R_1) \\ & x_1 + 2x_2 & \geq 2 & (R_2) \\ & x_1 & \leq 3 & (R_3) \\ & x_1, x_2 & \geq 0 & \end{array}$$

Responda cada una de las siguientes preguntas

(a) **(4p)** Grafique el dominio de P indicando claramente cada restricción, su dominio y vértices factibles.

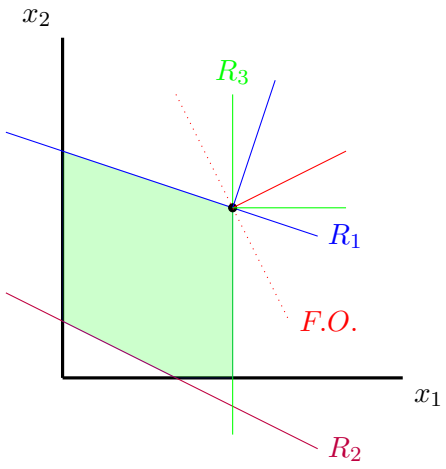
Solución: El siguiente gráfico contiene en azul las restricciones y en verde el dominio factible, además de marcar los cinco vértices factibles:



(b) **(4p)** Identifique su solución y valor óptimos. ¿Qué restricciones están activas en dicho punto? En la solución óptima, dibuje la curva de nivel de la función objetivo, el gradiente de la función objetivo y de cada una de las restricciones activas.

No es necesario volver a dibujar todo el dominio. Puede responder sobre el gráfico anterior.

Solución: La solución óptima es el vértice (3,3) con valor óptimo igual a 9. Las restricciones activas son R_1 y R_3. En el siguiente gráfico se muestran los tres gradientes en el vértice óptimo y la curva de nivel de la función objetivo:



(c) **(4p)** Escriba el problema P en forma estándar. Luego, determine la configuración de base para cada vértice factible identificado en el gráfico del dominio.

Solución:

Sea x_3, x_4 y x_5 las variables de holgura o exceso correspondientes a las restricciones R_1, R_2 y R_3, respectivamente. La forma estándar queda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lllll} \text{mín} & -2x_1 - x_2 & & & \\ s.a. & x_1 + 3x_2 + x_3 & = 12 & (R_1) \\ & x_1 + 2x_2 - x_4 & = 2 & (R_2) \\ & x_1 + x_5 & = 3 & (R_3) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 & \end{array}$$

- ◇ Vértice $(0, 1)$ corresponde a Base $\{x_2, x_3, x_5\}$.
- ◇ Vértice $(0, 4)$ corresponde a Base $\{x_2, x_4, x_5\}$.
- ◇ Vértice $(3, 3)$ corresponde a Base $\{x_1, x_2, x_4\}$.
- ◇ Vértice $(2, 0)$ corresponde a Base $\{x_1, x_3, x_5\}$.
- ◇ Vértice $(3, 0)$ corresponde a Base $\{x_1, x_3, x_4\}$.

(d) **(5p)** Corrobore que la solución óptima del problema en formato estándar cumple las condiciones de factibilidad y optimalidad utilizadas por el algoritmo simplex. Justifique

Solución:

Para comprobar usando Simplex que un vértice es factible, debemos corroborar que todas las variables tengan valores no negativos en el vértice. Para corroborar que un vértice es óptimo, debemos obtener los costos reducidos de la base correspondiente a ese vértice y comprobar que todos sean no negativos (en minimización).

Primero, calculamos la base:

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \bar{A_D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Luego, calculamos los costos reducidos:

$$r_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar que los costos reducidos son todos no negativos por lo tanto la solución es óptima. Además, $\bar{b}$ es no negativo, por lo tanto el vértice es factible.

(e) **(2p)** Asuma que comienza en el vértice donde x_1 toma valor 0 y x_2 tomar valor 1. Indique una secuencia de cambios de base para alcanzar el vértice óptimo (qué variable entra y cuál sale en cada iteración).

Solución:

Se comienza en la Base $\{x_2, x_3, x_5\}$ y se pueden tomar dos caminos.

OPCIÓN 1: tomar camino en sentido horario.

Primera iteración: sale la variable x_3 y entra x_4 y llegamos a la base $\{x_2, x_4, x_5\}$.

Segunda iteración: sale la variable x_5 y entra x_1 y llegamos a la base $\{x_2, x_4, x_1\}$.

OPCIÓN 2: tomar camino en sentido anti-horario.

Primera iteración: sale la variable x_2 y entra x_1 y llegamos a la base $\{x_1, x_3, x_5\}$.

Segunda iteración: sale la variable x_5 y entra x_4 y llegamos a la base $\{x_1, x_3, x_4\}$.

Tercera iteración: sale la variable x_3 y entra x_2 y llegamos a la base $\{x_1, x_2, x_4\}$.

A continuación se listan una serie de matrices con sus inversas que podrían ser de utilidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 2/3 & -1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Distribución de alimentos y productos básicos (18 puntos)

En su ciudad se ha decretado cuarentena debido a la crisis sanitaria del COVID-19. Para cubrir las necesidad de la gente de escasos recursos, las autoridades locales han habilitado un conjunto S de puntos acopio donde se almacenan $N = \{1, \ldots, n\}$ productos básicos de primera necesidad que son provistos por el estado o donados. Suponga que al comienzo de cada día $t \in \{1, \ldots, T\}$ el centro de acopio $s \in S$ recibe $q_{i,s,t}$ kilo de producto $i \in N$.

Los productos deben ser distribuidos a la población a lo largo del día que los recoge en un conjunto E de puntos de entrega, donde en cada punto $e \in E$ se demanda $d_{i,t,e}$ kilos del producto i en el día t. Suponga que el costo por transportar un kilo desde el centro de acopio $s \in S$ al punto de entrega $e \in E$ es igual a $\$c_{s,e}$. Asuma también que es posible almacenar productos en los puntos de acopio para cubrir las necesidades de la población a futuro. Considere que almacenar un kilo de producto i en la bodega s desde el comienzo del día t hasta el comienzo del día $t+1$ cuesta $\$h_{i,s,t}$. Además, en cada punto de acopio $s \in S$ no se puede almacenar más de Q_s kilos y se pierde todo lo que no se pueden almacenar.

(a) **(13p)** Plantee el modelo de optimización que permita planificar las acciones de transporte y almacenaje de productos en cada uno de los próximos T días tal que se cubra completamente la demanda en los puntos de entrega a mínimo costo satisfaciendo las restricciones de disponibilidad en el centro de acopio. Considere que todos los puntos de acopio están vacíos al comienzo del día 1.

Solución: Las variables del problema son:

- $x_{i,t,s,e} \in \mathbb{R}$: kilos a transportar del producto i en el día t desde s a e para todo $i \in N$, $t \in \{1, \ldots, T\}$, $s \in S$ y $e \in E$.
- $y_{i,s,t} \in \mathbb{R}$: kilos a almacenar del producto i en s desde el día t al $t+1$ para todo $i \in N$, $s \in S$ y $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$.

El modelo sería:

$$\min_{x,y \geq 0} \quad \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in N} \sum_{s \in S} \sum_{e \in E} (c_{s,e} \cdot x_{i,t,s,e}) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in N} \sum_{s \in S} h_{i,s,t} \cdot y_{i,s,t} \tag{1}$$

$$\text{s.a. } y_{i,s,t} + \sum_{e \in E} x_{i,t,s,e} \leq q_{i,s,t} + y_{i,s,t-1}, \qquad i \in N, s \in S, t \in \{1, \ldots, T\} \tag{2}$$

$$\sum_{s \in S} x_{i,t,s,e} \geq d_{i,t,e}, \qquad i \in N, e \in E, t \in \{1, \ldots, T\} \tag{3}$$

$$y_{i,s,0} = 0, \qquad i \in N, s \in S \tag{4}$$

$$\sum_{i \in N} y_{i,s,t} \leq Q_s, \qquad s \in S, t \in \{1, \ldots, T\} \tag{5}$$

(b) **(6p)** Considere ahora que el costo de transporte entre un punto de acopio s y un punto de entrega e no es proporcional al peso, sino que a la cantidad de camionadas requeridas. Suponga que usted posee camiones grandes y pequeños que pueden transportar 20 y 5 toneladas, respectivamente. Además, transportar una camionada del vehículo grande desde s a e cuesta $g_{s,e}$, mientras que la pequeña cuesta $p_{s,e}$. Realice los cambios que usted estime conveniente al modelo anterior para modelar esta nueva situación.

Solución: Una forma de hacer esto es agregar variables enteras:

- $w^{+}_{t,s,e} \in \mathbb{Z}$: camionadas grandes a transportar el día t desde s a e para todo $t \in \{1, \ldots, T\}$, $s \in S$ y $e \in E$.

- $\diamond$ $w^-_{t,s,e} \in \mathbb{Z}$: camionadas pequeñas a transportar el día t desde s a e para todo $t \in \{1,\dots,T\}, s \in S$ y $e \in E$.

Luego editar el modelo de la siguiente manera:

$$\min_{x,y,w^+,w^- \geq 0} \quad \sum_{t=1}^{T}\sum_{s\in S}\sum_{e\in E}(g_{s,e}\cdot w^+_{t,s,e} + p_{s,e}\cdot w^-_{t,s,e}) + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in N}\sum_{s\in S} h_{i,s,t}\cdot y_{i,s,t} \tag{6}$$

$$\text{s.a. } y_{i,s,t} + \sum_{e\in E} x_{i,t,s,e} \leq q_{i,s,t} + y_{i,s,t-1}, \qquad i \in N, s \in S, t \in \{1,\dots,T\} \tag{7}$$

$$\sum_{s\in S} x_{i,t,s,e} \geq d_{i,t,e}, \qquad i \in N, e \in E, t \in \{1,\dots,T\} \tag{8}$$

$$y_{i,s,0} = 0, \qquad i \in N, s \in S \tag{9}$$

$$\sum_{i\in N} y_{i,s,t} \leq Q_s, \qquad s \in S, t \in \{1,\dots,T\} \tag{10}$$

$$\sum_{i\in N} x_{i,t,s,e} \leq 20000\cdot w^+_{t,s,e} + 5000\cdot w^-_{t,s,e}, \qquad s \in S, e \in E, t \in \{1,\dots,T\} \tag{11}$$

$$w^-_{t,s,e}, w^+_{t,s,e} \in \mathbb{Z}, \qquad s \in S, e \in E, t \in \{1,\dots,T\} \tag{12}$$